BACALAUREAT

M_st-nat + tehnologic

» **Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii**

» **Filiera tehnologică:**

profilul servicii, toate calificările profesionale

profilul resurse naturale și protecția mediului, toate calificările profesionale

profilul tehnic, toate calificările profesionale

2016

matematică

ghid de pregătire pentru examen

Teste tip bacalaureat 2016 după modelul M.E.C.S.

BREVIAR TEORETIC, modele de rezolvări detaliate

GIL **Calendarul și programa examenului BAC 2016**

Mihai Bălună, Lucian Petrescu, Cornel Sandu, Gyuszi Szép,
Sorina Haiduc, Maria Josef, Mihaiela Mureşan,
Iuliu Benyi, Gabriela Boeriu, Petre Ciungu, Ovidiu Cojocaru,
Mariana Constantin, Andrei Dobre, Ruben Filimon, Ion Frujină,
Cristina Lemnaru, Aurora Marinescu, Iorgu Mânzală, Isabela Mititelu,
Dan Moga, Florinel Paul, Ioan Pişcorean, Daniela Sîrghie, Ştefan Someşan,
Gheorghe Stoianovici, Mariana Tomescu, Titu Vîrban

Mihaela

BACALAUREAT 2016

matematica

M_şt-nat + M_tehnologic

ghid de pregătire pentru examen

- **Filiera teoretică,**
  profilul real, specializarea ştiinţele naturii

- **Filiera tehnologică,**
  profilul servicii, toare calificările profesionale
  profilul resurse naturale şi protecţia mediului, toate calificările profesionale
  profilul tehnic, toate calificările profesionale

Editura GIL

Scanned with OKEN Scanner

© 2015 Editura GIL

Titlu: Bacalaureat 2016 M_şt-nat + M_tehnologic
ghid de pregătire pentru examen

Lucrare elaborată în conformitate cu programa de examen pentru Bacalaureat, aprobată prin Ordinul Ministrului Educaţiei Naţionale nr 4430/29. 08. 2014 , programa valabilă şi în sesiunile examenului de bacalaureat naţional din anul 2016.

ISBN 978-973-9417-99-0

Toate drepturile rezervate Editurii GIL. Nicio parte din aceasta lucrare nu poate fi copiată fără permisiunea scrisă a editurii GIL.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

Bacalaureat 2016 – *M_şt nat + M_tehnologic* : ghid de pregătire pentru examen / M. Bălună, L. Petrescu, C. Sandu, G. Szép. –Zalău : Gil, 2015

ISBN 978-973-9417-99-0
I. Bălună, Mihai
II. Petrescu, Lucian
III. Sandu, Cornel
IV. Szép, Gyuszi

51(075.35)(079.1)

Departament difuzare:

Editura GIL
CP 44 O.P.1
Zalău, Sălaj
cod 450200

Tel. 0260/616314;
Tel/Fax.: 0260/616414
Mobil 0733/677992

E-mail: comenzi@gil.ro

Editor: Mircea Lascu
Coperta: George Lascu

www.gil.ro

Scanned with OKEN Scanner

Prefaţă

Examenul de BACALAUREAT este cunoscut drept un examen al maturităţii, un examen care necesită o pregătire temeinică.

Matematica rămâne un domeniu prioritar al studiului în anii de şcoală deoarece ea acţionează asupra gândirii logice, ajutându-ne să analizăm, să înţelegem informaţia şi să acţionăm corect în diverse situaţii.

Această lucrare a fost gândită şi redactată ca un ghid de pregătire pentru examenul de bacalaureat. Informaţia a fost organizată după conţinuturile programei şcolare, respectiv programei de bacalaureat .

Breviarul teoretic cu exemple, prezentat la începutul lucrării, este o formă practică de reactualizare, repetare şi fixare a cunoştinţelor. Lucrarea continuă apoi cu exercitii tip bacalaureat 2016 care să ajute în exersarea cunoştinţelor studiate în anii de şcoală. Exerciţiile au fost grupate în 3 capitole corespunzătoare celor trei nivele de subiecte ce compun o variantă de subiect pentru examenul de bacalaureat:

Subiectul I-Algebră, Geometrie, clasele IX-X;

Subiectul II-Algebră clasele XI-XII;

Subiectul III-Analiză matematică clasele XI-XII.

Capitolul patru al lucrării cuprinde modele de *teste tip bacalaureat 2016*

În încheiere sunt prezentate *subiectele date la examen în anii anteriori.*

Toate problemele şi testele au rezolvări complete.

Mulţumim colectivului de autori care a redactat lucrarea, cadre didactice cu experienţă deosebită la catedră şi rezultate remarcabile în domeniul matematicii şi sperăm că prin această carte vom aduce în atenţia celor interesaţi un valoros material care poate ajuta în fixarea şi aprofundarea cunoştinţelor pentru toţi elevii de liceu, asigurând sistematizarea cunoştintelor, astfel încât examenul de Bacalureat să fie o reuşită.

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

Prefaţă		3
Calendarul examenului de bacalaureat 2016		7
Programa de bacalaureat *M_şt-nat, OMEN 4430/09.08.2014*		8
Programa de bacalaureat *M_tehnologic, OMEN 4430/29.08.2014*		19
Breviar teoretic clasele IX-XII şi exemple		29
	E	**S**
Capitolul 1		
1.1. Mulţimea numerelor reale	195	304
1.2. Mulţimea numerelor complexe	197	308
1.3. Ecuaţii, inecuaţii.Sisteme de ecuaţii	197	309
1.4. Funcţii	204	319
1.5. Elemente de trigonometrie. Aplicaţii ale trigonometriei în geometrie.Elemente de geometrie plană	209	324
1.6. Progresii	214	333
1.7. Mulţimi de numere. Probleme de numărare. Probabilităţi	217	336
1.8. Elemente de geometrie şi calcul vectorial	221	342
	E	**S**
Capitolul 2		
2.1. Matrice	227	350
2.2. Determinanţi. Inversa unei matrice	230	355
2.3. Sisteme de ecuaţii liniare	242	373
2.4. Aplicaţiile determinanţilor în geometrie	246	379
2.5. Legi de compoziţie. Grupuri. Inele şi corpuri	248	383
2.6. Polinoame	256	397
Capitolul 3		
3.1. Limite se funcţii	265	410
3.2. Funcţii continue. Funcţii derivabile	267	412
3.3. Primitive.Integrale definite	281	436
3.4. Aplicaţii ale integralei definite	290	447
	E	**S**
Capitolul 4		
Teste de sinteză tip bacalaureat 2016 după modelul MECS	466	515
Subiectele date la examenul de bacalaureat în anii 2013, 2014, 2015 şi baremele de evaluare şi de notare	**E**	**S**
Examen 2013 (sesiunea specială, iunie-iulie, august,)	585	620
Examen 2014 (sesiunea specială, iunie-iulie, august,)	595	637
Examen 2015 (sesiunea specială, iunie-iulie, august,)	605	653

Scanned with OKEN Scanner

Anexa la Ordinul MECS nr. 5080/31.08.2015, privind organizarea şi desfăşurarea examenului de bacalaureat naţional - 2016

CALENDARUL
examenului de bacalaureat naţional- 2016

Sesiunea iunie – iulie 2016

30 mai – 3 iunie 2016	Înscrierea candidaţilor la prima sesiune de examen
3 iunie 2016	Încheierea cursurilor pentru clasa a XII-a/ a XIII-a
13 - 15 iunie 2016	Evaluarea competenţelor lingvistice de comunicare orală în limba română – proba A
15 – 17 iunie 2016	Evaluarea competentelor lingvistice de comunicare orală în limba maternă – proba B
21 – 24 iunie 2016	Evaluarea competenţelor digitale – proba D
27 iunie -1 iulie 2016	Evaluarea competenţelor lingvistice într-o limbă de circulaţie internaţională – proba C
4 iulie 2016	Limba şi literatura română – proba E)a) – proba scrisă
5 iulie 2016	Limba şi literatura maternă – proba E)b) – proba scrisă
6 iulie 2016	Proba obligatorie a profilului – proba E)c) – proba scrisă
8 iulie 2016	Proba la alegere a profilului şi specializării – proba E)d) – proba scrisă
12 iulie 2016	Afişarea rezultatelor (până la ora 16:00)
12 iulie 2016	Depunerea contestaţiilor (orele 16:00 – 20:00)
13 – 15 iulie 2016	Rezolvarea contestaţiilor
16 iulie 2016	Afişarea rezultatelor finale

Sesiunea august - septembrie 2016

18 – 22 iulie 2016	Înscrierea candidaţilor la a doua sesiune de examen
16-17 august 2016	Evaluarea competenţelor lingvistice de comunicare orală în limba română – proba A
16-17 august 2016	Evaluarea competenţelor lingvistice de comunicare orală în limba maternă – proba B
17-19 august 2016	Evaluarea competenţelor lingvistice într-o limbă de circulaţie internaţională – proba C
18-19 august 2016	Evaluarea competenţelor digitale – proba D
22 august 2016	Limba şi literatura română – proba E)a) – proba scrisă
23 august 2016	Limba şi literatura maternă – proba E)b) – proba scrisă
24 august 2016	Proba obligatorie a profilului – proba E)c) – proba scrisă
26 august 2016	Proba la alegere a profilului şi specializarii – proba E)d) – proba scrisă
29 august 2016	Afişarea rezultatelor (până la orele 16:00) şi depunerea contestaţiilor (orele 16:00 – 20:00)
30-31august 2016	Rezolvarea contestaţiilor
1 septembrie 2016	Afişarea rezultatelor finale

Notă: La solicitarea comisiilor de bacalaureat judeţene/a municipiului Bucureşti sau din proprie iniţiativă, Comisia Naţională de Bacalaureat poate aproba în situaţii excepţionale prelungirea perioadelor de susţinere a probelor de evaluare a competenţelor digitale sau lingvistice, de evaluare a lucrărilor scrise ori de afişare a rezultatelor, precum şi reducerea perioadei de afişare a rezultatelor.

Scanned with OKEN Scanner

PROGRAMA *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii

COMPETENŢE DE EVALUAT ŞI CONŢINUTURI

CLASA a IX-a - 4 ore / săpt. (TC+CD)

Competenţe specifice	• Conţinuturi
1. **Identificarea** în limbaj cotidian sau în probleme de matematică, a unor noţiuni specifice logicii matematice şi teoriei mulţimilor 2. **Utilizarea** proprietăţilor operaţiilor algebrice ale numerelor, a estimărilor şi aproximărilor în contexte variate 3. **Alegerea** formei de reprezentare a unui număr real şi utilizarea unor algoritmi pentru optimizarea calculelor cu numere reale 4. **Deducerea** unor rezultate şi verificarea acestora utilizând inducţia matematică sau alte raţionamente logice 5. **Redactarea** rezolvării unei probleme, corelând limbajul uzual cu cel al logicii matematice şi al teoriei mulţimilor 6. **Transpunerea** unei situaţii problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului	**Mulţimi şi elemente de logică matematică** • Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real; operaţii cu intervale de numere reale • Propoziţie, predicat, cuantificatori • Operaţii logice elementare (negaţie, conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă), corelate cu operaţiile şi cu relaţiile dintre mulţimi (complementară, intersecţie, reuniune, incluziune, egalitate); raţionament prin reducere la absurd. • Inducţia matematică
1. **Recunoaşterea** unor corespondenţe care sunt funcţii,şiruri, progresii 2. **Utilizarea** unor modalităţi variate de descriere a funcţiilor în scopul caracterizării acestora 3. **Descrierea** unor şiruri/funcţii utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare şi raţionamentul inductiv 4. **Caracterizarea** unor şiruri folosind diverse reprezentări (formule, grafice) sau proprietăţi algebrice ale acestora 5. **Analizarea** unor valori particulare în vederea determinării formei analitice a unei funcţii definite pe $\mathbb{N}$ prin raţionament de tip inductiv 6. **Transpunerea** unor situaţii-problemă în limbaj matematic utilizând funcţii	**Şiruri** • Modalităţi de a defini un şir, şiruri mărginite, şiruri monotone • Şiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcţie de un termen dat şi raţie, suma primilor n termeni ai unei progresii • Condiţia ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru $n \geq 3$

Scanned with OKEN Scanner

definite pe $\mathbb{N}$	
1. Identificarea valorilor unei funcţii folosind reprezentarea grafică a acesteia **2. Caracterizarea** egalităţii a două funcţii prin utilizarea unor modalităţi variate de descriere a funcţiilor **3. Operarea** cu funcţii reprezentate în diferite moduri şi caracterizarea calitativă a acestor reprezentări **4. Caracterizarea** unor proprietăţi ale funcţiilor numerice prin utilizarea graficelor acestora şi a ecuaţiilor asociate **5. Deducerea** unor proprietăţi ale funcţiilor numerice prin lectură grafică **6. Analiza** unor situaţii practice şi descrierea lor cu ajutorul funcţiilor	**Funcţii; lecturi grafice** • Reper cartezian, produs cartezian; reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulţimi numerice; condiţii algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte în plan de forma $x = m$, sau $y = m$,cu $m \in \mathbb{R}$ • Funcţia: definiţie, exemple, exemple de corespondenţe care nu sunt funcţii, modalităţi de a descrie o funcţie, lecturi grafice. Egalitatea a două funcţii, imaginea unei mulţimi printr-o funcţie, graficul unei funcţii, restricţii ale unei funcţii. • Funcţii numerice ($F = \{f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}\}$); reprezentarea geometrică a graficului: intersecţia cu axele de coordonate, rezolvări grafice ale unor ecuaţii şi inecuaţii de forma $f(x) = g(x)\ (\leq, <, >, \geq)$; proprietăţi ale funcţiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginire, monotonie, alte proprietăţi,:paritate/imparitate, simetria graficului faţă de drepte de forma $x = m, m \in \mathbb{R}$, periodicitate • Compunerea funcţiilor; exemple pe funcţii numerice
1. Recunoaşterea funcţiei de gradul I descrisă în moduri diferite **2. Utilizarea** unor metode algebrice şi grafice pentru rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii **3. Descrierea** unor proprietăţi desprinse din reprezentarea grafică a funcţiei de gradul I sau din rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii **4. Exprimarea** legăturii între funcţia de gradul I şi reprezentarea ei geometrică **5. Interpretarea** graficului funcţiei de gradul I utilizând proprietăţile algebrice ale funcţiei **6. Modelarea** unor situaţii concrete prin utilizarea ecuaţiilor şi/sau a	**Funcţia de gradul I** • Definiţie; reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$ • Interpretarea grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei: monotonia şi semnul funcţiei; studiul monotoniei prin semnul diferenţei $f(x_1) - f(x_2)$ (sau studierea semnului raportului, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$) • Inecuaţii de forma $ax + b \leq 0 (<, >, \geq)$

Scanned with OKEN Scanner

inecuaţiilor, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului	studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale • Poziţia relativă a două drepte, sisteme de ecuaţii de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}, a,b,c,m,n,p \in \mathbb{R}$ • Sisteme de inecuaţii de gradul I
1. Diferenţierea, prin exemple, a variaţiei liniare de cea pătratică **2. Completarea** unor tabele de valori pentru trasarea graficului funcţiei de gradul al II-lea **3. Aplicarea** unor algoritmi pentru trasarea graficului funcţiei de gradul al II-lea (prin puncte semnificative) **4. Exprimarea** proprietăţilor unei funcţii de gradul al II-lea prin condiţii algebrice sau geometrice **5. Utilizarea** relaţiilor lui Viète pentru caracterizarea soluţiilor ecuaţiei de gradul al II-lea şi pentru rezolvarea unor sisteme de ecuaţii **6. Utilizarea** funcţiilor în rezolvarea unor probleme şi in modelarea unor procese	**Funcţia de gradul al II-lea** • Reprezentarea grafică a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi $a\neq 0$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia, $f(x)=0$ simetria faţă de drepte de forma $x=m$ cu $m\in\mathbb{R}$. • Relaţiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$, cu $s,p\in\mathbb{R}$
1. Recunoaşterea corespondenţei dintre seturi de date şi reprezentări grafice **2. Determinarea** unor funcţii care verifică anumite condiţii precizate **3. Utilizarea** unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii şi pentru reprezentarea grafică a soluţiilor acestora **4. Exprimarea** prin reprezentări grafice a unor condiţii algebrice; exprimarea prin condiţii algebrice a unor reprezentări grafice **5. Utilizarea** unor metode algebrice sau grafice pentru determinarea sau aproximarea soluţiilor ecuaţiei asociate funcţiei de gradul al II-lea **6. Interpretarea** informaţiilor conţinute în reprezentări grafice prin utilizarea de . estimări, aproximări şi strategii de	**Interpretarea geometrică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei de gradul al II-lea** • Monotonie; studiul monotoniei prin semnul diferenţei $f(x_1)-f(x_2)$ sau prin rata creşterii/descreşterii: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}, x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1\neq x_2$ punct de extrem, (vârful parabolei). • Poziţionarea parabolei faţă de axa Ox, semnul funcţiei, inecuaţii de forma $ax^2+bx+c\leq 0$ $(\geq,<,>)$, cu $a,b,c,\in\mathbb{R}, a\neq 0$, studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale, interpretare geometrică: imagini ale unor intervale (proiecţiile unor porţiuni de parabolă pe axa Oy). • Poziţia relativă a unei drepte faţă de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma

Scanned with OKEN Scanner

optimizare	$\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$, $a,b,c,m,n \in \mathbb{R}$
1. Identificarea unor elemente de geometrie vectorială în diferite contexte **2. Transpunerea** unor operaţii cu vectori în contexte geometrice date **3. Utilizarea** operaţiilor cu vectori pentru a descrie o problemă practică **4. Utilizarea** limbajului calculului vectorial pentru a descrie configuraţii geometrice **5. Identificarea** condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică să verifice cerinţe date **6. Aplicarea** calculului vectorial în rezolvarea unor probleme de fizică	**Vectori în plan** • Segment orientat, vectori, vectori coliniari • Operaţii cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăţi ale operaţiei de adunare, înmulţirea cu un scalar, proprietăţi ale înmulţirii cu un scalar, condiţia de coliniaritate, descompunerea după doi vectori necoliniari
1. Descrierea sintetică sau vectorială a proprietăţilor unor configuraţii geometrice în plan **2. Caracterizarea** sintetică sau/şi vectorială a unei configuraţii geometrice date **3. Alegerea** metodei adecvate de rezolvare a problemelor de coliniaritate, concurenţă sau paralelism **4. Trecerea** de la caracterizarea sintetică la cea vectorială (şi invers) într-o configuraţie geometrică dată **5. Interpretarea** coliniarităţii, concurenţei sau paralelismului în relaţie cu proprietăţile sintetice sau vectoriale ale unor configuraţii geometrice **6. Analizarea** comparativă a rezolvărilor vectorială şi sintetică ale aceleiaşi probleme	**Coliniaritate, concurenţă, paralelism - calcul vectorial în geometria plană** • Vectorul de poziţie al unui punct • Vectorul de poziţie al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiţii de paralelism) • Vectorul de poziţie a centrului de greutate al unui triunghi (concurenţa medianelor unui triunghi). • Teorema lui Menelau, teorema lui Ceva
1. Identificarea legăturilor între coordonate unghiulare, coordonate metrice şi coordonate carteziene pe cercul trigonometric **2. Calculul** unor măsuri de unghiuri şi	**Elemente de trigonometrie** • Cercul trigonometric, definirea funcţiilor trigonometrice, $\sin:[0,2\pi]\to[-1,1]$, $\cos:[0,2\pi]\to[-1,1]$, $\operatorname{tg}:[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}$,

Scanned with OKEN Scanner

arce utilizând relaţii trigonometrice **3. Determinarea** măsurii unor unghiuri şi a lungimii unor segmente utilizând relaţii metrice **4. Caracterizarea** unor configuraţii geometrice plane utilizând calculul trigonometric **5. Determinarea** unor proprietăţi ale funcţiilor prin lecturi grafice **6. Optimizarea** calculului trigonometric prin alegerea adecvată a formulelor	$ctg:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ • Definirea funcţiilor trigonometrice: $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1], \cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $tg:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, cu $D=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, $ctg:\mathbb{R}\mid D\to\mathbb{R}$, cu $D=\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ • Reducerea la primul cadran; formulele trigonometrice: $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\sin a+\sin b$, $\sin a-\sin b$, $\cos a+\cos b$, $\cos a-\cos b$ (transformarea sumei în produs)
1. Identificarea unor metode posibile în rezolvarea problemelor de geometrie **2. Aplicarea** unor metode diverse pentru determinarea unor distanţe, a unor măsuri de unghiuri şi a unor arii **3. Prelucrarea** informaţiilor oferite de o configuraţie geometrică pentru deducerea unor proprietăţi ale acesteia **4. Analizarea** unor configuraţii geometrice pentru alegerea algoritmilor de rezolvare **5. Aplicarea** unor metode variate pentru optimizarea calculelor de distanţe, de măsuri de unghiuri şi arii **6. Modelarea** unor configuraţii geometrice utilizând metode vectoriale sau sintetice	**Aplicaţii ale trigonometriei şi ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană** • Produsul scalar a doi vectori: definiţie, proprietăţi. Aplicaţii: teorema cosinusului, condiţii de perpendicularitate, rezolvarea triunghiului dreptunghic. • Aplicaţii vectoriale şi trigonometrice în geometrie: teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor oarecare. • Calcularea razei cercului înscris şi a razei cercului circumscris în triunghi, calcularea lungimilor unor segmente importante din triunghi, calcularea unor arii

CLASA a X-a - 4 ore / săpt. (TC+CD)

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. Identificarea caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră şi a formei de scriere a unui număr real în contexte specifice. **2. Determinarea** echivalenţei între forme diferite de scriere a unui număr, compararea şi ordonarea numerelor reale.	**Mulţimi de numere** • **Numere reale**: proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional, iraţional şi real ale unui număr pozitiv nenul, aproximări raţionale pentru numere reale • Radical de ordin $n(n\in\mathbb{N})$ şi $(n\geq 2)$ dintr-un număr, proprietăţi ale radicalilor

Scanned with OKEN Scanner

3. **Aplicarea** unor algoritmi specifici calculului cu numere reale sau complexe pentru optimizarea unor calcule şi în rezolvarea de ecuaţii. 4. **Alegerea** formei de reprezentare a unui număr real sau complex în funcţie de contexte în vederea optimizării calculelor. 5. **Alegerea** strategiilor de rezolvare în vederea optimizării calculelor 6. **Determinarea** unor analogii între proprietăţile operaţiilor cu numere reale sau complexe scrise în forme variate şi utilizarea acestora în rezolvarea unor ecuaţii	• Noţiunea de logaritm, proprietăţi ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operaţia de logaritmare • **Mulţimea $\mathbb{C}$.** Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, operaţii cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operaţiilor de adunare şi de scădere a numerelor complexe şi a înmulţirii acestora cu un număr real • Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi reali. Ecuaţii bipătrate.
1. **Trasarea** prin puncte a graficelor unor funcţii. 2. **Prelucrarea** informaţiilor ilustrate prin graficul unei funcţii în scopul deducerii unor proprietăţi algebrice ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, convexitate). 3. **Utilizarea** de proprietăţi ale funcţiilor în trasarea graficelor şi rezolvarea de 4. **Exprimarea** în limbaj matematic a unor situaţii concrete şi reprezentarea prin grafice a unor funcţii care descriu situaţii practice 5. **Interpretarea,** pe baza lecturii grafice, a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor. 6. **Uilizarea** echivalenţei dintre bijectivitate şi inversabilitate în trasarea unor grafice şi în rezolvarea unor ecuaţii algebrice şi trigonometrice.	**Funcţii şi ecuaţii** • Funcţia putere cu exponent natural: $f:\mathbb{R}\to D, f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$ şi $n\geq 2$; şi funcţia radical: $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}, n\in\mathbb{N}$ şi $n\geq 2$, unde $D=[0,+\infty)$ pentru n par şi $D=\mathbb{R}$ pentru n impar • Funcţia exponenţială $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ $f(x)=a^x, a\in(0,+\infty), a\neq 1$ şi funcţia logaritmică $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x$, $a\in(0,+\infty), a\neq 1$, • Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcţii inversabile: definiţie, proprietăţi grafice, condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie să fie inversabilă. • Funcţii trigonometrice directe şi inverse • Rezolvări de ecuaţii folosind proprietăţile funcţiilor: 1. Ecuaţii care conţin radicali de ordinul 2 sau de ordinul 3 2. Ecuaţii exponenţiale, ecuaţii logaritmice 3. Ecuaţii trigonometrice: $\sin x=a$, $\cos x=a$, $a\in[-1,1]$, $\operatorname{tg}x=a.\operatorname{ctg}x=a$ $a\in\mathbb{R}$, $\sin f(x)=\sin g(x)$, $\cos f(x)=\cos g(x)$,

Scanned with OKEN Scanner

	$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$, $\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$ *Notă: Pentru toate tipurile de funcţii se vor studia: intersecţia cu axele de coordonate, ecuaţia* $f(x) = 0$*, reprezentarea grafică prin puncte, simetrie, lectura grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, convexitate*
1. Diferenţierea problemelor în funcţie de numărul de soluţii admise **2. Identificarea** tipului de formulă de numărare adecvată unei situaţii problemă date **3. Utilizarea** unor formule combinatoriale în raţionamente de tip inductiv **4. Exprimarea,** în moduri variate, a caracteristicilor unor probleme în scopul simplificării modului de numărare **5. Interpretarea** unor situaţii problemă cu conţinut practic cu ajutorul funcţiilor şi a elementelor de combinatorică. **6. Alegerea** strategiilor de rezolvare a unor situaţii practice în scopul optimizării rezultatelor	**Metode de numărare** • Mulţimi finite ordonate. Numărul funcţiilor $f: A \to B$ unde A şi B sunt mulţimi finite. • Permutări - numărul de mulţimi ordonate care se obţin prin ordonarea unei mulţimi finite cu n elemente; - numărul funcţiilor bijective $f: A \to B$,unde A şi B sunt mulţimi finite. • Aranjamente - numărul submulţimilor ordonate cu câte k elemente fiecare, $k \le n$, care se pot forma cu cele n elemente ale unei mulţimi finite; - numărul funcţiilor injective $f: A \to B$ unde A şi B sunt mulţimi finite. • Combinări - numărul submulţimilor cu câte k elemente, unde $0 \le k \le n$ ale unei mulţimi finite cu n elemente. Proprietăţi: formula combinărilor complementare, numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente. • Binomul lui Newton.
1. Recunoaşterea unor date de tip probabilistic sau statistic în situaţii concrete. **2. Interpretarea** primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, a graficelor şi a diagramelor. **3. Utilizarea** unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităţilor pentru analiza de caz. **4. Transpunerea** în limbaj matematic prin mijloace statistice sau probabilistice a unor probleme practice.	**Matematici financiare** • Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, T.V.A. • Culegerea, clasificarea şi prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică a datelor statistice. • Interpretarea datelor statistice prin parametri de poziţie: medii, dispersia, abateri de la medie. • Evenimente aleatoare egal probabile, operaţii cu evenimente, probabilitatea unui eveniment compus din evenimente

Scanned with OKEN Scanner

5. Analizarea şi interpretarea unor situaţii practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice. **6. Corelarea** datelor statistice sau probabilistice în scopul predicţiei comportării unui sistem prin analogie cu modul de comportare în situaţii studiate.	egal probabile. *Notă: Aplicaţiile vor fi din domeniul financiar: profit, preţ de cost al unui produs, amortizări de investiţii, tipuri de credite, metode de finanţare, buget personal, buget familial*
1. Descrierea unor configuraţii geometrice analitic sau utilizând vectori. **2. Descrierea** analitică, sintetică sau vectorială a relaţiilor de paralelism şi de perpendicularitate. **3. Utilizarea** informaţiilor oferite de o configuraţie geometrică pentru deducerea unor proprietăţi ale acesteia şi calcularea unor distanţe şi a unor arii. **4. Exprimarea** analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configuraţii geometrice. **5. Interpretarea** perpendicularităţii în relaţie cu paralelismul şi minimul distanţei. **6. Modelarea** unor configuraţii geometrice analitic, sintetic sau vectorial.	**Geometrie** • Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan, distanţa dintre două puncte în plan. • Coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector şi un număr real, coordonate carteziene ale unui punct din plan, distanţa dintre două puncte din plan • Ecuaţii ale dreptei în plan determinate de un punct şi de o direcţie dată şi ale dreptei determinate de două puncte distincte • Condiţii de paralelism, condiţii de perpendicularitate a două drepte din plan, calcularea unor distanţe şi a unor arii.

CLASA a XI-a - 3 ore / săpt.

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. Identificarea unor situaţii practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic **2. Asocierea** unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces **3. Aplicarea** algoritmilor de calcul cu matrice în situaţii practice **4. Rezolvarea** unor sisteme utilizând algoritmi specifici **5. Stabilirea** unor condiţii de existenţă şi/sau compatibilitate a unor sisteme şi identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora	**Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare** **Matrice** • Tabel de tip matriceal. Matrice, mulţimi de matrice • Operaţii cu matrice: adunarea, înmulţirea, înmulţirea unei matrice cu un scalar, proprietăţi **Determinanţi** • Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăţi **Sisteme de ecuaţii liniare** • Matrice inversabile din $M_n(\mathbb{C}), n=\overline{2,3}$

Scanned with OKEN Scanner

6. Optimizarea rezolvării unor probleme sau situaţii-problemă prin alegerea unor strategii şi metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)	• Ecuaţii matriceale. • Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute, forma matriceală a unui sistem liniar • Metoda Cramer de rezolvare a sistemelor liniare • Aplicaţii: ecuaţia unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi şi coliniaritatea a trei puncte în plan.
1. Caracterizarea unor funcţii utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare **2. Interpretarea** unor proprietăţi ale funcţiilor cu ajutorul reprezentărilor grafice. **3. Aplicarea** unor algoritmi specifici calculului diferenţial în rezolvarea unor probleme **4. Exprimarea** cu ajutorul noţiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăţi cantitative şi/sau calitative ale unei funcţii **5. Utilizarea** reprezentării grafice a unei funcţii pentru verificarea unor rezultate şi pentru identificarea unor proprietăţi **6. Determinarea** unor optimuri situaţionale prin aplicarea calculului diferenţial în probleme practice	**Elemente de analiză matematică** **Limite de funcţii** • Noţiuni elementare despre mulţimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăţi, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$. • Limite de funcţii: interpretarea grafică a limitei unei funcţii într-un punct utilizând vecinătăţi, limite laterale • Calculul limitelor pentru funcţia de gradul I, funcţia de gradul al II-lea, funcţia logaritmică, exponenţială, funcţia putere $\left(n=\overline{2,3}\right)$, funcţia radical $\left(n=\overline{2,3}\right)$, funcţia raport de două funcţii cu grad cel mult 2; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty$. • Asimptotele graficului funcţiilor studiate: asimptote verticale, orizontale şi oblice. **Funcţii continue** • Continuitatea unei funcţii într-un punct al domeniului de definiţie, funcţii continue; interpretarea grafică a continuităţii unei funcţii, operaţii cu funcţii continue • Proprietatea lui Darboux, semnul unei funcţii continue pe un interval de numere reale **Funcţii derivabile** • Tangenta la o curbă. Derivata unei funcţii într-un punct, funcţii derivabile. • Operaţii cu funcţii derivabile, calculul derivatelor de ordin I şi al II-lea

Scanned with OKEN Scanner

	pentru funcţiile studiate. • Regulile lui l'Hospital pentru cazurile $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. **Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor** • Rolul derivatelor de ordin I şi de ordinul al II-lea în studiul funcţiilor: monotonie, puncte de extrem, concavitate, convexitate, • Reprezentarea grafică a funcţiilor *Note:* *- Se utilizează exprimarea „proprietatea lui ... ", „regula lui ... ", pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicaţii, dar a cărui demonstraţie este în afara programei.*

CLASA a XII-a - 3 ore / săpt.

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. Recunoaşterea structurilor algebrice, a mulţimilor de numere, de polinoame şi de matrice **2.1.Identificarea** unei structuri algebrice prin verificarea proprietăţilor acesteia **2.2 Determinarea** şi verificarea proprietăţilor unei structuri **3.1. Verificarea** faptului că o funcţie dată este morfism sau izomorfism **3.2. Aplicarea** unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuaţiilor algebrice **4. Explicarea** modului în care sunt utilizate în calcule specifice, proprietăţile operaţiilor unei structuri algebrice **5.1 Utilizarea** structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice **5.2 Determinarea** unor polinoame sau ecuaţii algebrice care îndeplinesc condiţii date **6.1 Exprimarea** unor probleme practice, folosind stucturi algebrice sau calcul polinomial **6.2 Aplicarea** prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din	**Elemente de algebră** **Grupuri** • Lege de compoziţie internă, tabla operaţiei • Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupul aditiv al claselor de resturi modulo n • Morfism şi izomorfism de grupuri. **Inele şi corpuri** • Inel, exemple: inele numerice: $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\mathbb{Z}_n$ inele de matrice, inele de funcţii reale • Corp, exemple: corpuri numerice $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ $\mathbb{Z}_p$ p prim **Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ** ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_p$ p prim) • Forma algebrică a unui polinom, operaţii (adunarea, înmulţirea, înmulţirea cu un scalar). • Teorema împărţirii cu rest; împărţirea polinoamelor, împărţirea cu $X - a$, schema lui Horner. • Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout; *c.m.m.d.c.* şi *c.m.m.m.c.* al

Scanned with OKEN Scanner

aritmetica numerelor	unor polinoame, descompunerea unor polinoame în factori ireductibili. • Rădăcini ale polinoamelor, relaţiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4. • Rezolvarea ecuaţiilor algebrice având coeficienţi în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ecuaţii binome, ecuaţii bipătrate, ecuaţii reciproce
1. Identificarea legăturilor dintre o funcţie continuă şi derivata sau primitiva acesteia **2. Stabilirea** unor proprietăţi ale calculului integral, prin analogie cu proprietăţi ale calculului diferenţial **3. Utilizarea** algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite **4. Explicarea** opţiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluţiilor **5. Determinarea** ariei unei suprafeţe plane şi a volumului unui corp, folosind calculul integral şi compararea rezultelor cu cele obţinute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie. **6. Aplicarea** calculului diferenţial sau integral în probleme practice	**Elemente de analiză matematică** • Probleme care conduc la noţiunea de integrală. **Primitive** (antiderivate) • Primitivele unei funcţii. Integrala nedefinită a unei funcţii continue, proprietatea de liniaritate a integralei definite. Primitive uzuale **Integrala definită** • Definirea integralei Riemann, a unei funcţii continue prin formula Leibniz-Newton • Proprietăţi ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare • Metode de calcul al integralelor definite: integrarea prin părţi, integrarea prin schimbare de variabilă. Calculul integralelor de forma, grad $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, grad $Q \le 4$ prin metoda descompunerii în fracţii simple. **Aplicaţii ale integralei definite** • Aria unei suprafeţe plane. • Volumul unui corp de rotaţie. *Notă: Se utilizează exprimarea „proprietate" sau „regulă", pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicaţii, dar a cărui demonstraţie este în afara programei.*

Scanned with OKEN Scanner

PROGRAMA *M_tehnologic*

Filiera tehnologică, profilul servicii, toate calificările profesionale, profilul resurse naturale şi protecţia mediului, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

COMPETENŢE DE EVALUAT ŞI CONŢINUTURI

CLASA a IX-a - 3 ore / săpt. (TC+CD)

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. **Identificarea** în limbaj cotidian sau în probleme a unor noţiuni specifice logicii matematice şi teoriei mulţimilor 2. **Reprezentarea** adecvată a mulţimilor şi a operaţiilor logice şi identificarea de proprietăţi ale acestora 3. **Alegerea şi utilizarea** de algoritmi pentru efectuarea de operaţii cu numere reale, cu mulţimi, cu propoziţii/predicate 4. **Deducerea** unor rezultate şi verificarea acestora utilizând inducţia matematică sau alte raţionamente logice 5. **Redactarea** rezolvării unei probleme, corelând limbajul uzual cu cel al logicii matematice şi al teoriei mulţimilor 6. **Transpunerea** unei situaţii-problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului	**Mulţimi şi elemente de logică matematică** • Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos; operaţii cu intervale de numere reale • Propoziţie, predicat, cuantificatori • Operaţii logice elementare (negaţie, conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă), corelate cu operaţiile şi cu relaţiile dintre mulţimi (complementară, intersecţie, reuniune, incluziune, egalitate) • Inducţia matematică
1. **Recunoaşterea** unor corespondenţe care sunt şiruri, progresii aritmetice sau geometrice 2. **Calcularea** valorilor unor şiruri care modelează situaţii practice în scopul caracterizării acestora 3. **Alegerea şi utilizarea** unor modalităţi adecvate de calculare a elementelor unui şir 4. **Interpretarea** grafică a unor relaţii provenite din probleme practice 5. **Analizarea** datelor în vederea aplicării unor formule de recurenţă sau a raţionamentului de tip inductiv în	**Şiruri** • Modalităţi de a descrie un şir; şiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii • Condiţia ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică, pentru $n \geq 3$

Scanned with OKEN Scanner

rezolvarea problemelor **6.1 Analizarea şi adaptarea** scrierii termenilor unui şir în funcţie de context	
1. Identificarea valorilor unei funcţii folosind reprezentarea grafică a acesteia **2. Determinarea** soluţiilor unor ecuaţii, inecuaţii utilizând reprezentările grafice **3. Alegerea şi utilizarea** unei modalităţi adecvate de reprezentare grafică în vederea evidenţierii unor proprietăţi ale funcţiilor **4. Exprimarea** monotoniei unei funcţii prin condiţii algebrice sau geometrice **5. Reprezentarea geometrică** a graficului unei funcţii prin puncte şi aproximarea acestuia printr-o curbă continuă **6. Deducerea** unor proprietăţi ale funcţiilor numerice prin lectură grafică	**Funcţii; lecturi grafice** • Reper cartezian, produs cartezian; reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulţimi numerice; condiţii algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte în plan de forma $x = m$ sau de forma $y = m, m \in \mathbb{R}$ • Funcţia: definiţie, exemple, exemple de corespondenţe care nu sunt funcţii, modalităţi de a descrie o funcţie, egalitatea a două funcţii, imaginea unei funcţii • Funcţii numerice $f : I \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale; graficul unei funcţii, reprezentarea geometrică a graficului, intersecţia graficului cu axele de coordonate, interpretarea grafică a unor ecuaţii de forma $f(x) = g(x)$; proprietăţi ale funcţiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginire, monotonie, paritate/imparitate(simetria graficului faţă de axa Oy sau origine), periodicitate • Compunerea funcţiilor; exemple de funcţii numerice
1. Recunoaşterea funcţiei de gradul I descrisă în moduri diferite **2. Utilizarea** unor metode algebrice sau grafice pentru rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor, sistemelor de ecuaţii **3. Descrierea** unor proprietăţi desprinse din reprezentarea grafică a funcţiei de gradul I sau din rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor, sistemelor de ecuaţii **4. Exprimarea** legăturii între funcţia de gradul I şi reprezentarea ei geometrică **5. Interpretarea** graficului funcţiei de gradul I utilizând proprietăţile algebrice ale funcţiei	**Funcţia de gradul I** • Definiţie; reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$ • Interpretarea grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei: monotonie, semnul funcţiei • Inecuaţii de forma $ax + b \le 0 (<, >, \ge)$ $a, b \in \mathbb{R}$ studiate pe $\mathbb{R}$ • Poziţia relativă a două drepte, sisteme de tipul

Scanned with OKEN Scanner

6. Rezolvarea cu ajutorul funcţiilor a unei situaţii-problemă şi interpretarea rezultatului	$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, a,b,c,m,n,p numere reale
1.Diferenţierea prin exemple, a variaţiei liniare de cea pătratică **2. Completarea** unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului funcţiei de gradul al II-lea **3. Aplicarea** unor algoritmi pentru trasarea graficului funcţiei de gradul al II-lea (prin puncte semnificative) **4. Exprimarea** proprietăţilor unei funcţii prin condiţii algebrice sau geometrice **5. Utilizarea** relaţiilor lui Viète pentru caracterizarea soluţiilor ecuaţiei de gradul al II-lea şi pentru rezolvarea unor sisteme de ecuaţii **6. Identificarea** unor metode grafice de rezolvare a ecuaţiilor sau a sistemelor de ecuaţii	**Funcţia de gradul al II-lea** • Reprezentarea grafică a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi $a\neq 0$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia, $f(x)=0$, simetria faţă de drepte de forma $x=m$ cu $m\in\mathbb{R}$ • Relaţiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$, $s,p\in\mathbb{R}$
1. Recunoaşterea corespondenţei dintre seturi de date şi reprezentări grafice **2. Reprezentarea** grafică a unor date diverse în vederea comparării variaţiei lor **3. Aplicarea** formulelor de calcul şi a lecturii grafice pentru rezolvarea de ecuaţii, inecuaţii şi sisteme de ecuaţii **4. Exprimarea** prin reprezentări grafice a unor condiţii algebrice; exprimarea prin condiţii algebrice a unor reprezentări grafice **5. Determinarea** unor relaţii între condiţii algebrice date şi graficul funcţiei de gradul al II-lea **6. Utilizarea** monotoniei şi a punctelor de extrem în optimizarea rezultatelor unor probleme practice	**Interpretarea geometrică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei de gradul al II-lea** • Monotonie, punct de extrem, vârful parabolei, interpretare geometrică • Poziţionarea parabolei faţă de axa Ox, semnul funcţiei, inecuaţii de forma $ax^2+bx+c\leq 0$ $(\geq,<,>)$, $a,b,c,\in\mathbb{R}, a\neq 0$, interpretare geometrică • Poziţia relativă a unei drepte faţă de o parabolă : rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$, cu $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$, interpretare geometrică
1. Identificarea unor elemente de geometrie vectorială în diferite contexte **2. Aplicarea** regulilor de calcul pentru	**Vectori în plan** • Segment orientat, vectori, vectori coliniari • Operaţii cu vectori: adunarea (regula

Scanned with OKEN Scanner

determinarea caracteristicilor unor segmente orientate pe configuraţii date **3. Utilizarea** operaţiilor cu vectori pentru a descrie configuraţii geometrice date **4. Utilizarea** limbajului calculului vectorial pentru a descrie a descrie anumite configuraţii geometrice **5. Identificarea** condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică să verifice cerinţe date **6. Aplicarea** calculului vectorial în rezolvarea unor probleme din domenii conexe	triunghiului, regula paralelogramului), proprietăţi ale operaţiei de adunare, înmulţirea cu un scalar, proprietăţi ale înmulţirii cu un scalar; condiţia de coliniaritate, descompunerea după doi vectori daţi
1. Identificarea elementelor necesare pentru calcularea unor lungimi de segmente şi a unor măsuri de unghiuri **2. Utilizarea** unor tabele şi formule pentru calcule în trigonometrie şi în geometrie **3. Determinarea** măsurii unor unghiuri şi a lungimii unor segmente utilizând relaţii metrice **4. Transpunerea** într-un limbaj specific trigonometriei şi geometriei a unor probleme practice **5. Utilizarea** unor elemente de trigonometrie în rezolvarea triunghiului oarecare **6. Analizarea şi interpretarea** rezultatelor obţinute prin rezolvarea unor probleme practice	**Trigonometrie şi aplicaţii ale trigonometriei în geometrie** • Rezolvarea triunghiului dreptunghic • Cercul trigonometric, definirea funcţiilor trigonometrice: $\sin:[0,2\pi]\to[-1,1]$, $\cos:[0,2\pi]\to[-1,1]$, $tg:[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $ctg:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ • Definirea funcţiilor trigonometrice: $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $tg:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, cu $D=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle\vert k\in\mathbb{Z}\right\}$, $ctg:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, cu $D=\{k\pi\vert k\in\mathbb{Z}\}$ • Reducerea la primul cadran; formule trigonometrice: $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$ • Modalităţi de calculare a lungimii unui segment şi a măsurii unui unghi: teorema sinusurilor şi teorema cosinusului

Scanned with OKEN Scanner

CLASA a X-a - 3 ore / săpt. (TC+CD)

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Identificarea** caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră și a formei de scriere a unui număr real în contexte specifice 2. **Compararea** și **ordonarea** numerelor reale utilizând metode variate 3. **Aplicarea** unor algoritmi specifici calculului cu puteri, radicali, logaritmi în contexte variate 4. **Alegerea** formei de reprezentare a unui număr real în vederea optimizării calculelor. 5. **Alegerea** strategiilor de rezolvare în vederea optimizării calculelor 6. **Determinarea** unor analogii între proprietățile operațiilor cu numere reale scrise în forme variate și utilizarea acestora în rezolvarea unor ecuații	**Mulțimi de numere** • **Numere reale**: proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și real ale unui număr pozitiv nenul • Media aritmetică, media ponderată, media geometrică, media armonică • Radical unui număr (de ordin 2 sau de ordin 3), proprietăți ale radicalilor • Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare. • **Mulțimea** $\mathbb{C}$. Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, operații cu numere complexe. Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul al doilea având coeficienți reali
1. **Trasarea** prin puncte a graficelor unor funcții. 2. **Prelucrarea** informațiilor ilustrate prin graficul unei funcții în scopul deducerii unor proprietăți ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, continuitate, convexitate). 3. **Utilizarea** de proprietăți ale funcțiilor în trasarea graficelor și în rezolvarea de ecuații. 4. **Exprimarea** în limbaj matematic a unor situații concrete și reprezentarea prin grafice a unor funcții care descriu situații practice 5. **Interpretarea,** pe baza lecturii grafice, a proprietăților algebrice ale funcțiilor. 6. **Uilizarea** echivalenței dintre bijectivitate și inversabilitate în trasarea unor grafice și în rezolvarea unor ecuații algebrice	**Funcții și ecuații** • Funcția putere: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$ și $n\geq 2$, și funcția radical: $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}, n=\overline{2,3}$ unde $D=[0,+\infty)$ pentru n par și $D=\mathbb{R}$ pentru n impar • Funcția exponențială $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ $f(x)=a^x, a\in(0,+\infty), a\neq 1$ și funcția logaritmică $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x$, $a\in(0,+\infty), a\neq 1$ • Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcții inversabile: definiție, proprietăți grafice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă. • Funcții trigonometrice directe și inverse

Scanned with OKEN Scanner

Notă: Pentru toate tipurile de funcţii se vor studia: intersecţia cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x)=0$*, reprezentarea grafică prin puncte, simetrie, lectura grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, convexitate*	• Rezolvări de ecuaţii folosind proprietăţile funcţiilor: - Ecuaţii care conţin radicali de ordinul 2 sau de ordinul 3 - Ecuaţii exponenţiale, ecuaţii logaritmice, utilizarea unor substituţii care conduc la rezolvarea de ecuaţii algebrice
1. Diferenţierea problemelor în funcţie de numărul de soluţii admise **2. Identificarea** tipului de formulă de numărare adecvată unei situaţii-problemă date **3. Utilizarea** unor formule combinatoriale în raţionamente de tip inductiv **4. Exprimarea** caracteristicilor unor probleme în scopul simplificării modului de numărare **5. Interpretarea** unor situaţii-problemă având conţinut practic cu ajutorul elementelor de combinatorică. **6. Alegerea** strategiilor de rezolvare a unor probleme în scopul optimizării rezultatelor	**Metode de numărare** • Mulţimi finite: permutări, aranjamente, combinări, numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente
1. Recunoaşterea unor date de tip probabilistic sau statistic în situaţii concrete **2. Interpretarea** primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, a graficelor şi a diagramelor **3. Utilizarea** unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităţilor pentru analiza de caz. **4. Transpunerea** în limbaj matematic prin mijloace statistice, probabilistice a unor probleme practice **5. Analiza şi interpretarea** unor situaţii practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice **6. Corelarea** datelor statistice sau probabilistice în scopul predicţiei comportării unui sistem prin analogie	**Matematici financiare** • Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi • Culegerea, clasificarea şi prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică a datelor statistice • Interpretarea datelor statistice prin lectura reprezentărilor grafice • Evenimente aleatoare egal probabile; probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile *Notă:Aplicaţiile vor fi din domeniul financiar: profit, preţ de cost al unui produs, amortizări de investiţii, tipuri de credite, metode de finanţare, buget personal, buget familial.*

Scanned with OKEN Scanner

cu modul de comportare în situaţii studiate	
1. Descrierea unor configuraţii geometrice analitic sau utilizând vectori **2. Descrierea** analitică, sintetică sau vectorială a relaţiilor de paralelism **3. Utilizarea** informaţiilor oferite de o configuraţie geometrică pentru deducerea unor proprietăţi ale acesteia şi calcularea unor distanţe şi a unor arii **4. Exprimarea** analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configuraţii geometrice. **5. Interpretarea** perpendicularităţii în relaţie cu paralelismul şi minimul distanţei **6. Modelarea** unor configuraţii geometrice analitic, sintetic sau vectorial	**Geometrie** • Reper cartezian în plan, coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector şi un număr real, coordonate carteziene ale unui punct din plan, distanţa dintre două puncte în plan • Ecuaţii ale dreptei în plan determinate de un punct şi de o direcţie dată şi ale dreptei determinate de două puncte distincte • Condiţii de paralelism, condiţii de perpendicularitate a două drepte în plan; linii importante în triunghi, calcularea unor distanţe şi a unor arii

CLASA a XI-a - 3 ore / săpt. (TC+CD)

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. Identificarea unor situaţii practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic **2. Asocierea** unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces **3. Aplicarea** algoritmilor de calcul cu matrice în situaţii practice **4. Rezolvarea** unor sisteme utilizând algoritmi specifici **5. Stabilirea** unor condiţii de existenţă şi/sau compatibilitate a unor sisteme şi identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora **6. Optimizarea** rezolvării unor probleme sau situaţii-problemă prin alegerea unor strategii şi metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)	**Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare** **Matrice** • Tabel de tip matriceal. Matrice, mulţimi de matrice • Operaţii cu matrice: adunarea, înmulţirea, înmulţirea unei matrice cu scalar, proprietăţi **Determinanţi** • Determinant unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăţi **Sisteme de ecuaţii liniare** • Matrice inversabile din $M_n(\mathbb{R}), n=\overline{2,3}$ • Ecuaţii matriceale • Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute, forma matriceală a unui sistem liniar • Metoda Cramer de rezolvare a sistemelor liniare

Scanned with OKEN Scanner

	• Aplicaţii: ecuaţia unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi şi coliniaritatea a trei puncte în plan
1. Caracterizarea unor funcţii utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare **2. Interpretarea** unor proprietăţi ale funcţiilor cu ajutorul reprezentărilor grafice **3. Aplicarea** unor algoritmi specifici calculului diferenţial în rezolvarea unor probleme **4. Exprimarea** cu ajutorul noţiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăţi cantitative şi calitative ale unei funcţii **5. Utilizarea** reprezentării grafice a unei funcţii pentru verificarea unor rezultate şi pentru identificarea unor proprietăţi **6. Determinarea** unor optimuri situaţionale prin aplicarea calculului diferenţial în probleme practice *Notă:* *- Se utilizează exprimarea „proprietatea lui ...", „regula lui ...", pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicaţii, dar a cărui demonstraţie este în afara programei.*	**Elemente de analiză matematică** **Limite de funcţii** • Noţiuni elementare despre mulţimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăţi, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$ • Limite de funcţii: interpretarea grafică a limitei unei funcţii într-un punct utilizând vecinătăţi, limite laterale • Calculul limitelor pentru funcţia de gradul I, funcţia de gradul al II-lea, funcţia logaritmică, exponenţială, funcţia putere $\left(n=\overline{2,3}\right)$, funcţia radical $\left(n=\overline{2,3}\right)$, funcţia raport de două funcţii cu grad cel mult 2, cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii: $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty$. • Asimptotele graficului funcţiilor studiate: asimptote verticale, oblice **Funcţii continue** • Continuitatea unei funcţii, într-un punct al domeniului de definiţie, funcţii continue, interpretarea grafică a continuităţii unei funcţii, operaţii cu funcţii continue • Proprietatea lui Darboux, semnul unei funcţii continue pe un interval de numere reale **Funcţii derivabile** • Tangenta la o curbă. Derivata unei funcţii într-un punct, funcţii derivabile • Operaţii cu funcţii derivabile, calculul derivatelor de ordin I şi de ordinul al II-lea pentru funcţiile studiate • Regulile lui l'Hospital pentru cazurile $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ **Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor**

Scanned with OKEN Scanner

	• Rolul derivatei de ordin I şi de ordinul al II-lea în studiul funcţiilor: monotonie, puncte de extrem, concavitate, convexitate • Reprezentarea grafică a funcţiilor

CLASA a XII-a - 3 ore / săpt.(TC+CD)

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. Recunoaşterea structurilor algebrice, a mulţimilor de numere, de polinoame şi de matrice **2.1 Identificarea** unei structuri algebrice prin verificarea proprietăţilor acesteia **2.2 Determinarea** şi verificarea proprietăţilor unei structuri algebrice **3.1. Verificarea** faptului că o funcţie dată este morfism sau izomorfism **3.2. Aplicarea** unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuaţiilor algebrice **4. Explicarea** modului în care sunt utilizate în calcule specifice, proprietăţile operaţiilor unei structuri algebrice **5.1 Utilizarea** structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice **5.2 Determinarea** unor polinoame sau ecuaţii algebrice care îndeplinesc condiţii date **6.1 Exprimarea** unor probleme practice, folosind stucturi algebrice sau calcul polinomial **6.2 Aplicarea,** prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor	**Elemente de algebră** **Grupuri** • Lege de compoziţie internă, tabla operaţiei • Grup, exemple: grupuri numerice, grupul aditiv al claselor de resturi modulo n • Morfism şi izomorfism de grupuri **Inele şi corpuri** • Inel, exemple: inele numerice: $(\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathbb{Z}_n$ • Corp, exemple: corpuri numerice $(\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C})$ $\mathbb{Z}_p$ p prim **Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ** $(\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\ \mathbb{Z}_p\ p$ prim$)$ • Forma algebrică a unui polinom, operaţii (adunarea, înmulţirea, înmulţirea cu un scalar) • Teorema împărţirii cu rest; împărţirea polinoamelor, împărţirea cu $X-a$, schema lui Horner. • Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout • Rădăcini ale polinoamelor, relaţiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 3
1. Identificarea legăturilor dintre o funcţie continuă şi derivata sau primitiva acesteia **2. Stabilirea** unor proprietăţi ale calculului integral, prin analogie cu proprietăţi ale calculului diferenţial	**Elemente de analiză matematică** **Primitive** (antiderivate) • Primitivele unei funcţii definite pe un interval. Integrala nedefinită a unei funcţii continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite. Primitive uzuale

Scanned with OKEN Scanner

3. Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite **4. Explicarea** opţiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluţiilor **5. Determinarea** ariei unei suprafeţe plane şi a volumului unui corp, folosind calculul integral şi compararea rezultelor cu cele obţinute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie **6. Aplicarea** calculului diferenţial sau integral în probleme practice *Notă:* *- Se utilizează exprimarea „proprietate" sau „regulă, pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicaţii, dar a cărui demonstraţie este în afara programei*	**Integrala definită** • Definirea integralei Riemann, a unei funcţii continue prin formula Laibniz-Newton • Proprietăţi ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare • Metode de calcul al integralelor definite: integrarea prin părţi, integrarea prin schimbare de variabilă. Calculul integralelor de forma, grad $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, grad $Q \leq 2$ **Aplicaţii ale integralei definite** • Aria unei suprafeţe plane • Volumul unui corp de rotaţie

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Clasa a IX-a, M_2

Numere reale

Partea întreagă a unui număr real a este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu numărul a şi se notează cu $[a]$.

Deci $[a]=\max\{k\in\mathbb{Z}\mid k\le a\}$.

Partea fracţionară a unui număr real a este diferenţa dintre număr şi partea sa întreagă şi se notează cu $\{a\}$. Avem aşadar $\{a\}=a-[a]$.

Proprietăţi:

Pentru orice numere reale x,y şi pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $k\in\mathbb{Z}$ au loc:

1	$[x]=m\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow m\le x<m+1$	1	$\{x\}\in[0,1)$
2	$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$	2	$\{x\}=0\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$
3	$[x]=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$	3	$\{x\}=x\Leftrightarrow x\in[0,1)$
4	$[x+k]=[x]+k$	4	$\{x+k\}=\{x\}$
5	$[x]+[-x]=\begin{cases}0, & \text{dacă } x\in\mathbb{Z}\\ -1, & \text{dacă } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	5	$\{x\}+\{-x\}=\begin{cases}0, & \text{dacă } x\in\mathbb{Z}\\ 1, & \text{dacă } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$
6	$[x]=[y]\Rightarrow\lvert x-y\rvert<1$	6	$\{x\}=\{y\}\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}$
7	$[x+y]\ge[x]+[y]$	7	$\{x+y\}\le\{x\}+\{y\}$
8	$\sum_{i=1}^{n}\left[x+\frac{i-1}{n}\right]=[nx]$	8	$\sum_{i=1}^{n}\left\{x+\frac{i-1}{n}\right\}=\{nx\}+\frac{n-1}{2}$

Exemple:

1. $[2,34]=2$, pentru că $2\le 2,34<3$, adevărat.
2. $\left[-\sqrt{10}\right]=-4$, pentru că $-4\le-\sqrt{10}<-3\Leftrightarrow 4\ge\sqrt{10}>3\Leftrightarrow 16\ge 10>9$, adevărat.
3. $\left\{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2\right\}=\left\{5-2\sqrt{6}\right\}=\left\{-\sqrt{24}\right\}=-\sqrt{24}-\left[-\sqrt{24}\right]=5-\sqrt{24}$, pentru că $-5\le-\sqrt{24}<-4\Leftrightarrow 5\ge\sqrt{24}>4\Leftrightarrow 25\ge 24>16$, adevărat.
4. $\left[\frac{2011}{2010}\right]+\left[-\frac{2011}{2010}\right]=-1$, pentru că $\frac{2011}{2010}\notin\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

5. $\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}=\sqrt{n^2+1}-\left[\sqrt{n^2+1}\right]=\sqrt{n^2+1}-n$, pentru că

$n\le\sqrt{n^2+1}<n+1\Leftrightarrow n^2\le n^2+1<n^2+2n+1$, adevărat pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

6. $\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right\}$, pentru că $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=-4\in\mathbb{Z}$.

7. $\left\{\left(\sin 3^\circ-\cos 3^\circ\right)^2\right\}=\left\{2\cos 177^\circ\cdot\cos 87^\circ\right\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sin 3^\circ-\cos 3^\circ\right)^2-2\left(-\cos\left(180^\circ-177^\circ\right)\right)\cdot\sin\left(90^\circ-87^\circ\right)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\underbrace{\sin^2 3^\circ+\cos^2 3^\circ}_{=1}-2\sin 3^\circ\cdot\cos 3^\circ+2\sin 3^\circ\cdot\cos 3^\circ\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 1\in\mathbb{Z}$, adevărat.

8. $\left\{\log_3 5\right\}=\left\{\log_3 15\right\}\Leftrightarrow\log_3 5-\log_3 15\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\log_3\frac{5}{15}=\log_3\frac{1}{3}=-1\in\mathbb{Z}$, adevărat.

Modulul (valoarea absolută) numărului real a se notează cu $|a|$ şi este egal cu

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{dacă } a\ge 0\\ -a, & \text{dacă } a<0\end{cases}\Leftrightarrow|a|=\max(-a,a).$$

Proprietăţi:

Pentru orice numere reale x,y şi pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ au loc relaţiile:

1	$\lvert x\rvert\ge 0$	7	$\big\lvert\lvert x\rvert-\lvert y\rvert\big\rvert\le\lvert x+y\rvert\le\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$
2	$\lvert x\rvert=0\Leftrightarrow x=0$	8	$\lvert x+y\rvert=\lvert x\rvert+\lvert y\rvert\Leftrightarrow x\cdot y\ge 0$
3	$\lvert x\cdot y\rvert=\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$	9	$\lvert x\rvert=\lvert y\rvert\Leftrightarrow x=\pm y$
4	$\lvert x^n\rvert=\lvert x\rvert^n$	10	$\lvert x\rvert=a\Rightarrow\begin{cases}x\in\varnothing, & \text{dacă } a<0\\ x=\pm a, & \text{dacă } a\ge 0\end{cases}$
5	$\lvert x\rvert=\lvert -x\rvert$	11	$\lvert x\rvert<a\Rightarrow\begin{cases}x\in\varnothing, & \text{dacă } a\le 0\\ x\in(-a,a), & \text{dacă } a>0\end{cases}$
6	$\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert=\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert},\ y\ne 0$	12	$\lvert x\rvert>a\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}, & \text{dacă } a<0\\ x\in(-\infty,-a)\cup(a,\infty), & \text{dacă } a\ge 0\end{cases}$

Exemple:

1. $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, pentru că $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0\Leftrightarrow\sqrt{2}<\sqrt{3}\Leftrightarrow 2<3$, adevărat.

Scanned with OKEN Scanner

2. $\left|x^2-x\right|-\left|-x\right|\cdot\left|1-x\right|=\left|x(x-1)\right|-\left|-x(1-x)\right|=\left|x(x-1)\right|-\left|x(x-1)\right|=0$.

3. $\left|x-2010\right|+\left|x+2010\right|=4020\Leftrightarrow\left|-x+2010\right|+\left|x+2010\right|=4020\Rightarrow$
$\Rightarrow 4020\geq\left|(-x+2010)+(x+2010)\right|=4020\Rightarrow(x+2010)(-x+2010)\geq 0\Leftrightarrow$
$x\in[-2010,2010]$.

4. $\left|-x^{2010}\right|\cdot x-x^3\cdot\sqrt{x^{4016}}=\left|x\right|^{2010}\cdot x-x^3\left|x^{2008}\right|=x^{2010}\cdot x-x^3\cdot x^{2008}=0$.

5. $\underbrace{\left|x^2-2x-3\right|}_{\geq 0}+\underbrace{\left|x^2-4x-5\right|}_{\geq 0}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^2-2x-3\right|=0\Leftrightarrow x\in\{-1,3\}\\ \left|x^2-4x-5\right|=0\Leftrightarrow x\in\{-1,5\}\end{cases}\Big|\cap\Rightarrow x=-1$.

Ecuaţii

1. Ecuaţia $ax+b=0$ cu $a,b\in\mathbb{R}$ are:
   a. soluţie unică, $x=-\frac{b}{a}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ b\in\mathbb{R}\end{cases}$;
   b. nicio soluţie reală, $x\in\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}$;
   c. o infinitate de soluţii $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$.

2. Ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi $a\neq 0$, are:
   a. două soluţii reale distincte $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, dacă $\Delta=b^2-4ac>0$;
   b. două soluţii reale egale $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$, dacă $\Delta=b^2-4ac=0$;
   c. nicio soluţie reală, dacă $\Delta=b^2-4ac<0$.

Descompunerea trinomului ax^2+bx+c $(a\neq 0,\Delta\geq 0)$ în produs de factori: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$.

Relaţiile lui Viète. Fie x_1,x_2 soluţiile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0,\Delta\geq 0)$.
Notăm: $S=x_1+x_2$, $P=x_1\cdot x_2$. Atunci $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ şi $P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.
Avem, de asemenea, $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$.

Formarea unei ecuaţii de gradul al doilea, când i se cunosc soluţiile

Se dau $x_1,x_2\in\mathbb{R}$; se calculează $S=x_1+x_2$ şi $P=x_1\cdot x_2$. Atunci o ecuaţie de gradul al doilea care are soluţiile x_1 şi x_2 va fi: $x^2-Sx+P=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Determinarea naturii şi a semnelor soluţiilor unei ecuaţii de gradul al doilea

Fie x_1, x_2 soluţiile reale ale ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0, \Delta\geq 0)$ şi fie $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ relaţiile lui Viète corespunzătoare. Atunci:

semnul lui Δ	semnul lui P	semnul lui S	natura şi semnele soluţiilor ecuaţiei
+	+	+	$x_1\neq x_2,\ x_1, x_2>0$
+	+	-	$x_1\neq x_2,\ x_1, x_2<0$
+	-	+	$x_1\neq x_2,\ x_1<0, x_2>0$ şi $\lvert x_1\rvert=-x_1<x_2$
+	-	-	$x_1\neq x_2,\ x_1<0, x_2>0$ şi $\lvert x_1\rvert=-x_1>x_2$
+	0	+	$x_1\neq x_2,\ x_1=0, x_2>0$
+	0	-	$x_1\neq x_2,\ x_1=0, x_2<0$
+	-	0	$x_1\neq x_2,\ x_1<0, x_2>0$ şi $x_1=-x_2$
0	+	+	$x_1=x_2>0$
0	+	-	$x_1=x_2<0$
0	0	0	$x_1=x_2=0$

Exemple:

1. Ecuaţia $\left(m-m^2\right)x+3m^2-m-2=0$:

   a. are, pentru $\begin{cases} m-m^2=0 \\ 3m^2-m-2=0 \end{cases} \Big| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m=1$, o infinitate de soluţii;

   b. pentru $\begin{cases} m-m^2=0 \\ 3m^2-m-2\neq 0 \end{cases} \Big| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m=0$, nu are soluţii;

   c. are, pentru $m-m^2\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, soluţia unică $x=\frac{3m+2}{m}$.

2. Se consideră ecuaţia $x^2+(3m+1)x+m+2=0,\ m\in\mathbb{R}$. Atunci:

   a. ecuaţia are soluţii reale $\Leftrightarrow \Delta=9m^2+2m-7\geq 0 \Leftrightarrow \in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{7}{9},\infty\right)$;

   b. ecuaţia are soluţii egale $\Leftrightarrow \Delta=9m^2+2m-7=0 \Leftrightarrow m\in\left\{-1,\frac{7}{9}\right\}$;

c. ecuaţia are soluţii pozitive $\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta \geq 0\\ P \geq 0\\ S \geq 0\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m \in [-2,-1]$;

d. ecuaţia are soluţii negative $\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta \geq 0\\ P \geq 0\\ S \leq 0\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m \in \left[\frac{7}{9},\infty\right)$;

e. ecuaţia are soluţii de semne contrare $\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta > 0\\ P < 0\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m \in (-\infty,-2)$;

f. ecuaţia are soluţii de acelaşi semn $\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta > 0\\ P > 0\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m \in (-2,-1) \cup \left(\frac{7}{9},\infty\right)$;

g. ecuaţia are soluţii opuse $\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta \geq 0\\ S = 0\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m \in \varnothing$;

h. ecuaţia are soluţii inverse $\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta \geq 0\\ P = 1\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m = -3$;

i. soluţiile x_1, x_2 ale ecuaţiei verifică $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta \geq 0\\ \frac{S}{P} = -\frac{4}{3}\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m = 1$;

j. soluţiile x_1, x_2 ale ecuaţiei verifică relaţia $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta \geq 0\\ \frac{S^2-2P}{P} = \frac{10}{3}\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m \in \left\{-\frac{29}{27},1\right\};$$

k. soluţiile x_1, x_2 verifică: $x_2 = 3x_1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta \geq 0\\ x_2 = 3x_1\\ x_1+x_2 = -3m-1\\ x_1 \cdot x_2 = m+2\end{matrix}\right| \overset{"\cap"}{\Rightarrow} m \in \left\{-\frac{29}{27},1\right\}$.

3. Simplificaţi fracţia $\frac{2x^2-3x-5}{3x^2+4x-7}$. Avem $\frac{2x^2-3x-5}{3x^2+4x+1} = \frac{2(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{2x-5}{3x+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Scrieţi o ecuaţie de gradul al doilea cu soluţiile $x_1 = 2$ şi $x_2 = -3$. Avem $S = -1$ şi $P = 2 \cdot (-3) = -6$. O ecuaţie va fi: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$.

5. Rezolvaţi ecuaţiile:

   a. $|2x-1| = 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm 5 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}$;

   b. $|x^2 - x - 1| = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = \pm 1 \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1, 2\}$;

   c. $\left|\frac{x^2+1}{3x-1}\right| = |3-x|$. Avem $x \neq \frac{1}{3}$ şi ecuaţia devine $\frac{x^2+1}{3x-1} = \pm(3-x)$; din cele două ecuaţii obţinem soluţiile: $x \in \left\{2, \frac{1}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$.

Elemente de logică matematică

Fie propoziţiile p şi q. Avem următoarele tabele de adevăr pentru următoarele operaţii logice: ***negaţie, conjuncţie, disjuncţie, implicaţie şi echivalenţă***:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Au loc, de asemenea:

Legea dublei negaţii: $p \leftrightarrow \overline{\overline{p}}$

Legea terţului exclus: propoziţia $p \vee \overline{p}$ este adevărată.

Metoda reducerii la absurd. Fie p, q propoziţii. Avem $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$.

Inducţia matematică

Fie $P(n)$ o propoziţie care depinde de un număr natural $n \geq m$, unde m este un număr natural fixat.

Demonstraţia prin metoda inducţiei matematice a propoziţiei $P(n)$ se realizează în două etape:

1) Se verifică mai întâi că propoziţia $P(m)$ este adevărată.
2) Se presupune că propoziţia $P(k)$ este adevărată şi se demonstrează că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată, unde $k \geq m$ este un număr natural.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ambele etape ale demonstraţiei sunt verificate, atunci propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq m$.

Exemple

1. Să se demonstreze că $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, pentru orice număr natural nenul.
2. Să se arate că $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2n^2+3n}{4}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, avem $9^{n+1}-8n-9$ este divizibil cu 16.

1. Notăm cu $P(n)$ egalitatea din enunţ.

   1) Verificăm că propoziţia $P(1)$ este adevărată, adică $1\cdot 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$, ceea ce înseamnă $2=2$.

   2) Pentru $k\in\mathbb{N}^*$, presupunem că propoziţia $P(k)$ este adevărată. Arătăm că propoziţia

   $$P(k+1):1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

   este adevărată. Avem

   $$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=$$
   $$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n.

2. Notăm cu $P(n)$ inegalitatea din enunţ.

   1) Verificăm că propoziţia $P(1)$ este adevărată, adică $1<\frac{5}{4}$.

   2) Pentru $k\in\mathbb{N}^*$, presupunem că propoziţia $P(k)$ este adevărată. Arătăm că propoziţia $P(k+1):1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}<\frac{2(k+1)^2+3(k+1)}{4}$ este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

Adunăm în ambii membri ai inegalităţii $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}<\frac{2k^2+3k}{4}$ termenul $\sqrt{k+1}$ şi obţinem $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}<\frac{2k^2+3k}{4}+\sqrt{k+1}$. Dacă am arăta că

$$\frac{2k^2+3k}{4}+\sqrt{k+1}<\frac{2(k+1)^2+3(k+1)}{4}, \qquad (1)$$

atunci am obţine că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

Inegalitatea (1) este echivalentă cu $2k^2+3k+4\sqrt{k+1}<2k^2+7k+5$, adică $4\sqrt{k+1}<4k+5$. Prin ridicare la pătrat se obţine $16k+16<16k^2+40k+25$, ceea ce este echivalent cu $(4k+3)^2>0$. Această ultimă inegalitate are loc pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n.

3. Notăm cu $P(n):16\,|\,9^{n+1}-8n-9$ pentru $n\in\mathbb{N}$.

   1) Verificăm că propoziţia $P(0)$ este adevărată, adică $16\,|\,9^{0+1}-8\cdot 0-9$, adică $16\,|\,0$.

   2) Pentru $k\in\mathbb{N}$, presupunem că propoziţia $P(k)$ este adevărată. Arătăm că propoziţia $P(k+1):16\,|\,9^{k+2}-8(k+1)-9$ este adevărată.

Notăm cu $E(k)=9^{k+1}-8k-9$. Vom exprima $E(k+1)$ în funcţie de $E(k)$. Avem $E(k+1)=9^{k+2}-8(k+1)-9=9\cdot 9^{k+1}-8k-8-9=9^{k+1}-8k-9+8\cdot 9^{k+1}-8$, de unde rezultă că $E(k+1)=E(k)+8\left(9^{k+1}-1\right)$.

Vom arăta că $9^{k+1}-1$ este un număr par pentru orice $k\in\mathbb{N}$. Într-adevăr, ultima cifră a numărului 9^{k+1} este $u\left(9^{k+1}\right)\in\{1;9\}$. Atunci $u\left(9^{k+1}-1\right)\in\{0;8\}$, de unde se obţine că $9^{k+1}-1$ este un număr par pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

Putem astfel să afirmăm că $E(k+1)$ este egal cu suma a doi termeni divizibili cu 16, de unde rezultă că $16\,|\,9^{k+2}-8(k+1)-9$, ceea ce înseamnă că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

Scanned with OKEN Scanner

Mulţimi

Fie A, B mulţimi incluse într-o mulţime ***de referinţă*** (numită şi ***totală***) T.

Pe mulţimea totală T se definesc următoarele:

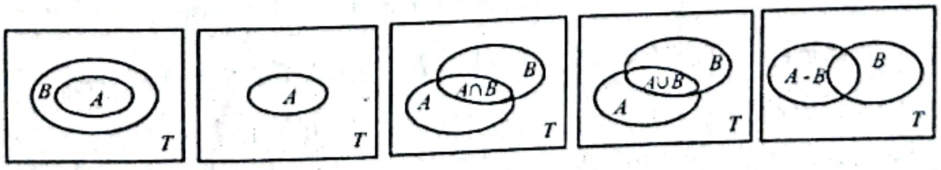
	Denumire	Simbol	Definiţie
RELAŢII	egalitate	$=$	$A=B \Leftrightarrow (\forall x\in A \Rightarrow x\in B)\wedge(\forall x\in B\Rightarrow x\in A)$
	incluziune	$\subset$	$A\subset B \Leftrightarrow \forall x\in A\Rightarrow x\in B$
OPERAŢII	complementara	C	$\overline{A}=C_T A=T-A=\{x\mid (x\in T)\wedge(x\notin A)\}$
	reuniune	$\cup$	$A\cup B=\{x\mid x\in T,\ (x\in A)\vee(x\in B)\}$
	intersecţie	$\cap$	$A\cap B=\{x\mid x\in T,\ (x\in A)\wedge(x\in B)\}$
	diferenţă	$-$	$A-B=\{x\mid x\in T,\ (x\in A)\wedge(x\notin B)\}$
	produs cartezian	$\times$	$A\times B=\{(x,y)\mid (x\in A)\wedge(y\in B)\}$

Dacă A este mulţime finită, se notează cu $|A|$ sau $\operatorname{card} A$ (***cardinalul*** lui A) numărul elementelor sale.

Mulţimea tuturor submulţimilor mulţimii A se notează cu $\mathcal{P}(A)$ şi se numeşte ***mulţimea părţilor lui*** A. Avem $\mathcal{P}(A)=\{X\mid X\subset A\}$. Atunci:

1. $|\mathcal{P}(A)|=2^{\operatorname{card} A}=2^{|A|}$.
2. $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.
3. $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ (***principiul includerii şi excluderii***, dacă $n=2$).
4. $|A\cup B|=|A|+|B-A|=|B|+|A-B|=|A-B|+|A\cap B|+|B-A|$.
5. $|A|=|A-B|+|A\cap B|$ şi $|B|=|B-A|+|A\cap B|$.

Exemple:



1. Se consideră mulţimile $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2<5\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid \frac{6}{x^2-x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$, $C=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 2\}$ şi $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x^3+x^2-2x=0\}$. Arătaţi că:

Scanned with OKEN Scanner

a. $B \subset A$;

b. $A = C$;

c. $B \cup D = A$;

d. $C_D B \cap C \neq \varnothing$.

Avem că $x^2 < 5 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \cap \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{-2,-1,0,1,2\}$; $\frac{6}{x^2 - x + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x + 1 \mid 6 \Rightarrow x^2 - x + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\} \Rightarrow B = \{-1,0,1,2\}$; de asemenea

$|x| \leq 2 \Rightarrow x \in [-2,2] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow C = \{-2,-1,0,1,2\}$ şi $x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow D = \{-2,0,1\}$. Cele 4 cerinţe devin acum imediate.

2. Fie mulţimile $A = \{0,1,2\}$ şi $B = \{-1,0\}$.

a. Scrieţi toate submulţimile mulţimii B.

b. Determinaţi mulţimea $A \times B$ şi calculaţi $\text{card}(A \times B)$.

c. Verificaţi că $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

d. Calculaţi numărul tuturor submulţimilor mulţimii A.

a. Mulţimea părţilor lui B este $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{0\}, \{-1,0\}\}$.

b. $A \times B = \{(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(2,-1),(2,0)\} \Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B| = 6$.

c. Avem $A \cup B = \{-1,0,1,2\} \Rightarrow |A \cup B| = 4$; $A \cap B = \{0\} \Rightarrow |A \cap B| = 1$ şi cum $|A| = 3$ şi $|B| = 2$, rezultă că $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4$.

d. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{\text{card}\, A} = 2^{|A|} = 2^3 = 8$.

3. Într-o clasă de 28 de elevi, 15 elevi dintre ei au ca pasiune matematica, iar 18 îndrăgesc limba engleză.

a. Câtor elevi le plac ambele discipline ?

b. Determinaţi numărul elevilor pasionaţi doar de matematică ?

Dacă notăm cu A mulţimea elevilor care îndrăgesc matematica şi cu B mulţimea celor pasionaţi de limba engleză, conform enunţului, vom avea $|A| = 15$, $|B| = 17$ şi $|A \cup B| = 28$. Cum $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, obţinem că $|A \cap B| = 15 + 17 - 28 = 4$ elevi îndrăgesc ambele discipline. Numărul elevilor pasionaţi doar de matematică va fi cardinalul mulţimii $A - B$, adică $|A - B| = |A| - |A \cap B| = 11$.

Scanned with OKEN Scanner

Şiruri. Progresii

Fie $k \in \mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}_k = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq k \}$. Orice funcţie $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, $n \geq k$, se numeşte ***şir*** de ***termen general*** a_n (sau ***termen de rang*** n). De regulă $k = 0$ sau $k = 1$. În cele ce urmează vom considera $k = 1$ şi vom nota şirul prin $(a_n)_{n \geq 1}$. Mulţimea $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ reprezintă mulţimea termenilor şirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

Notăm cu $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ ***suma primilor*** n ***termeni ai şirului*** $(a_n)_{n \geq 1}$. Atunci $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$; deci $a_n = S_n - S_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Progresia aritmetică este un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ care are proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obţine din precedentul termen (ca rang), prin adunarea unui număr constant numit ***raţia progresiei*** (notată cu r). Se notează $a_n \div$.

Progresia geometrică este un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ care are proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obţine din precedentul termen (ca rang), prin înmulţirea cu un număr constant numit ***raţia progresiei*** (notată cu q). Se notează $a_n \div\div$.

<table>
<tr><th>Progresie</th><th>Formula termenului general</th><th>Suma primilor n termeni ai progresiei</th><th>Condiţii necesare şi suficiente pentru ca $(a_n)_{n \geq 1}$ să fie progresie</th></tr>
<tr><td rowspan="4">aritmetică</td><td rowspan="2">$a_n = a_{n-1} + r$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$</td><td rowspan="2">$S_n = \dfrac{n(2a_1 + (n-1)r)}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$</td><td>$a_{n+1} - a_n = \text{const}\,(= r)$, $n \in \mathbb{N}^*$</td></tr>
<tr><td>$a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_n = a_1 + (n-1)r$, $n \in \mathbb{N}^*$</td><td rowspan="2">$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$</td><td>$a_n = \alpha n + \beta$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $r = \alpha$</td></tr>
<tr><td>$S_n = \gamma n^2 + \delta n$, $n \in \mathbb{N}^*$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">geometrică</td><td>$a_n = a_{n-1} \cdot q$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$</td><td rowspan="3">$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}$</td><td>$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \text{const}\,(= q)$, $n \in \mathbb{N}^*$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$</td><td>$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ sau, pentru $a_n \geq 0$: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$</td></tr>
<tr><td>$S_n = \alpha q^n - \alpha$, $n \in \mathbb{N}^*$</td></tr>
</table>

Scanned with OKEN Scanner

Exemple:

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, pentru care $S_n = 2n^2 - 3n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Determinaţi termenul general al şirului.

   b. Demonstraţi că $a_n \div$.

   c. Aflaţi primul termen şi raţia progresiei.

   d. Calculaţi a_{2010} şi S_{20}.

   a. Pentru $n \geq 2$ avem $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 3n - \left(2(n-1)^2 - 3(n-1)\right) = 4n - 5$, iar pentru $n = 1$ în relaţia din ipoteză $S_n = 2n^2 - 3n$ obţinem $S_1 = a_1 = -1$. Deci $a_n = 4n - 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

   b. Cum $a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 5 - (4n-5) = 4$, rezultă că $a_n \div$, de raţie $r = 4$.

   c. Deoarece $a_n = 4n - 5, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 3$ şi raţia va fi: $r = a_2 - a_1 = 4$.

   d. Avem $a_{2010} = 4 \cdot 2010 - 5 = 8035$ sau $a_{2010} = a_1 + (2010-1)r = -1 + 4 \cdot 2010 = 8035$ şi $S_{20} = \dfrac{20(2a_1 + 19r)}{2} = 740$.

2. Fie $a_n \div$, în care $a_5 + a_8 = 28$ şi $S_{10} = 120$. Determinaţi a_{2010} şi calculaţi S_{50}.

   Avem $\begin{cases} a_5 + a_8 = 28 \\ S_{10} = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 11r = 28 \\ \dfrac{10(2a_1 + 9r)}{2} = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$. Deci $a_{2010} = a_1 + 2009r = 4021$ şi $S_{50} = \dfrac{50(2a_1 + 49r)}{2} = 2600$.

3. Determinaţi $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ astfel încât $2x - 5, \dfrac{4}{x-2}$ şi $3x - 2$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

   Avem: $2x - 5, \dfrac{4}{x-2}, 3x - 2 \div \Leftrightarrow \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{(2x-5) + (3x-2)}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{3, \dfrac{2}{5}\right\}$.

4. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $1 + 13 + 25 + \ldots + x = 550$.

   Termenii sumei din membrul stâng sunt termenii unei progresii aritmetice de raţie $r = 12$. Avem $a_1 = 1, a_2 = 13, \ldots, a_n = x$; deoarece $a_n = a_1 + (n-1)r$, obţinem

Scanned with OKEN Scanner

$x=12n-11$. Pe de altă parte însă, conform enunţului, avem că $S_n=550\Rightarrow\frac{n(a_1+a_n)}{2}=550\Rightarrow 6n^2-5n-550=0\overset{n\in\mathbb{N}}{\Rightarrow}n=10\Rightarrow x=109$.

5. Arătaţi că numărul $a=\sqrt{1+3+5+\ldots+2011}$ este natural.

Se observă că termenii sumei de sub radical sunt termenii unei progresii aritmetice de raţie $r=2$. Avem $a_1=1, a_2=3,\ldots,a_n=2011$; deoarece $a_n=a_1+(n-1)r$, obţinem $n=1006$. Deci suma de sub radical este suma primilor 1006 termeni ai progresiei; aşadar $a=\sqrt{S_{1006}}=\sqrt{\frac{1006(a_1+a_{1006})}{2}}=\sqrt{\frac{1006\cdot 2012}{2}}=1006\in\mathbb{N}$.

6. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1+b_2+b_3=b_4-b_1=14$. Determinaţi primul termen, raţia, termenul general al progresiei şi calculaţi suma primilor 10 termeni.

Avem $\begin{cases}b_1+b_2+b_3=14\\ b_4-b_1=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1(1+q+q^2)=14\\ b_1(q^3-1)=14\end{cases}$. Împărţind cele două ecuaţii obţinem $q-1=1\Rightarrow q=2$. Deci $b_1(2^3-1)=14\Rightarrow b_1=2$. Aşadar $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2^n, n\in\mathbb{N}^*$ şi $S_{10}=b_1\frac{q^{10}-1}{q-1}=2046$.

7. Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $x+1, 5x+1$ şi $7x+11$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

$x+1, 5x+1, 7x+11\overset{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\Leftrightarrow(5x+1)^2=(x+1)(7x+11)\Leftrightarrow 9x^2-4x-5=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{5}{4},1\right\}$

8. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, pentru care $S_n=2\cdot 3^n-2$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

a. Determinaţi termenul general al şirului.

b. Demonstraţi că $a_n\overset{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$.

c. Aflaţi primul termen şi raţia progresiei.

d. Calculaţi a_5 şi S_{10}.

a. Pentru $n\geq 2$ avem $a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot 3^n-2-(2\cdot 3^{n-1}-2)=4\cdot 3^{n-1}$, iar pentru $n=1$ în relaţia din ipoteză $S_n=2\cdot 3^n-2$ obţinem $S_1=a_1=4$. Deci $a_n=4\cdot 3^{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

b. Cum $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$, rezultă că $a_n \vdots$, de raţie $q=3$.

c. Deoarece $a_n=4\cdot 3^{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_1=4, a_2=12$ şi raţia va fi: $q=\frac{a_2}{a_1}=3$.

d. Avem $a_5=4\cdot 3^{5-1}=324$ şi $S_{10}=a_1\frac{q^{10}-1}{q-1}=2\left(3^{10}-1\right)$.

9. Calculaţi suma $s=1+2^3+2^6+\ldots+2^{2010}$.

Se observă că termenii sumei sunt termenii unei progresii geometrice de raţie $q=2^3$. Avem $a_1=1, a_2=2^3, a_3=2^6, \ldots, a_n=2^{2010}$; deoarece $a_n=a_1\cdot q^{n-1}, n\in\mathbb{N}^*$, obţinem $\left(2^3\right)^{n-1}=2^{2010}\Rightarrow n=671$. Deci suma de calculat este suma primilor 671 termeni ai progresiei; aşadar $s=S_{671}=a_1\cdot\frac{q^{671}-1}{q-1}=\frac{2^{2013}-1}{7}$.

10. Rezolvaţi ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, cu $a\neq 0$ şi $a,b,c \vdots$ ştiind că are soluţii reale.

Avem $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ b^2=ac\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3b^2\geq 0\\ b^2=ac\end{cases}\Rightarrow b=0$; cum $b^2=ac$ şi $a\neq 0$, obţinem $c=0$.

Aşadar ecuaţia devine $ax^2=0\Rightarrow x_1=x_2=0$.

Funcţii

Dacă A şi B sunt mulţimi nevide, numim ***funcţie definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B*** orice triplet (f,A,B), unde f este o ***lege de corespondenţă*** (***procedeu***) care face ca fiecărui element $x\in A$ să îi corespundă un unic element $y\in B$; notăm $f:A\to B$.

Altfel spus $f:A\to B$ este funcţie $\Leftrightarrow \forall x\in A, \exists!\, y\in B$ astfel încât $f(x)=y$.

Observaţii:

1. mulţimea A se numeşte ***domeniu de definiţie***, iar mulţimea B se numeşte ***domeniu de valori*** sau **codomeniu**;
2. elementul $y\in B$ se numeşte ***imaginea elementului*** $x\in A$ prin intermediul funcţiei f;
3. egalitatea $y=f(x)$, valabilă pentru fiecare $x\in A$ se numeşte ***ecuaţie funcţională***.

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea a două funcţii

Două funcţii $f:A\to B$ şi $g:C\to D$ se numesc ***egale*** $\Leftrightarrow\begin{cases}A=C\\B=D\\f(x)=g(x),\forall x\in A\end{cases}$.

Exemplu:

1. Se consideră funcţiile $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2010}|x|$ şi $g:\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^2\le 1\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

a. Determinaţi imaginea elementului $x=-1$ prin intermediul funcţiei f.

b. Arătaţi că $f=g$.

Avem $f(-1)=(-1)^{2010}\cdot|-1|=1$. Dacă $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^2\le 1\}$, atunci $A=\{-1,0,1\}$; cum $f(-1)=g(-1)=f(1)=f(1)=1$ şi $f(0)=g(0)=0$, rezultă, de aici, că $f(x)=g(x),\forall x\in A$, adică $f=g$, câtă vreme au acelaşi domeniu de definiţie, acelaşi codomeniu şi în plus $f(x)=g(x),\forall x\in A$.

Reper cartezian în plan. Graficul unei funcţii. Intersecţiile graficului unei funcţii cu axele de coordonate

Axa reprezintă o dreaptă din plan pe care s-au fixat o ***origine***, un ***sens*** şi o ***unitate de măsură***.

Sistemul format din două axe ortogonale (perpendiculare) Ox şi Oy, care au aceeaşi origine (punctul O) se numeşte ***reper cartezian în plan*** şi se notează cu xOy.

Oricărui punct M din planul $\mathcal{P}$ i se asociază unica pereche $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, unde x desemnează coordonata proiecţiei punctului M pe axa Ox, iar y reprezintă coordonata proiecţiei punctului M pe axa Oy;

$Ox=\{M(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ se numeşte ***axa absciselor***;

$Oy=\{M(0,y)\,|\,y\in\mathbb{R}\}$ se numeşte ***axa ordonatelor***.

Cele două axe împart planul în patru regiuni, numite ***cadrane***:

$C_I=\{M(x,y)\,|\,x>0,y>0\}$, $C_{II}=\{M(x,y)\,|\,x<0,y>0\}$,

$C_{III}=\{M(x,y)\,|\,x<0,y<0\}$ şi $C_{IV}=\{M(x,y)\,|\,x>0,y<0\}$.

Dreptele în plan se împart în trei categorii:

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

- ***orizontale*** (paralele cu axa Ox); acestea au ca ecuaţii $d: y = a,\ a \in \mathbb{R}$;
- ***verticale*** (paralele cu axa Oy); acestea au ca ecuaţii $d: x = b,\ b \in \mathbb{R}$;
- ***oarecare*** sau ***oblice*** (cele care nu sunt paralele nici cu axa Ox, nici cu axa Oy); acestea au ca ecuaţii $d: y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R},\ m \neq 0$.

Graficul unei funcţii $f: A \to B$ reprezintă submulţimea produsului cartezian $A \times B$, definită prin $\mathcal{G}_f = \left\{ M\left(x, f(x)\right) \middle| x \in A \right\} \subset A \times B$.

Observaţie:

Un punct $M(x_0, y_0)$ aparţine graficului unei funcţii $f: A \to B \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in A \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$.

Intersecţiile graficului unei funcţii cu axele de coordonate

Fie $f: A \to B$ o funcţie numerică ($A, B \subset \mathbb{R}$). Atunci:

$\mathcal{G}_f \cap Ox = \left\{ A_i(x_i, 0) \middle| x_i \in A,\ f(x_i) = 0,\ i \in \overline{1,n} \right\}$.

$\mathcal{G}_f \cap Oy = B\left(0, f(0)\right)$, dacă $x = 0 \in A$.

Imaginea unei funcţii (mulţimea valorilor unei funcţii)

Dacă $f: A \to B$ este o funcţie, atunci mulţimea $\left\{ f(x) \middle| x \in A \right\} \subset B$ se numeşte ***imaginea funcţiei*** f (sau ***mulţimea valorilor funcţiei***) şi se notează cu $\operatorname{Im} f$, sau $f(A)$. Deci $\operatorname{Im} f = f(A) = \left\{ f(x) \middle| x \in A \right\} \subset B$.

Operaţii cu funcţii

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ două funcţii numerice. Atunci:

Operaţii algebrice	Denumirea operaţiei	Notaţie	Domeniul de definiţie	Definiţia operaţiei
	adunarea	$f+g$	D	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
	înmulţirea	$f \cdot g$	D	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
	câtul	$\frac{f}{g}$	$D \setminus \left\{ x \in D \middle| g(x) = 0 \right\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Operaţia de compunere a funcţiilor

Fie funcţiile $f: A \to B$ şi $g: B \to C$. Funcţia $g \circ f: A \to C$, definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in A$ se numeşte ***compusa lui g cu f***.

Exemple:

1. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-2|$ şi $g(x)=x+1$.

   a. Determinaţi funcţiile $f+g, f-g, f\cdot g, \frac{f}{g}$.

   b. Rezolvaţi ecuaţia $f(x)\cdot g(x)+1=f(x)+g(x)$.

   c. Determinaţi funcţiile $f\circ g$ şi $g\circ f$.

   d. Aflaţi punctele de intersecţie cu axele de coordonate ale graficului funcţiei f.

   e. Determinaţi imaginea funcţiei $g\circ f$.

   f. Calculaţi $f(g(-2010))\cdot f(g(-2009))\cdot\ldots\cdot f(g(-1))\cdot f(g(0))\cdot\ldots\cdot f(g(2010))$.

   g. Calculaţi $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de 2010 ori}}(0)$.

   a. Avem $f+g, f-g, f\cdot g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, definite prin:

x	$-\infty$	2	∞
$f(x)$	$-x+2$	$x-2$	
$g(x)$	$x+1$	$x+1$	
$(f+g)(x)$	3	$2x-1$	
$(f-g)(x)$	$-2x+1$	-3	
$(f\cdot g)(x)$	$-x^2+x+2$	x^2-x-2	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{-x+2}{x+1}$	$\frac{x-2}{x+1}$	

   b. Pentru $x\geq 2$, $f(x)=x-2$; ecuaţia devine $(x-2)(x+1)+1=(x-2)+(x+1)\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-3x=0\overset{x\geq 2}{\Rightarrow}x=3$. Pentru $x<2\Rightarrow f(x)=-x+2$ şi ecuaţia va fi: $(-x+2)(x+1)+1=(-x+2)+(x+1)\Rightarrow -x^2+x=0\Rightarrow x\in\{0,1\}$. Aşadar $x\in\{0,1,3\}$.

Scanned with OKEN Scanner

c. Cum $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \\ -x+2, & x<2 \end{cases}$, obţinem:

$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\begin{cases} g(x)-2, & g(x)\geq 2 \\ -g(x)+2, & g(x)<2 \end{cases}=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$ şi

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=f(x)+1=\begin{cases} x-1, & x\geq 2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$.

c. $\mathcal{G}_f\cap Ox=A(x,0)\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow |x-2|=0\Rightarrow x=2$. Deci $\mathcal{G}_f\cap Ox=A(2,0)$;

$\mathcal{G}_f\cap Oy=B\big(0,f(0)\big)$; cum $f(0)=|0-2|=2\Rightarrow \mathcal{G}_f\cap Oy=B(0,2)$.

e. Dacă $x\geq 2\Rightarrow x-1\geq 1\Rightarrow (g\circ f)(x)\geq 1$ şi $x<2\Rightarrow -x+3>1\Rightarrow (g\circ f)(x)>1$.

Deci $\operatorname{Im}(g\circ f)=(g\circ f)(\mathbb{R})=(g\circ f)\big((-\infty,1)\big)\cup(g\circ f)\big([1,\infty)\big)=[1,\infty)\cup(1,\infty)=[1,\infty)$.

f. Deoarece $f\big(g(1)\big)=0$ rezultă că tot produsul are valoarea egală cu 0.

g. Avem succesiv: $f(0)=2$, $f\big(f(0)\big)=f(2)=0$, $f\big(f\big(f(0)\big)\big)=f(0)=2,\ldots$.

Aşadar $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(0)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 2, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$. Prin urmare $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de 2010 ori}}(0)=0$.

Funcţii monotone. Modalităţi de studiu a monotoniei

O funcţie numerică $f:D\to\mathbb{R}$ se numeşte:

a. ***monoton crescătoare*** (***crescătoare***) $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in D$ cu $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$;

b. ***monoton descrescătoare*** (***descrescătoare***) $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in D$ cu $x_1<x_2\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$.

Modalităţi de studiu a monotoniei unei funcţii:

a. utilizând definiţia;

b. folosind ***raportul de variaţie*** (***rata creşterii / descreşterii***), adică semnul raportului $R(x_1,x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

Funcţia de gradul I

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ se numeşte ***funcţie afină***.

Funcţia afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ se numeşte ***funcţie de gradul I***.

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia de gradul I $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}^*$ se numeşte ***funcţie liniară.***

Funcţia afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=b,\ b\in\mathbb{R}$ se numeşte ***funcţie constantă.***

Observaţie

Graficul unei funcţii afine este o ***dreaptă,*** de ecuaţie $d: y=ax+b$.

a. graficul unei funcţii constante este o dreaptă orizontală $(\parallel Ox)$, de ecuaţie $y=b$.

b. graficul unei funcţii liniare trece prin originea reperului xOy: $O(0,0)\in d: y=ax$.

Intersecţiile graficului funcţiei de gradul I cu axele de coordonate

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$ este o funcţie de gradul I, atunci dreapta $d: y=ax+b$, ce constituie reprezentarea grafică a funcţiei f intersectează axele de coordonate în:

a. $\mathcal{G}_f\cap Ox=A\left(-\frac{b}{a},0\right)$, pentru că $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$;

b. $\mathcal{G}_f\cap Oy=B(0,b)$, pentru că $f(0)=b$.

Semnul funcţiei de gradul I

Semnul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$ este ilustrat în următorul tabel

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞
$f(x)$	semn opus lui a	0	semnul lui a

Inecuaţii de forma $ax+b\leq 0\ (\geq,<,>)$, ***unde*** $a,b\in\mathbb{R}$

Mulţimea soluţiilor inecuaţia $ax+b\leq 0$ este discutată mai jos, în funcţie de valorile lui $a,b\in\mathbb{R}$:

Semnele lui a şi b		Mulţimea soluţiilor
$a=0$	$b\leq 0$	$x\in\mathbb{R}$
	$b>0$	$x\in\varnothing$
$a>0$	$b\in\mathbb{R}$	$x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$

Scanned with OKEN Scanner

$a<0$	$b\in\mathbb{R}$	$x\in\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$

Poziţii relative a două drepte

Sisteme de ecuaţii de forma $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, ***unde*** $a,b,c,m,n,p\in\mathbb{R}$.

Punctele de intersecţie a graficelor a două funcţii afine

Considerăm funcţiile afine $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\alpha x+\beta$ şi $g(x)=\gamma x+\delta$, unde $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

Dacă $b\neq 0$ şi $n\neq 0$, atunci sistemul (S) devine $\begin{cases} y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \\ y=-\frac{m}{n}x+\frac{p}{n} \end{cases}$ şi atunci, alegând $\alpha=-\frac{a}{b}$, $\beta=\frac{c}{b}$, $\gamma=-\frac{m}{n}$ şi $\delta=\frac{p}{n}$, soluţiile sistemului (S) vor fi coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor celor 2 funcţii; ţinând cont că aceste reprezentări grafice sunt drepte, ele pot avea în comun un punct, o infinitate de puncte sau niciunul, caz în care sistemul este ***compatibil determinat*** (având ***soluţie unică***), ***compatibil nedeterminat*** (având o ***infinitate de soluţii***) sau ***incompatibil*** (fără soluţii).

- Dacă $b=0$ şi $a\neq 0$, respectiv $n=0$ şi $m\neq 0$, atunci sistemul (S) poate fi rescris sub forma $\begin{cases} x=-\frac{c}{a} \\ x=-\frac{p}{m} \end{cases}$, aceste egalităţi reprezentând ecuaţiile a două drepte verticale şi prin urmare putem avea o infinitate de soluţii, dacă $-\frac{c}{a}=-\frac{p}{m}$ sau nicio soluţie, dacă $-\frac{c}{a}\neq-\frac{p}{m}$.

În concluzie rezolvarea sistemului (S), realizată prin ***metoda reducerii***, sau cea a ***substituţiei***, este echivalentă cu determinarea punctelor de intersecţie a graficelor celor două funcţii afine.

Exemple:

1. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ este:

Scanned with OKEN Scanner

a. crescătoare $\Leftrightarrow a>0$;

b. descrescătoare $\Leftrightarrow a<0$.

a. Pentru $a>0$, avem: $x_1<x_2 \mid \cdot a \Rightarrow ax_1<ax_2 \mid +b \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

b. Pentru $a<0$ obţinem $x_1<x_2 \mid \cdot a \Rightarrow ax_1>ax_2 \mid +b \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$.

Sau, utilizând semnul raportului $R(x_1,x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2}=$

$=\dfrac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=a$, obţinem că $\operatorname{sgn}\left(R(x_1,x_2)\right)=\operatorname{sgn} a$, unde $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ este

semnul numărului real x.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1\\ (m+2)x-1, & x>1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

a. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie descrescătoare pe intervalul $[1,\infty)$;

b. Aflaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel ca funcţia f să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

a. Este necesar ca $m+2\le 0\Leftrightarrow m\in(-\infty,-2]$.

b. Trebuie ca şi a doua ramură să fie crescătoare (ca şi prima), iar capătul semidreptei ce constituie graficul celei de-a doua ramuri să fie „mai sus" decât cel al semidreptei corespunzătoare primei ramuri, adică:

c. $\begin{cases}m+2\ge 0\\ l_s(1)\le l_d(1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\in(-\infty,-2]\\ 3\le m+1\end{cases}\Rightarrow m\ge 2$.

3. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul $A(-1,-1)$ aparţine funcţiei crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a^2-2)x+a-1$.

Ţinând seama de cerinţă se impun condiţiile:

$\begin{cases}a^2-2\ge 0\\ f(-1)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-2\ge 0\\ a^2-a-2=0\end{cases}\Rightarrow a=2$.

3. Se consideră funcţia afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-1)x+m-m^2$, $m\in\mathbb{R}$.

a. Pentru ce valoare a lui m funcţia f este de gradul întâi ?

b. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie liniară ?

c. Aflaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1,1)$ aparţine graficului funcţiei f.

Scanned with OKEN Scanner

d. Poate intersecta graficul funcţiei f axa Ox în punctul de abscisă $x_0 = \frac{2}{3}$?

e. Ce valori poate lua $m \in \mathbb{R}$ astfel încât aria triunghiului determinat de originea reperului xOy şi cele două puncte de intersecţie cu axele de coordonate ale graficului funcţiei f să fie egală cu $\frac{m^2}{6}$.

f. Rezolvaţi inecuaţia $f(x) \le 0$.

a. Funcţia f este de gradul întâi $\Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

b. Este necesar ca $\left.\begin{cases} m^2 - 1 \neq 0 \\ m - m^2 = 0 \end{cases}\right| \Rightarrow m = 0$.

c. $A(1,1) \in \mathcal{G}_f \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 + m - m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

d. Pentru ca cerinţa să fie adevărată trebuie ca $B\left(\frac{2}{3}, 0\right) \in \mathcal{G}_f \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m^2 - 1) \cdot \frac{2}{3} + m - m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1, 2\}$.

e. Este clar că $\begin{cases} m^2 - 1 \neq 0 \\ m - m^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, căci altfel funcţia f nu ar putea intersecta ambele axe în două puncte distincte. În acest caz, pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axele de coordonate sunt: $A\left(\frac{m}{m+1}, 0\right)$ şi $B(0, m - m^2)$. Deci $A = \frac{1}{2} \cdot |m - m^2| \cdot \left|\frac{m}{m+1}\right| \overset{\text{ipot.}}{=} \frac{m^2}{6}$, de unde obţinem: $\left|\frac{1-m}{m+1}\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1-m}{m+1} = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow m \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.

f. Avem $f(x) \le 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x \le m^2 - m$.

Dacă $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ obţinem:

pentru $m = 1 \Rightarrow 0 \le 0$, adevărat pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

pentru $m = -1 \Rightarrow 0 \le 2$, adevărat pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $m^2-1<0 \Leftrightarrow |m|<1 \Leftrightarrow m\in(-1,1)$, atunci inecuaţia devine $x\geq\frac{m}{m+1}$, cu soluţia $x\in\left[\frac{m}{m+1},\infty\right)$.

Dacă $m^2-1>0 \Leftrightarrow |m|>1 \Leftrightarrow m\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, atunci inecuaţia devine $x\leq\frac{m}{m+1}$, cu soluţia $x\in\left(-\infty,\frac{m}{m+1}\right]$.

4. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin $f(x)=ax+a^2$ şi $g(x)=(2a-1)x+3a-2$, unde $a\in\mathbb{R}$. În funcţie de valorile parametrului real a determinaţi punctele de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

Avem de rezolvat de fapt sistemul $\begin{cases}y=f(x)\\y=g(x)\end{cases}$. Obţinem, prin înlocuirea funcţiilor, că $(a-1)x+(-a^2+3a-2)=0$.

Dacă $a=1$ ecuaţia anterioară are o infinitate de soluţii, adică $f=g$, altfel spus dreptele ce reprezintă graficele celor două funcţii coincid; deci, în acest caz, există o infinitate de puncte de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

Dacă $a\neq 1$ obţinem $x=\frac{a^2-3a+2}{a-1}=a-2$ şi deci $y=2a(a-1)$; cu alte cuvinte $\mathcal{G}_f\cap\mathcal{G}_g=A(a-2;2a(a-1))$, adică cele două reprezentări grafice au în comun doar punctul A.

Funcţia de gradul al doilea

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ se numeşte ***funcţie de gradul al doilea.***

Forma canonică: $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Graficul funcţiei de gradul al doilea. Intersecţiile graficului cu axele de coordonate

Graficul funcţiei de gradul al doilea este o curbă, numită ***parabolă.*** Pe grafic există un unic punct în care se schimbă tipul de monotonie al funcţiei, punct numit ***vârful parabolei***, care desparte parabola în două porţiuni, numite ***ramuri.***

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Vârful parabolei are coordonatele $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Intersecţiile graficului cu axele de coordonate

$\mathcal{G}_f \cap Ox = A(x,0) \Rightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$:

a. dacă $\Delta \geq 0$, atunci parabola intersectează axa Ox în două puncte $A(x_1,0), B(x_2,0)$, unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$;

b. dacă $\Delta = 0$, atunci parabola este tangentă axei Ox în punctul $A\left(-\frac{b}{2a},0\right)$;

c. dacă $\Delta < 0$, atunci parabola nu intersectează axa Ox.

$\mathcal{G}_f \cap Oy = B(0,c)$, căci $f(0)=c$.

Axa de simetrie a parabolei

Dreapta verticală care trece prin vârful parabolei şi faţă de care cele două ramuri ale parabolei sunt simetrice una faţă de cealaltă este ***axa de simetrie a parabolei*** şi are ecuaţia $d: x=-\frac{b}{2a}$.

Intervale de monotonie. Punct de extrem. Imaginea funcţiei

Semnul lui a	Intervale de monotonie		Punctul de extrem	Valoarea extremă a funcţiei	Imaginea funcţiei
$a>0$	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$	$f\searrow$	$x_V=-\frac{b}{2a}$ este punct de minim	$f_{\min}(x)=-\frac{\Delta}{4a}$; $f(x)\geq -\frac{\Delta}{4a}, \forall x\in\mathbb{R}$	$\left[-\frac{\Delta}{4a},\infty\right)$
	$\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)$	$f\nearrow$			
$a<0$	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$	$f\nearrow$	$x_V=-\frac{b}{2a}$ este punct de maxim	$f_{\min}(x)=-\frac{\Delta}{4a}$; $f(x)\leq -\frac{\Delta}{4a}, \forall x\in\mathbb{R}$	$\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$
	$\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)$	$f\searrow$			

Scanned with OKEN Scanner

Semnul funcţiei de gradul al doilea

În funcţie de semnul lui Δ se disting următoarele situaţii:

a. $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$f(x)$	semnul lui a		0	semn opus lui a	0	semnul lui a	

b. $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		∞
$f(x)$	semnul lui a		0	semnul lui a	

c. $\Delta < 0$

x	$-\infty$		∞
$f(x)$	semnul lui a		

Formulări echivalente, din punct de vedere algebric / geometric, ale unor cerinţe referitoare la poziţia parabolei în reperul xOy

Formulare algebrică	**Formulare geometrică**	**Cond. necesare şi suficiente**
$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$	parabola nu se află sub axa Ox	$\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$
$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$	parabola nu se află deasupra axei Ox	$\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$
$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$	parabola se află deasupra axei Ox	$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$
$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$	parabola se află sub axa Ox	$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$
$f(x) = 0$ are o singură soluţie	parabola este tangentă axei Ox	$\Delta = 0$
$f(x) = 0$ nu are soluţii	parabola nu intersectează axa Ox	$\Delta < 0$
$f(x) = 0$ are două soluţii distincte	parabola intersectează axa Ox în două puncte	$\Delta > 0$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Exemple:

1. Pentru fiecare $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, se consideră funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m-1)x^2 - mx - m - 1$.
   a. Determinaţi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât forma canonică a funcţiei f să fie $f(x) = (x-1)^2 - 4$.
   b. Rezolvaţi inecuaţia $f_2(x) \le 0$.
   c. Poate fi punctul $A(0,-2)$ intersecţia parabolei asociată funcţiilor f_m cu axa Oy ?
   d. Aflaţi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel ca axa de simetrie a parabolei asociată funcţiei să aibă ecuaţia $d : x = 1$.
   e. Determinaţi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel ca vârfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m să fie situate în primul cadran.
   f. Există $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât vârfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m să fie situate pe dreapta de ecuaţie $d : 4x + y = 0$.
   g. Demonstraţi că dacă $m < -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ atunci soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $f_m(x) = 0$ verifică relaţia $2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 1$.
   h. Există $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât $f_m(x) \ge -4, \forall x \in \mathbb{R}$?
   i. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ parabolele asociate funcţiilor f_m sunt situate sub axa Ox ?
   j. Arătaţi că nu există $m \in \mathbb{Z}$ astfel ca vârful parabolei asociat funcţiei f_m să se afle pe prima bisectoare (dreapta de ecuaţie $d : y = x$).
   k. Determinaţi mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pentru care graficul funcţiei f_m nu intersectează axa Ox.
   l. Pentru $m \in \left(1, \frac{4012}{4011}\right]$ comparaţi numerele $f_m(2010)$ şi $f_m(2011)$.
   m. Aflaţi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât $f_m(x) \le f_m(2), \forall x \in \mathbb{R}$.
   n. Determinaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ştiind că valoarea maximă a funcţiei f_m este egală cu -1.
   o. Pentru ce valori $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dreapta de ecuaţie $d : x + y + 1 = 0$ nu intersectează parabola $y = f_m(x)$?

Scanned with OKEN Scanner

p. Determinaţi punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor f_2 şi f_3.

q. Determinaţi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât distanţa dintre punctele de intersecţie ale parabolei $y = f_m(x)$ cu axa Ox să fie egală cu 4.

a. Din $f(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 \overset{\text{ipot}}{=} (m-1)x^2 - mx - m - 1, \forall x \in \mathbb{R}$, obţinem:

$$\left.\begin{cases} m-1=1 \\ -m=-2 \\ -m-1=-3 \end{cases}\right| \Rightarrow m = 2.$$

b. $f_2(x) \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1,3]$.

c. Dacă ar fi, atunci ar trebui să existe $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât $f(0) = -2$, adică $-m-1 = -2 \Rightarrow m = 1$, fals.

d. Axa de simetrie a parabolei asociată funcţiei are ecuaţia $d: x = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2(m-1)}$ şi cum din ipoteză $d: x = 1$, obţinem $\frac{m}{2(m-1)} = 1 \Rightarrow m = 2$.

e. Vârful parabolelor corespunzătoare funcţiilor f_m este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) =$

$$= V\left(\frac{m}{2(m-1)}, -\frac{5m^2-4}{4(m-1)}\right) \in C_1 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \frac{m}{2(m-1)} > 0 \\ \frac{5m^2-4}{4(m-1)} < 0 \end{cases}\right| \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

f. $V\left(\frac{m}{2(m-1)}, -\frac{5m^2-4}{4(m-1)}\right) \in d: 4x + y = 0 \Leftrightarrow \frac{4m}{2(m-1)} - \frac{5m^2-4}{4(m-1)} = 0 \Rightarrow m \in \left\{-\frac{2}{5}, 2\right\}$

g. Ecuaţia are soluţii reale distincte dacă şi numai dacă $\Delta = 5m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \infty\right)$, deci pentru $\Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, avem soluţiile reale şi distincte x_1 şi x_2; conform relaţiilor lui Viète, obţinem

Scanned with OKEN Scanner

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m}{m-1}$ şi $P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{m+1}{m-1}$. Aşadar

$2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 2S + P = \frac{2m}{m-1} - \frac{m+1}{m-1} = 1$.

h. $f_m(x) \geq -4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m-1)x^2 - mx - m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 5m^2 - 16m + 12 \leq 0 \\ m - 1 > 0 \end{matrix} \right| \Rightarrow m \in \left[\frac{6}{5}, 2\right]$.

i. Cerinţa se poate scrie astfel $f_m(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} m \in \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ m - 1 < 0 \end{matrix} \right| \Rightarrow m \in \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

j. Dacă $V\left(\frac{m}{2(m-1)}, -\frac{5m^2-4}{4(m-1)}\right) \in d: y = x$, atunci am obţine

$\frac{m}{2(m-1)} = -\frac{5m^2-4}{4(m-1)}$, adică $5m^2 + 2m - 4 = 0 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}$.

k. Enunţul cerinţei este echivalent cu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

l. Pentru $a = m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$, atunci f_m este descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{m}{2(m-1)}\right]$ şi crescătoare pe intervalul $\left[\frac{m}{2(m-1)}, \infty\right)$; cum $2010 < 2011 \leq \frac{m}{2(m-1)} \Leftrightarrow m \in \left(1, \frac{4012}{4011}\right]$, adevărat conform ipotezei, şi cum $f_m \searrow$, rezultă de aici că $f_m(2010) \geq f_m(2011)$.

m. Din $f_m(x) \leq f_m(2), \forall x \in \mathbb{R}$ obţinem că punctul de maxim al funcţiei f_m este 2, adică $\left\{ \begin{matrix} a = m - 1 < 0 \\ x_V = \frac{m}{2(m-1)} = 2 \end{matrix} \right| \Rightarrow m = \frac{3}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

n. Este necesar ca $\left\{\begin{array}{c} a=m-1<0 \\ f_{\max}(x)=y_V=-\dfrac{5m^2-4}{4(m-1)}=-1 \end{array}\right| \Rightarrow m\in\left\{0,\dfrac{4}{5}\right\}$.

o. Trebuie ca sistemul $\begin{cases} x+y+1=0 \\ y=f_m(x) \end{cases}$ să nu aibă soluţii, adică ecuaţia $(m-1)x^2-(m-1)x-m=0$ să aibă discriminantul negativ $\Rightarrow \Delta=5m^2-6m+1<0 \Rightarrow m\in\left(\dfrac{1}{5},1\right)$.

p. Avem de fapt de rezolvat sistemul: $\left.\begin{cases} y=f_2(x) \\ y=f_3(x) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ y=2x^2-3x-4 \end{cases}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\in\left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

q. Avem, conform enunţului, că $\begin{cases} \Delta>0 \\ |x_1-x_2|=4 \end{cases}$. Ridicând la pătrat a doua relaţie obţinem $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=16 \Rightarrow S^2-4P=16 \Rightarrow \left(\dfrac{m}{m-1}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{m+1}{m-1}\right)=16 \Rightarrow$ $11m^2-32m+20=0 \Rightarrow m\in\left\{\dfrac{10}{11},2\right\}$; dintre cele două valori, doar $m=2$ verifică condiţia $\Delta>0$.

Paralelism şi calcul vectorial

Perechea ordonată (A,B) se numeşte ***segment orientat*** sau ***vector legat*** şi se notează cu $\overrightarrow{AB}$; punctul A se numeşte ***origine*** sau ***punct de aplicaţie***, iar punctul B se numeşte ***extremitate*** sau ***vârf***.

Vectorul legat $\overrightarrow{AB}$ este caracterizat prin:

1. ***direcţie***: dreapta suport AB, împreună cu toate dreptele paralele cu ea;
2. ***modul, normă*** sau ***lungime*** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB=d(A,B)$;
3. ***sens***.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Observaţii

1. ***vectorul nul*** este vectorul în care originea şi vârful coincid: $A = B \Rightarrow \overrightarrow{AA} \overset{not}{=} \vec{0}$; vectorul nul are direcţia şi sensul nedeterminate, iar lungimea egală cu 0;
2. dacă $\overrightarrow{AB}$ este vector legat, atunci vectorul legat $\overrightarrow{BA}$ are aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sens opus vectorului $\overrightarrow{AB}$; el se numeşte ***opusul vectorului legat*** $\overrightarrow{AB}$ şi se notează: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Doi vectori legaţi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ care au aceeaşi direcţie, modul şi sens se numesc ***echipolenţi*** şi se notează: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Mulţimea tuturor vectorilor legaţi din plan care sunt echipolenţi cu vectorul legat $\overrightarrow{AB}$ se numeşte ***vector liber*** şi se notează: $\overline{AB}$; deci $\overline{AB} = \left\{ \overrightarrow{XY} \middle| \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB} \right\}$, iar vectorul legat $\overrightarrow{AB}$ se numeşte ***reprezentant*** al vectorului liber $\overline{AB}$; are loc $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$.

Operaţii cu vectori

Adunarea vectorilor

Se poate face aplicând una din cele două reguli de mai jos:

1. ***Regula triunghiului***: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, pentru orice puncte A, B, C din plan (***relaţia lui Chasles***).
2. ***Regula paralelogramului***: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ dacă şi numai dacă patrulaterul $ABCD$ este paralelogram; $\overrightarrow{AD}$ se numeşte ***rezultanta*** vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

Înmulţirea vectorilor cu scalari (constante)

Dacă $\vec{v}$ este un vector legat şi $a \in \mathbb{R}^*$, atunci vectorul legat $a \cdot \vec{v}$ are:

1. aceeaşi direcţie cu cea a vectorului $\vec{v}$;
2. modulul, de $|a|$ ori mai mare decât $|\vec{v}|$, adică $|a \cdot \vec{v}| = |a| \cdot |\vec{v}| = |a| \cdot v$;
3. acelaşi sens cu cel al vectorului $\vec{v}$, dacă $a > 0$, sau sens opus, dacă $a < 0$.

În plus, vectorii $\vec{v}$ şi $a \cdot \vec{v}$ se numesc ***coliniari***.

De fapt are loc următoarea proprietate:

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt vectori coliniari şi nenuli, atunci: $\vec{u} = \pm\frac{u}{v}\cdot\vec{v}$, semnul alegându-se după cum vectorii legaţi $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ au sau nu acelaşi sens.

Vectori. Coliniaritate şi paralelism in plan

Un reper cartezian xOy în plan determină o împărţire a planului în patru *cadrane*:

$I = \{M(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$

$II = \{M(x,y) \mid x < 0, y > 0\}$

$III = \{M(x,y) \mid x < 0, y < 0\}$

$IV = \{M(x,y) \mid x > 0, y < 0\}$.

Distanţa dintre două puncte în plan

Distanţa dintre punctele $M_1(x_1,y_1)$ şi $M_2(x_2,y_2)$ este

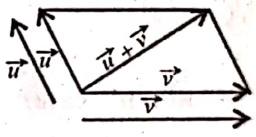
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Regula triunghiului sau *relaţia lui Chasles*

Oricare ar fi trei puncte P, Q, R în plan, are loc egalitatea: $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.

Regula paralelogramului

Fie $\vec{u},\vec{v} \in$, $\overrightarrow{PQ}=\vec{u}$ şi $\overrightarrow{PT}=\vec{v}$.



Construim paralelogramul $PQRT$.

Atunci $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$

Teorema bisectoarei

Fie triunghiul ABC şi $[AD$ bisectoarea unghiului A, unde $D \in [BC]$. Atunci avem $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

Vectori de poziţie

Fie O un punct în plan, fixat. Fiecărui punct M din plan i se asociază vectorul $\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{OM}$, numit vectorul său de poziţie.

Dacă $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=k$, atunci $\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{r_A}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{r_B}$. În particular, dacă M este mijlocul segmentului [AB], avem $\overrightarrow{r_M}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, $\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3}$.

Dacă I este punctul de intersecţie al bisectoarelor triunghiului ABC şi a, b, c sunt lungimile laturilor lui, atunci $\overrightarrow{r_I} = \frac{a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c}$.

Relaţia lui Sylvester

Fie H şi O ortocentrul, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Teorema lui Menelaus şi reciproca ei

Fie ABC un triunghi şi M, N, P puncte astfel încât $M \in (AB)$, $C \in (BN)$, $P \in (AC)$. Atunci M, N şi P sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$.

Teorema ramâne valabilă şi în cazul în care toate cele trei puncte sunt pe prelungirile laturilor triunghiului ABC.

Teorema lui Ceva şi reciproca ei

Fie ABC un triunghi şi M, N, P puncte astfel încât $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (AC)$. Atunci dreptele AN, BP si CM sunt concurente dacă şi numai dacă $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$.

Produsul scalar.

Pentru orice doi vectori nenuli v_1, v_2, numărul real $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos\alpha$, unde $\alpha = m(\sphericalangle \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ se numeşte *produsul scalar al vectorilor* $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$. Dacă $\vec{v}_1$ sau $\vec{v}_2$ este nul, atunci prin definiţie produsul scalar $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ este nul.

Proprietăţi:

- $\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2$
- Daca $\vec{v}_1$ si $\vec{v}_2$ sunt vectori nenuli, atunci: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Relaţii vectoriale importante

Teorema vectorială a medianei :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow M$ este mijlocul segmentului BC.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie

Teorema medianei este echivalentă cu regula paralelogramului, câtă vreme $\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{AM}$, unde $\overrightarrow{AD}$ este rezultanta vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ din paralelogramul $ABCD$, ale cărui diagonale, (AD) şi (BC), se înjumătăţesc în punctul M.

Proprietăţi:

1. Dacă $M\in(BC)$ şi $\frac{MB}{MC}=k$, atunci $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+k\cdot\overrightarrow{AC}}{k+1}$.
2. Vectorii $\vec{u},\vec{v}$ şi $\vec{w}$ pot forma un triunghi dacă şi numai dacă $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$.
3. Cele trei mediane $(AM),(BN),(CP)$ ale unui triunghi ABC pot forma, la rândul lor, un triunghi: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.
4. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow G$ este centrul de greutate al triunghiului ABC.
5. $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\Leftrightarrow G$ este centrul de greutate al triunghiului ABC.
6. $\overrightarrow{OH}=3\cdot\overrightarrow{OG}$; unde O este centrul cercului circumscris triunghiului, H este ortocentrul, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Vectori în reperul $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

Versorul unei axe este un vector legat, care-şi are originea în originea axei, acelaşi sens cu sensul pozitiv al axei şi lungimea egală cu 1. Cele două axe ortogonale Ox şi Oy ale reperului cartezian xOy, împreună cu versorii lor $\vec{i}$ şi respectiv $\vec{j}$, determină reperul $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dacă $\vec{u}$ este un vector din plan, atunci există un unic punct $M(x,y)$ astfel încât $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. Atunci, $N(x,0)$ şi $P(0,y)$ sunt proiecţiile punctului M pe cele două axe, din regula paralelogramului obţinem $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$; cum $\overrightarrow{ON}=x\cdot\vec{i}$ (vectori coliniari) şi $\overrightarrow{OP}=y\cdot\vec{j}$ (vectori coliniari), vom avea în final că $\vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$.

Spunem astfel că (x,y) ***sunt coordonatele vectorului*** $\vec{u}$ ***în reperul*** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ şi notăm acest lucru: $\vec{u}(x,y)$.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Reprezentarea (descompunerea) vectorilor	$\vec{u}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\vec{u}(x_1,y_1)$
	$\vec{v}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\vec{v}(x_2,y_2)$
Modulul, norma sau lungimea vectorilor	$\lvert\vec{u}\rvert=\lVert\vec{u}\rVert=u=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
	$\lvert\vec{v}\rvert=\lVert\vec{v}\rVert=v=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$
Egalitatea vectorilor	$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$
Adunarea vectorilor	$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2)\cdot\vec{i}+(y_1+y_2)\cdot\vec{j}$
Înmulţirea vectorilor cu scalari	$a\cdot\vec{u}=(ax_1)\cdot\vec{i}+(ay_1)\cdot\vec{j}$
Vectori coliniari	$\vec{u}\parallel\vec{v}$ (coliniari), dacă $x_2,y_2\neq0\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ sau $\exists\alpha\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}$
Vectori necoliniari	$\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt necoliniari $\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}\neq\frac{y_1}{y_2}$
Vectori determinaţi de două puncte date	$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}+(y_B-y_A)\cdot\vec{j}$

Exemple

1. Fie paralelogramul $ABCD$, în care $AD=6$. Calculaţi $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

   Dacă $(AC)\cap(BD)=\{O\}$ şi M este mijlocul segmentului AB, atunci OM este linie mijlocie în triunghiul ABD, prin urmare $\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{MO}$. Cum $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}\right)\underset{\text{medianei}}{\overset{\text{teorema}}{=}}4\cdot\overrightarrow{MO}=2\cdot\overrightarrow{AD}$, obţinem $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=$

   $=\left|2\cdot\overrightarrow{AD}\right|=2\cdot AD=12$.

2. Hexagonul regulat $ABCDEF$ are latura egală cu $4\ cm$.

   a. Arătaţi că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

   b. Calculaţi $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right|$.

   c. Determinaţi $\left|\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FD}\right|$.

   d. Demonstraţi că $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}$.

Scanned with OKEN Scanner

a. Dacă O este centrul hexagonului, obţinem succesiv: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=$
$=2\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}}_{=\vec{0}}\right)=\vec{0}$.

b. Avem, conform regulii paralelogramului, că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{AO}$ şi $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AO}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}\right)=\left(\underbrace{\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}}_{=\overrightarrow{AO}}\right)+2\cdot\overrightarrow{AO}=3\cdot\overrightarrow{AO}$; aşadar $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right|=\left|6\cdot\overrightarrow{AO}\right|=6\cdot AO=24\ cm$.

c. $\left|\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FD}\right|=\left|\overrightarrow{CD}+\underbrace{\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{ED}}_{=\vec{0}}+\overrightarrow{FE}\right|=\left|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}\right|=\left|\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|=AE$ şi cum AE este dublul înălţimii triunghiului echilateral AFO, de latură $4\ cm$, obţinem, în final, că: $\left|\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FD}\right|=4\sqrt{3}\ cm$.

d. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{FO}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}$, adevărat.

3. În reperul $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră punctele $A(2,-5),B(-4,3)$ şi $C(0,-1)$.

a. Determinaţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CN}$, unde N este mijlocul segmentului AB.

b. Calculaţi $2\cdot\overrightarrow{AB}-3\cdot\overrightarrow{CA}$.

c. Determinaţi lungimea vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

d. Aflaţi coordonatele simetricului punctului B faţă de mijlocul lui (AC).

e. Demonstraţi că vectorii $\vec{u}=3\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari.

a. $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}+(y_B-y_A)\cdot\vec{j}=-6\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}$; CN fiind mediană, obţinem: $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ şi cum $\overrightarrow{CA}=(x_A-x_C)\cdot\vec{i}+(y_A-y_C)\cdot\vec{j}=2\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}$, respectiv $\overrightarrow{CB}=(x_B-x_C)\cdot\vec{i}+(y_B-y_C)\cdot\vec{j}=-4\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}$ va rezulta $\overrightarrow{CN}=-\vec{i}$.

b. Avem $2\cdot\overrightarrow{AB}-3\cdot\overrightarrow{CA}=2\cdot\left(-6\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}\right)-3\cdot\left(2\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}\right)=-18\cdot\vec{i}+28\cdot\vec{j}$.

Scanned with OKEN Scanner

c. Din punctele anterioare avem: $\overrightarrow{AB} = -6\cdot\vec{i} + 8\cdot\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = 6\cdot\vec{i} - 8\cdot\vec{j}$ şi $\overrightarrow{CB} = -4\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = 4\cdot\vec{i} - 4\cdot\vec{j}$. Deci $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 10\cdot\vec{i} - 12\cdot\vec{j}$. Aşadar $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{10^2 + (-12)^2} = 2\sqrt{61}$.

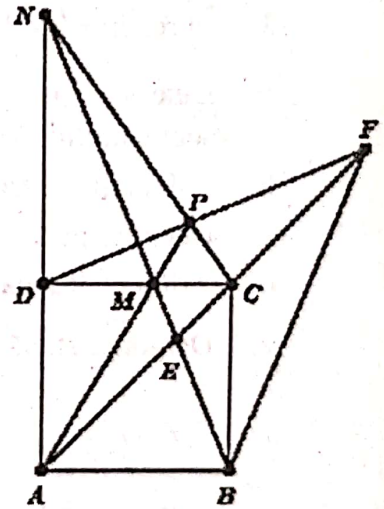
d. Deoarece $\overrightarrow{AB} = -6\cdot\vec{i} + 8\cdot\vec{j}$, $\vec{u} = 3\cdot\vec{i} - 4\cdot\vec{j}$ şi $\frac{-6}{3} = \frac{8}{-4}$, rezultă că vectorii $\vec{u}$ şi $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari, sau se poate observa că $\overrightarrow{AB} = -2\cdot\vec{u}$.

4. Să se demonstreze că picioarele bisectoarelor exterioare ale unui triunghi sunt trei puncte coliniare.

Notăm cu A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor exterioare pe prelungirile laturilor BC, AC, respectiv AB ale triunghiului ABC. Folosind teorema bisectoarei, putem să scriem proporţiile: $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{BC}{BA}$, $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{CA}{CB}$. Înmulţind aceste relaţii, obţinem

$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB} = 1$. Folosind teorema reciprocă a teoremei lui Menelaus, rezultă că picioarele bisectoarelor exterioare ale unui triunghi sunt trei puncte coliniare.

5. Fie pătratul $ABCD$ şi punctele $E \in (AC)$ şi $F \in (AC - [AC]$ astfel încât $AE = CF = AB$. Notăm cu $\{M\} = BE \cap CD$, $\{N\} = BE \cap AD$ şi $\{P\} = DF \cap CN$. Arătaţi că punctele A, M, P sunt coliniare.



În triunghiul ACN şi transversala FDP folosim teorema lui Menelaus:

$$\frac{FA}{FC}\cdot\frac{PC}{PN}\cdot\frac{DN}{DA} = 1. \qquad (1)$$

Cum $AE = AB$ şi $BC = CF$, rezultă că $\sphericalangle CBF \equiv \sphericalangle EBF$. Prin urmare, $[BC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle EBF$, iar $[AB$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle EBF$. Putem astfel să scriem proporţia

$$\frac{AF}{AE} = \frac{CF}{CE}. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem egalitatea $\frac{EA}{EC}\cdot\frac{PC}{PN}\cdot\frac{DN}{DA}=1$. Conform teoremei reciproce a teoremei lui Menelaus, rezultă că punctele A, M, P sunt coliniare.

6. Fie triunghiul ABC. Notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$. Fie $[MP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMB$ şi $[MN$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$, unde $P\in AB$, $N\in AC$. Demonstraţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

Folosind teorema bisectoarei, putem scrie relaţiile $\frac{AP}{PB}=\frac{AM}{BM}$ şi $\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MC}$. Ţinând cont de faptul că punctul M este mijlocul segmentului $[BC]$, putem scrie că $\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}$, iar de aici rezultă că $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{AN}=1$. Conform teoremei reciproce a teoremei lui Ceva, rezultă că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

7. Notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$ ale triunghiului ABC. Dacă A'', B'', C'' sunt mijloacele înălţimilor $[AA_1]$, $[BB_1]$, respectiv $[CC_1]$ ale triunghiului ABC, atunci să se demonstreze că dreptele $A'A''$, $B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente.

În triunghiul $A'B'C'$ avem $A''\in B'C'$, $B''\in A'C'$ şi $C''\in A'B'$. De aceea, $\frac{A''C'}{A''B'}=\frac{A_1B}{A_1C}$, $\frac{B''A'}{B''C'}=\frac{B_1C}{B_1A}$ şi $\frac{C''B'}{C''A'}=\frac{C_1A}{C_1B}$. Cum înălţimile $[AA_1]$, $[BB_1]$ şi $[CC_1]$ ale triunghiului sunt concurente, rezultă, conform teoremei lui Ceva, că $\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1$. Atunci

$$\frac{A''C'}{A''B'}\cdot\frac{B''A'}{B''C'}\cdot\frac{C''B'}{C''A'}=\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1.$$

Conform teoremei reciproce a teoremei lui Ceva, rezultă că dreptele $A'A''$, $B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente.

Aplicaţii ale trigonometriei în geometrie

Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Dacă $AD\perp BC, D\in(BC)$ este înălţimea din A, iar S are aria triunghiului, atunci au loc următoarele:

1. ***Teorema lui Pitagora***: $BC^2=AB^2+AC^2$.
2. ***Teorema catetei***: $AB^2=BD\cdot BC$, $AC^2=CD\cdot BC$.
3. ***Teorema înălţimii***: $AD^2=BD\cdot DC$.

Scanned with OKEN Scanner

4. ***Aria triunghiului***: $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2}$.

5. $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

Funcţii trigonometrice în triunghiul dreptunghic

Fie x măsura, exprimată în grade, a unuia dintre cele două unghiuri ascuţite ale unui triunghi dreptunghic.

Se definesc:

$\sin x = \frac{\text{lungimea catetei opuse}}{\text{lungimea ipotenuzei}}$	$\cos x = \frac{\text{lungimea catetei alăturate}}{\text{lungimea ipotenuzei}}$
$\text{tg}\, x = \frac{\text{lungimea catetei opuse}}{\text{lungimea catetei alăturate}}$	$\text{ctg}\, x = \frac{\text{lungimea catetei alăturate}}{\text{lungimea catetei opuse}}$

În cazul notaţiilor de mai sus obţinem:

$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}$	$\sin C = \cos B = \frac{c}{a}$	$\text{tg}\, B = \text{ctg}\, C = \frac{b}{c}$	$\text{tg}\, C = \text{ctg}\, B = \frac{c}{b}$

Observaţie

A rezolva un triunghi dreptunghic presupune a-i determina , pe baza datelor din ipoteză, lungimile laturilor şi măsurile unghiurilor (sau funcţii trigonometrice ale acestora).

Relaţii între elementele unui triunghi oarecare

Fie ABC un triunghi oarecare în care:

1. a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC ($BC = a, CA = b, AB = c$);
2. A, B, C sunt măsurile (exprimate în grade) ale unghiurilor triunghiului ABC;
3. $p = \frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului;
4. h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălţimilor coborâte din vârfurile A, B, C;
5. S este aria triunghiului ABC;
6. R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC;
7. r este lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci *aria triunghiului* ABC poate fi calculată astfel :

$S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$	$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$
$S=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}=\frac{c\cdot a\cdot \sin B}{2}$	$S=p\cdot r$
$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$ (Heron)	$S=2R^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

Teorema sinusurilor : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

Teorema cosinusului : $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos B$.

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

Formule şi valori ale funcţiilor trigonometrice

1. Formule trigonometrice imediate

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$			
$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$	
$\sin x=\cos(90^0-x)$	$\cos x=\sin(90^0-x)$	$\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg}(90^0-x)$	$\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}(90^0-x)$

2. Reducerea la primul cadran

Cadranul / funcţia trigonometrică	C_I	C_{II}
	x	180^0-x
sin	$\sin x$	$\sin x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$

Scanned with OKEN Scanner

3. *Valorile funcţiilor trigonometrice directe ale principalelor unghiuri din intervalul* $[0°180°]$

	C_I				C_{II}				
$m(\angle)$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} x$	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	nu există

Formule trigonometrice

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cdot\cos b\mp\sin a\cdot\sin b$$

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cdot\cos b\pm\sin b\cdot\cos a$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a;\qquad \sin 2a=2\sin a\cdot\cos a;\qquad \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2};$$

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2};$$

$$\operatorname{tg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{tg}a\pm\operatorname{tg}b}{1\mp\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b};\quad \operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a};\quad \sin a=\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}};\quad \cos a=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}};$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2};\qquad \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2};\qquad \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}.$$

Ecuaţii trigonometrice

Ecuaţia $\sin t=a$ are soluţii dacă $a\in[-1,1]$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{\arcsin a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\arcsin a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Ecuaţia $\cos t=a$ are soluţii dacă şi numai dacă $a\in[-1,1]$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{\arccos a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\arccos a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Ecuaţia $\operatorname{tg} t=m$ are soluţii, oricare ar fi m un număr real. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{\operatorname{arctg} m+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Exemple

1. Rezolvaţi triunghiul dreptunghic ABC $(m(\angle A)=90^\circ)$, în care $AB=8$ şi $\cos C=\frac{3}{5}$.

   Din $\cos C=\frac{3}{5}$ obţinem $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{4}{5}$; deci $\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}\Rightarrow BC=10$.

   Conform Teoremei lui Pitagora rezultă $AC=6$ şi apoi $\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{5}$.

2. În triunghiul dreptunghic ABC $(m(\angle A)=90^\circ)$, se cunosc $AB=3$ şi $AC=4$.
   a. Calculaţi aria triunghiul ABC.
   b. Determinaţi lungimea înălţimii dusă din A.
   c. Aflaţi raza cercului înscris şi raza cercului circumscris triunghiului.

   a. Avem $S=\frac{AB\cdot AC}{2}=6$.

   b. Din Teorema lui Pitagora rezultă $BC=5$, aşadar $AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12}{5}$.

   c. $p=\frac{AB+BC+CA}{2}=6\Rightarrow r=\frac{S}{p}=1$; fiind triunghi dreptunghic $R=\frac{BC}{2}=5$.

3. În triunghiul ascuţitunghic ABC se cunosc $BC=13$, $AB=20$ şi $\sin A=\frac{1}{4}$.
   a. Determinaţi lungimea laturii AC.
   b. Aflaţi $\sin B$.
   c. Calculaţi aria triunghiului.
   d. Determinaţi lungimea înălţimii duse din B.

Scanned with OKEN Scanner

a. Din teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ se obţine $\sin C=\frac{5}{13}$, deci $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{12}{13}$; înlocuind acum în teorema cosinusului $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$ va rezulta $b^2-24b-231=0\Rightarrow b=12+5\sqrt{15}$.

b. Din teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\frac{12+5\sqrt{15}}{52}$.

c. $S=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{5\left(12+5\sqrt{15}\right)}{2}$.

d. Avem $S=\frac{b\cdot h_b}{2}\Rightarrow h_b=\frac{2S}{b}=5$.

4. Demonstraţi identităţile:

a. $\sin^2 144^\circ+\sin^2 126^\circ=1$.

b. $\sin^2 10^\circ+\sin^2 80^\circ=1$.

c. $\left(\sin 1^\circ-\cos 89^\circ\right)\cdot\left(\sin 1^\circ-\cos 89^\circ\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sin 89^\circ-\cos 1^\circ\right)=0$.

d. $2\operatorname{tg}20^\circ\cdot\sin^2 70^\circ+\left(\sin 20^\circ-\sin 70^\circ\right)^2=1$.

e. $\sin 154^\circ\cdot\sin 26^\circ+\cos 64^\circ\cdot\cos 116^\circ=0$.

a. $\sin^2 144^\circ+\sin^2 126^\circ=\sin^2\left(180^\circ-144^\circ\right)+\sin^2\left(180^\circ-126^\circ\right)=$

$=\sin^2 36^\circ+\sin^2 54^\circ=\sin^2 36^\circ+\cos^2\left(90^\circ-54^\circ\right)=\sin^2 36^\circ+\cos^2 36^\circ=1$.

b. $\sin^2 10^\circ+\sin^2 80^\circ=\sin^2 10^\circ+\cos^2\left(90^\circ-80^\circ\right)=\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ=1$.

c. În fiecare paranteză apar unghiuri complementare; paranteza din mijloc va fi $\sin 45^\circ-\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$, prin urmare tot produsul este egal cu 0.

d. Avem succesiv:

$2\operatorname{tg}20^\circ\cdot\sin^2 70^\circ+\left(\sin 20^\circ-\sin 70^\circ\right)^2=2\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}\cdot\cos^2 20^\circ+\left(\sin 20^\circ-\cos 20^\circ\right)^2=$

$=2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ+\underbrace{\sin^2 20^\circ+\cos 20^\circ}_{=1}-2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ=1$.

Scanned with OKEN Scanner

e. $\sin 154^\circ \cdot \sin 26^\circ + \cos 64^\circ \cdot \cos 116^\circ = \sin\left(180^\circ - 154^\circ\right) \cdot \sin 26^\circ + \cos 64^\circ \cdot$

$\cdot\left(-\cos\left(180^\circ - 116^\circ\right)\right) = \sin^2 26^\circ - \cos^2 64^\circ = \sin^2 26^\circ - \sin^2\left(90^\circ - 64^\circ\right) = 0$.

5. Arătaţi că $\sin 5 < 0$.

Deoarece $\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$ şi ţinând cont de faptul că funcţia sinus este negativă în cadranul IV, rezultă că $\sin 5 < 0$.

6. Să se calculeze $\sin\frac{23\pi}{12}$.

Avem

$$\sin\frac{23\pi}{12} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12} = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

7. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ cu $\sin x = \frac{1}{3}$. Să se calculeze $tg\, x$.

Ştim că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, iar în cadranul II funcţia cosinus este negative.

Prin urmare, $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Cum $\sin x = \frac{1}{3}$, va rezulta

$\cos x = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Atunci $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

8. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 8\sin x$ este impară.

Avem $f(-x) = (-x)^5 + 8\sin(-x) = -x^5 - 8\sin x = -f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$. Deci funcţia f este impară.

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a + b = \frac{\pi}{3}$. Arătaţi că $\sin 2a - \sin 2b = \sin(a - b)$.

Folosim formula de transformare a diferenţei de sinusuri în produs:

$$\sin 2a - \sin 2b = 2\sin\frac{2a - 2b}{2}\cos\frac{2a + 2b}{2} = 2\sin(a - b)\cos(a + b) = 2\sin(a - b)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$2 \cdot \sin(a - b) \cdot \frac{1}{2} = \sin(a - b).$$

10. Să se calculeze $tg\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{2}\right)=ctg\left(arctg\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{tg\left(arctg\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

11. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Cum $\sin(\arcsin x)=x, \forall\, x\in[-1,1]$, vom obţine

$$E=\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

12. Să se rezolve ecuaţiile:
   a. $\sin 3x=0$;
   b. $tg\,x=-\sqrt{3}$.

   a. Avem $3x=(-1)^k\cdot\arcsin 0+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, de unde se obţine $x\in\left\{\frac{k\pi}{3}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   b. Avem $x=arctg\left(-\sqrt{3}\right)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, adică $x\in\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

13. Să se rezolve în mulţimea $[0,2\pi]$ ecuaţia $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Avem $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, de unde obţinem

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x=0$, de unde rezultă că $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$.

14. Să se rezolve în mulţimea $(0,\pi)$ ecuaţia $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Avem $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0\Leftrightarrow\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=0$, iar de aici

rezultă că $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$. Obţinem astfel $x\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right\}$.

15. Să se rezolve în mulţimea $[0,2\pi]$ ecuaţia $\cos 4x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $4x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, de unde rezultă $x \in \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Trebuie să alegem acum doar soluţiile care să aparţină intervalului $[0,2\pi]$. Deci $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$.

16. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+|\sin x|$ admite perioada 2π.

$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+|\sin(x+2\pi)|=\sin x+|\sin x|=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$, adică funcţia f admite perioada 2π.

17. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin x$ nu este periodică.

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că funcţia f are perioada $T>0$. Atunci $(x+T)\sin(x+T)=x\sin x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Pentru $x=0$ se obţine $T\sin T=0$, de unde rezultă $T=k\pi$, unde $k\in\mathbb{N}^*$. Aşadar, $(x+k\pi)\sin(x+k\pi)=x\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Pentru $x=\frac{\pi}{2}$ se obţine că $\pm\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\frac{\pi}{2}$, iar de aici rezultă $k=1$. Prin urmare, avem $(x+\pi)\sin(x+\pi)=x\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce reprezintă o contradicţie.

În concluzie, funcţia f nu este periodică.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a, M2

Numere reale

Puteri cu exponent întreg

Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$ se numeşte ***putere***, de ***bază*** a şi ***exponent*** n. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{N}$, atunci $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; expresia 0^0 nu are sens.

Proprietăţi

Pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$ şi $n, m \in \mathbb{Z}$ au loc:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$	$a^0 = 1$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$1^n = 1$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$0^n = 0, n \neq 0$

Radicali de ordinul 2 şi 3 dintr-un număr raţional

1. Pentru $a \in \mathbb{Q}_+$ se numeşte ***radical de ordinul 2 din*** a (***radical pătratic***) unicul număr real pozitiv, notat $\sqrt{a}$ sau $\sqrt[2]{a}$, care ridicat la puterea a doua dă ca rezultat a.
2. Pentru $a \in \mathbb{Q}$ se numeşte ***radical de ordinul 3 din*** a (***radical cubic***) unicul număr real, notat $\sqrt[3]{a}$, care ridicat la puterea a treia dă ca rezultat a.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii

Din definiţia de mai sus deducem următoarele:

$\sqrt{f(x)}$	Condiţii de existenţă a radicalului	$f(x)\geq 0$
	Semnul radicalului	$\sqrt{f(x)}\geq 0$
		$\sqrt{(f(x))^2}=\lvert f(x)\rvert;\ \left(\sqrt{f(x)}\right)^2=f(x);$ Caz particular: $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$.
$\sqrt[3]{f(x)}$	Condiţii de existenţă a radicalului	Niciuna: $f(x)\in\mathbb{R}$
	Semnul radicalului	$\sqrt[3]{f(x)}\in\mathbb{R}$: $\nearrow \sqrt[3]{f(x)}\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 0$; $\searrow \sqrt[3]{f(x)}<0\Leftrightarrow f(x)<0$
		$\sqrt[3]{(f(x))^3}=\left(\sqrt[3]{(f(x))}\right)^3=f(x);$ Caz particular: $\sqrt[3]{x^3}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x$.

Formule

$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{\lvert b\rvert},\ a,b\in\mathbb{Q},\ a\cdot b\geq 0$		$\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b},\ a,b\in\mathbb{Q}$
$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{\lvert a\rvert}}{\sqrt{\lvert b\rvert}},\ a,b\in\mathbb{Q},\ a\cdot b\geq 0,\ b\neq 0$		$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}},\ a,b\in\mathbb{Q},\ b\neq 0$
Introducerea unui factor sub radical	$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b},\ a,b\in\mathbb{Q}_+$	$a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b},\ a,b\in\mathbb{Q}$
	$a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2\cdot b},\ a,b\in\mathbb{Q},\ a<0,\ b\geq 0$	
Scoaterea unui factor de sub radical	$\sqrt{a^2\cdot b}=\lvert a\rvert\cdot\sqrt{b},\ a,b\in\mathbb{Q},\ b\geq 0$	$\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\sqrt[3]{b},\ a,b\in\mathbb{Q}$

Scanned with OKEN Scanner

ATENŢIE:

$$\sqrt[n]{a\pm b}\neq\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b},\quad n\in\{2,3\}$$

Exemple

1. Calculaţi:

a. $6^{-3}\cdot 12^2:\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\cdot 54$;

b. $\sqrt{18}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{50}+\sqrt{48}\right)$;

c. $\left(\sqrt[3]{12}\right)^2\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

a. Avem: $6^{-3}\cdot 12^2:\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\cdot\frac{27}{8}=(2\cdot 3)^{-3}\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^2\cdot 2^2\cdot 3^{-2}\cdot 2^{-3}\cdot 3^3=$

$=\left(2^{-3}\cdot 2^4\cdot 2^2\cdot 2^{-3}\right)\cdot\left(3^{-3}\cdot 3^2\cdot 3^{-2}\cdot 3^3\right)=2^0\cdot 3^0=1$;

b. $\sqrt{18}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{50}+\sqrt{48}\right)=3\sqrt{2}\cdot\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)=$

$=3\cdot\left(5\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)=3\cdot(50-48)=6$;

c. $\left(\sqrt[3]{12}\right)^2\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=\sqrt[3]{\left(2^2\cdot 3\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=\sqrt[3]{2^4\cdot 3^2\cdot\frac{3}{2}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=\sqrt[3]{(2\cdot 3)^3}=6$.

2. Demonstraţi că:

a. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=4$;

b. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$;

c. $\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10+6\sqrt{x+1}}=6,\ \forall x\in[-1,8]$;

d. $\sqrt{2}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-\sqrt{6}<\sqrt{5}-\sqrt{8}$;

e. $\left[\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right]=0$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a;

f. $\left(\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}\right)^2=1,\ \forall x\in\mathbb{Q}^*$.

g. $\left(\sqrt[3]{-81}+2\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{24}\right):\sqrt[3]{3}=\left(3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{75}\right):\sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

a. Se observă că: $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}=$

$=\left|\underbrace{\sqrt{3}-2}_{<0}\right|+\left|\underbrace{\sqrt{3}+2}_{>0}\right|=-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2=4$, ori se ridică la pătrat egalitatea de demonstrat, obţinând: $14+2\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=2\Big|^2\Leftrightarrow 49-48=1$, adevărat.

b. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}-\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\left(2+\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$, adevărat. Sau se ridică la cub, ţinând seama de formula $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, şi se obţine succesiv:

$\left(26+15\sqrt{3}\right)-\left(26-15\sqrt{3}\right)-3\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot$

$\cdot\left(\underbrace{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}_{=2\sqrt{3}}\right)=24\sqrt{3}\Leftrightarrow 30\sqrt{3}-6\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\underbrace{26^2-\left(15\sqrt{3}\right)^2}_{=1}}=$

$=24\sqrt{3}$, adevărat.

c. Avem

$\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10+6\sqrt{x+1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+3\right)^2}=$

$=\left|\underbrace{\sqrt{x+1}-3}_{\le 0}\right|+\left|\underbrace{\sqrt{x+1}+3}_{\ge 0}\right|=-\sqrt{x+1}+3+\sqrt{x+1}+3=6,\ \forall x\in[-1,8]$. Am folosit faptul că $\forall x\le 8$ avem $\sqrt{x+1}-3\le 0$; condiţia ca $x\ge -1$ este necesară pentru existenţa expresiei $\sqrt{x+1}$.

d. Inegalitatea din stânga este echivalentă cu $\sqrt{2}+\sqrt{6}<\sqrt{3}+\sqrt{5}\Big|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8+2\sqrt{12}<8+2\sqrt{15}\Leftrightarrow\sqrt{12}<\sqrt{15}$, adevărat; cea din stânga se justifică similar.

e. $\left[\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right]=0\Leftrightarrow 0\le\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}<1$; inegalitatea din stânga este echivalentă cu $\sqrt[3]{3}\ge\sqrt{2}\Big|^3\Leftrightarrow 3\ge 2\sqrt{2}\Big|^2\Leftrightarrow 9\ge 8$, adevărat, iar cea din dreapta devine echivalentă cu $\sqrt[3]{3}<\sqrt{2}+1\Big|^3\Leftrightarrow 3<7+5\sqrt{2}$, de asemenea adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

f. Membrul stâng devine:

$\left(\sqrt[3]{-81}+2\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{24}\right):\sqrt[3]{3}=\left(-\sqrt[3]{3^4}+2\sqrt[3]{3\cdot 5^3}-\sqrt[3]{3\cdot 2^3}\right):\sqrt[3]{3}=$

$=\left(-3\sqrt[3]{3}+10\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}\right):\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{3}=5$, iar cel din stânga:

$\left(3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{75}\right):\sqrt{3}=\left(6\sqrt{3}-6\sqrt{3}+5\sqrt{3}\right):\sqrt{3}=5\sqrt{3}:\sqrt{3}=5$, prin urmare identitatea este demonstrată.

Medii. Inegalitatea mediilor

Pentru numerele $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ se definesc:

a. ***media aritmetică***: $m_a=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$;

b. ***media geometrică***: $m_g=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ (deşi noi ne vom referi doar la cazurile în care $n\in\{2,3\}$);

c. ***media armonică***: $m_h=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}$;

d. ***media pătratică***: $m_p=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$;

Atunci ***inegalitatea mediilor*** afirmă că:

$$\min(a_1,a_2,\ldots,a_n)\leq m_h\leq m_g\leq m_a\leq m_p\leq\max(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

De exemplu pentru orice numere $a,b,c>0$ avem:

1. $\min(a,b)\leq\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\leq\max(a,b)$;

2. $\min(a,b,c)\leq\dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}\leq\sqrt[3]{abc}\leq\dfrac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}\leq\max(a,b,c)$

Câteva consecinţe utile:

1. $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geq 2$, $\forall x\neq 0$, cu egalitate $\Leftrightarrow|x|=1$;

2. $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, cu egalitate $\Leftrightarrow a=b=c$.

Scanned with OKEN Scanner

3. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ şi $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, cu egalitate $\Leftrightarrow a=b=c$.

Logaritmi

Dacă $a,b>0$ şi $a\neq 1$ se numeşte ***logaritm în bază a din b*** unicul număr real, notat $\log_a b$, ce reprezintă exponentul la care trebuie ridicată baza a pentru a obţine numărul b.

Din definiţie reies următoarele

Observaţii

1. ***Condiţiile de existenţă ale numărului*** $\log_a b$ sunt $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ b>0 \end{cases}$.

2. $\log_a b=c\Leftrightarrow b=a^c$.

Cazuri particulare de logaritmi

1. dacă $a=10$ atunci $\log_{10} b \overset{not}{=} \lg b$ se numeşte ***logaritm zecimal***;

2. dacă $a=e$ ($e\simeq 2{,}71; e\notin\mathbb{Q}$ fiind ***numărul lui Euler***), atunci $\log_e b \overset{not}{=} \ln b$ se numeşte ***logaritm natural*** (***neperian***).

Formule / proprietăţi

$\log_a b=c\Leftrightarrow b=a^c$	$\log_a a=1$
	$\log_a 1=0$
$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$
$\log_a x^n=n\log_a x$	$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\cdot\log_a b$
$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$	$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$
Formula de schimbare de bază: $\log_a b=\log_c b\cdot\log_a c=\frac{\log_c b}{\log_c a}\overset{c=10}{=}\frac{\lg b}{\lg a}\overset{c=e}{=}\frac{\ln b}{\ln a}$	

Scanned with OKEN Scanner

Operaţia de logaritmare a unei expresii (ecuaţii)

Dacă $f(x), g(x)>0$, atunci prin ***logaritmarea unei expresii, egalităţi (ecuaţii)*** de forma $f(x)=g(x)$, în baza $a>0, a\neq 1$ se înţelege obţinerea echivalentă a egalităţii $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, cu scopul aducerii expresiei iniţiale la o formă mai simplă sau a rezolvării ecuaţiei date.

Exemple

1. Calculaţi

   a. $\log_2 10+\log_2 6-\log_2 15$;

   b. $\log_3 12\cdot\log_2 3-\log_4 9$;

   c. $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{3}\cdot\log_3 2$;

   d. $\log_{2010}(\operatorname{tg} x)+\log_{2010}(\operatorname{ctg} x), x\in(0^\circ,90^\circ)$;

   e. $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{31}32$;

   f. $4^{1+\log_2 3}:6^{\frac{1}{\log_{36}6}}$;

   g. exprimaţi, în funcţie de $\log_3 2=a$, numărul $\log_{12}18$.

a. Avem $\log_2 10+\log_2 6-\log_2 15=\log_2\left(\frac{6\cdot 10}{15}\right)=\log_2 4=2$.

b. $\log_3 12\cdot\log_2 3-\log_4 9=\log_3\left(2^2\cdot 3\right)\cdot\log_2 3-\log_{2^2}3^2=$

$$=\left(\underbrace{2\underbrace{\log_3 2}_{=\frac{1}{\log_2 3}}}_{=1}+\underbrace{\log_3 3}_{=1}\right)\cdot\log_2 3-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_2 3=2+\log_2 3-\log_2 3=2.$$

c. $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{3}\cdot\log_3 2=\log_{2^{\frac{1}{2}}}3^{\frac{1}{3}}\cdot\log_3 2=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\log_2 3\cdot\log_3 2}_{=1}=\frac{2}{3}$.

d. $\log_{2010}(\operatorname{tg} x)+\log_{2010}(\operatorname{ctg} x)=\log_{2010}\left(\underbrace{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x}_{=1}\right)=\log_{2010}1=0$.

Scanned with OKEN Scanner

e. Folosind formula de schimbare de bază obţinem succesiv:

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{31}32=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\ldots\cdot\frac{\lg 32}{\lg 31}=\frac{\lg 2^5}{\lg 2}=\frac{5\lg 2}{\lg 2}=5.$$

f. Avem succesiv $4^{1+\log_2 3}=4^1\cdot 4^{\log_2 3}=4\cdot 3^{\log_2 4}=4\cdot 3^2=36$ şi $6^{\frac{1}{\log_{36}6}}=6^{\log_6 36}=6^2=36$; prin urmare valoarea expresiei date este 1.

g. $\log_{12}18=\log_{12}\left(2\cdot 3^2\right)=\log_{12}2+2\log_{12}3=\frac{1}{\log_2 12}+\frac{2}{\log_3 12}=$

$$=\frac{1}{\log_2\left(2^2\cdot 3\right)}+\frac{2}{\log_3\left(2^2\cdot 3\right)}=\frac{1}{2\underbrace{\log_2 2}_{=1}+\underbrace{\log_2 3}_{=a}}+\frac{2}{2\underbrace{\log_3 2}_{=\frac{1}{a}}+\underbrace{\log_3 3}_{=1}}=$$

$$=\frac{1}{2+a}+\frac{2}{\frac{2}{a}+1}=\frac{2a+1}{a+2}.$$

2. Demonstraţi că dacă $a,b,c>0$ şi numerele $\log_{2010}a,\log_{2010}b,\log_{2010}c$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci a,b,c $\vdots\vdots$.

Avem următorul şir de echivalenţe:

$\log_{2010}a,\log_{2010}b,\log_{2010}c$ $\vdots$ $\Leftrightarrow 2\log_{2010}b=\log_{2010}a+\log_{2010}c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_{2010}b^2=\log_{2010}(a\cdot c)\Leftrightarrow b^2=a\cdot c\Leftrightarrow a,b,c$ $\vdots\vdots$.

3. Arătaţi că dacă $a,b,c>1$ şi $a^{\frac{1}{\lg b}}\cdot b^{\frac{1}{\lg c}}\cdot c^{\frac{1}{\lg a}}=1000$, atunci $a=b=c$.

Logaritmând relaţia dată în baza 10 obţinem: $\lg\left(a^{\frac{1}{\lg b}}\cdot b^{\frac{1}{\lg c}}\cdot c^{\frac{1}{\lg a}}\right)=$

$=\lg 1000\Leftrightarrow\frac{\lg a}{\lg b}+\frac{\lg b}{\lg c}+\frac{\lg c}{\lg a}=3$; deoarece, conform inegalităţii mediilor, avem $3=\frac{\lg a}{\lg b}+\frac{\lg b}{\lg c}+\frac{\lg c}{\lg a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\lg a}{\lg b}\cdot\frac{\lg b}{\lg c}\cdot\frac{\lg c}{\lg a}}=3$, va rezulta de aici că trebuie să avem egalitate între media aritmetică şi cea geometrică, adică

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{\lg a}{\lg b}=\frac{\lg b}{\lg c}=\frac{\lg c}{\lg a}$. Întrucât $\lg a, \lg b, \lg c>0$, obţinem în final $\lg a=\lg b=\lg c \Rightarrow a=b=c$.

Numere complexe

Un număr complex este de forma $z=a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}$, unde $i^2=-1$; $\mathrm{Re}(z)=a$; $\mathrm{Im}(z)=b$.

Operaţii cu numere complexe

Fie $z_1=a_1+ib_1$ şi $z_2=a_2+ib_2$. Atunci:

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$; $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$;

$$\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2};\quad \frac{z_2}{z_1}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}-i\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Numere complexe conjugate

$\overline{z}=\overline{a+ib}=a-ib$ se numeşte conjugatul numărului complex $z=a+ib$.

Avem: a) $a=\frac{z+\overline{z}}{2}$; $ib=\frac{z-\overline{z}}{2}$; b) $z\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\overline{z}=z$;

c) z este imaginar dacă şi numai dacă $\overline{z}=-z$; d) $\overline{\alpha z}=\alpha\cdot z,\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R}$.

Fie $z=a+ib$ şi $z'=a'+ib'$ două numere complexe. Avem:

a) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; b) $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$; c) $\frac{z}{z'}=\frac{z\cdot\overline{z'}}{a'^2+b'^2}$, $z'\neq 0$.

Modulul unui număr complex

Fie $z\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Oricare ar fi numărul complex $z\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$ avem:

1) $|z|\geq 0$; 2) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$; 3) $z\cdot\overline{z}=|z|$; 4) $|z|=|\overline{z}|$.

Dacă $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, atunci: 5) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; 6) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$;

7) *Inegalitatea triunghiului* $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

Scanned with OKEN Scanner

Forma trigonometrică a unui număr complex

Fie $z\in\mathbb{C}^*$, $z=a+ib$. Există şi sunt unice $\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ şi $\varphi\in[0,2\pi)$ astfel încât $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; $\cos\varphi=\frac{a}{\rho}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\rho}$.

Fie $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ şi $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{\rho_1}[\cos(-\varphi_1)+i\sin(-\varphi_1)]$

$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}[\cos(\varphi_2-\varphi_1)+i\sin(\varphi_2-\varphi_1)]$ $\qquad z_1^n=\rho_1^n(\cos n\varphi_1+i\sin n\varphi_1)$

$\sqrt[n]{z_1}=\sqrt[n]{\rho_1}\left(\cos\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}\right)$, $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

Formula lui Moivre: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Exemple

1. Să se calculeze:
   a. $2(3+2i)-(i+1)(2-i)$;
   b. $1+i+i^2+\cdots+i^{100}$;
   c. $(1+i)^{32}$.
2. Să se determine coeficientul părţii imaginare a numărului $z=\frac{1-i}{1+i}$.
3. Să se arate că numărul $z=\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{1-2i}{1+2i}$ este real.
4. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{3-i}{3+i}$.
5. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţiile:
   a. $z^2-2z+4=0$;
   b. $z^4+3z^2-4=0$.
6. Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze z^{12}.

1.

a. $2(3+2i)-(i+1)(2-i)=6+4i-2i+i^2-2+i=3+3i$.

b. $1+i+i^2+\cdots+i^{100}=(1+i+i^2+i^3)+i^4(1+i+i^2+i^3)+\cdots+$

Scanned with OKEN Scanner

$+i^{96}(1+i+i^2+i^3)+i^{100}=i^{4\cdot 25}=1$.

c. $(1+i)^{32}=\left[(1+i)^2\right]^{16}=(2i)^{16}=2^{16}\cdot i^{4\cdot 4}=2^{16}$.

2. $z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$. Deci $\operatorname{Im} z=-1$.

3. Avem $\overline{z}=\dfrac{\overline{1+2i}}{\overline{1-2i}}+\dfrac{\overline{1-2i}}{\overline{1+2i}}=\dfrac{1-2i}{1+2i}+\dfrac{1+2i}{1-2i}=z$, de unde rezultă că $z\in\mathbb{R}$.

4. Avem $|z|=\left|\dfrac{3-i}{3+i}\right|=\dfrac{|3-i|}{|3+i|}=\dfrac{\sqrt{3^2+(-1)^2}}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=1$.

5.

a. Discriminantul ecuaţiei este $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 4=4-16=-12<0$.

Obţinem astfel că $z_1=1+i\sqrt{3}$ şi $z_2=1-i\sqrt{3}$.

b. Notăm $z^2=t$ şi obţinem ecuaţia $t^2-3t+4=0$. Această ecuaţie are soluţiile $t_1=-4$, $t_2=1$. Avem acum de rezolvat ecuaţiile $z^2=-4$ şi $z^2=1$.

Obţinem soluţiile $z_1=2i$, $z_2=-2i$, $z_3=1$, $z_4=-1$.

Avem $z=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Atunci $z^{12}=\cos 8\pi+i\sin 8\pi=1$.

Funcţii şi ecuaţii

Proprietăţi algebrice ale funcţiilor (clase de funcţii)

1. Funcţia numerică $f:A\to B$ se numeşte *injectivă* dacă îndeplineşte una dintre condiţiile echivalente:
   a. $\forall x_1,x_2\in A$, cu $x_1\neq x_2$ rezultă $f(x_1)\neq f(x_2)$.
   b. Dacă $x_1,x_2\in A$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$, atunci $x_1=x_2$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Funcţia numerică $f:A\to B$ se numeşte ***surjectivă*** dacă $\forall y\in B,\exists x\in A$ astfel încât $f(x)=y$.

3. Funcţia numerică $f:A\to B$ se numeşte ***bijectivă*** dacă $\forall y\in B,\exists! x\in A$ astfel încât $f(x)=y$.

4. Funcţia $f:A\to B$ se numeşte ***inversabilă*** dacă şi numai dacă există funcţia $g:B\to A$, numită ***inversa funcţiei*** f şi notată cu f^{-1} astfel ca $\begin{cases} f\circ g=1_B \\ g\circ f=1_A \end{cases}$, adică $\begin{cases} f(g(x))=x,\forall x\in A \\ g(f(x))=x,\forall x\in B \end{cases}$, unde $1_E:E\to E,\ 1_E(x)=x,\forall x\in E$ este ***funcţia identică*** a mulţimii E.

Determinarea inversei se face, în acest caz, astfel $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

5. Funcţia $f:I\to\mathbb{R}$, unde $I\subset\mathbb{R}$ este interval, se numeşte:
   i. ***convexă pe*** I dacă şi numai dacă $\forall x_1,x_2\in I$ şi $\forall t\in[0,1]$ are loc inegalitatea $f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$;
   ii. ***concavă pe*** I dacă şi numai dacă $\forall x_1,x_2\in I$ şi $\forall t\in[0,1]$ are loc inegalitatea $f(tx_1+(1-t)x_2)\ge tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţie să fie inversabilă

O funcţie $f:A\to B$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

Interpretări algebrice şi geometrice ale claselor de funcţii

Fie $f:A\to B$ o funcţie numerică.

Clasa de funcţii	Interpretare algebrică	Interpretare geometrică
injective	ecuaţia $f(x)=y$, cu $y\in B$, arbitrar are cel mult o soluţie	orice paralelă dusă la axa Ox de ecuaţie $y=b$, cu $b\in B$ arbitrar, intersectează $\mathcal{G}_f$ în cel mult un punct
surjective	ecuaţia $f(x)=y$, cu $y\in B$, arbitrar are cel puţin o soluţie	orice paralelă dusă la axa Ox de ecuaţie $y=b$, cu $b\in B$ arbitrar, intersectează $\mathcal{G}_f$ în cel puţin un punct
bijective / inversabile	ecuaţia $f(x)=y$, cu $y\in B$, arbitrar are exact o soluţie	orice paralelă dusă la axa Ox de ecuaţie $y=b$, cu $b\in B$ arbitrar, intersectează $\mathcal{G}_f$ într-un singur punct
		graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt simetrice, unul faţă de altul, în raport cu prima bisectoare ($d: y=x$)

Funcţia putere şi funcţia radical

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ se numeşte ***funcţie putere.***

1. Funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, se numeşte ***funcţie radical de ordinul 2.***
2. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, se numeşte ***funcţie radical de ordinul 3.***

Observaţii

1. Funcţiile $f,g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definite prin $f(x)=x^2$ şi $g(x)=\sqrt{x}$ sunt ***bijective*** şi ***inverse una alteia***: $g=f^{-1}$;
2. Funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^3$ şi $g(x)=\sqrt[3]{x}$ sunt ***bijective*** şi ***inverse una alteia***: $g=f^{-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăţi ale funcţiei putere

	n număr par		n număr impar
Puncte de intersecţie cu axele de coordonate	$\mathcal{G}_f \cap Ox = \mathcal{G}_f \cap Oy = O(0,0)$		
Intervale de monotonie	$f \nearrow \Leftrightarrow x \in [0,\infty)$		$f \nearrow \ \forall x \in \mathbb{R}$
	$f \searrow \Leftrightarrow x \in (-\infty,0]$		
Puncte de extrem	$x=0$ punct de minim: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$		nu are
Imaginea funcţiei	$\text{Im } f = [0,\infty)$		$\text{Im } f = \mathbb{R}$
Soluţiile reale ale ecuaţiei $f(x)=a,\ a \in \mathbb{R}$	$a<0$	$x \in \varnothing$	$x = \sqrt[n]{a}$
	$a=0$	$x=0$	
	$a>0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$	
Injectivitate	nu		da
Surjectivitate	nu		da
Bijectivitate	nu		da
Concavitate / convexitate	convexă		convexă pe intervalul $[0,\infty)$
			concavă pe intervalul $(-\infty,0]$

Proprietăţi ale funcţiei radical (de ordinul 2 şi 3)

	n număr par		n număr impar
Puncte de intersecţie cu axele de coordonate	$\mathcal{G}_f \cap Ox = \mathcal{G}_f \cap Oy = O(0,0)$		
Intervale de monotonie	$f \nearrow \ \forall x \in [0,\infty)$		$f \nearrow \ \forall x \in \mathbb{R}$
Puncte de extrem	$x=0$ punct de minim		nu are
Imaginea funcţiei	$\text{Im } f = [0,\infty)$		$\text{Im } f = \mathbb{R}$
Soluţiile reale ale ecuaţiei $f(x)=a,\ a \in \mathbb{R}$	$a<0$	$x \in \varnothing$	$x = a^3$
	$a \geq 0$	$x = a^2$	
Injectivitate	da		da
Surjectivitate	nu		da
Bijectivitate	nu		da
Concavitate / convexitate	concavă		concavă pe $[0,\infty)$
			convexă pe $(-\infty,0]$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică

1. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$, unde $a>0$ şi $a\neq 1$ se numeşte ***funcţie exponenţială de bază*** a.
2. Funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_a x$, unde $a>0$ şi $a\neq 1$ se numeşte ***funcţie logaritmică de bază*** a.

Observaţie

Pentru $a>0$, $a\neq 1$ funcţiile $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$ şi $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_a x$ sunt ***bijective*** şi ***inverse una alteia***: $g=f^{-1}$.

Proprietăţi ale funcţiilor exponenţială şi logaritmică

	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$	$g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_a x$
Puncte de intersecţie cu axele de coordonate	$\mathcal{G}_f\cap Ox=\varnothing$	$\mathcal{G}_g\cap Ox=B(1,0)$
	$\mathcal{G}_f\cap Oy=A(0,1)$	$\mathcal{G}_g\cap Oy=\varnothing$
Monotonia funcţiilor	$f\nearrow \Leftrightarrow a>1$	$g\nearrow \Leftrightarrow a>1$
	$f\searrow \Leftrightarrow a\in(0,1)$	$g\searrow \Leftrightarrow a\in(0,1)$
Puncte de extrem	nu are	nu are
Imaginea funcţiei	$\operatorname{Im} f=(0,\infty)$	$\operatorname{Im} g=\mathbb{R}$
Soluţiile ecuaţiei $f(x)=b$, $b\in\mathbb{R}$	$b\le 0$: $x\in\varnothing$	$x=a^b$
	$b>0$: $x=\log_a b$	
Injectivitate	da	da
Surjectivitate	nu	da
Bijectivitate	nu	da
Concavitate / convexitate	convexă	$a>1$: concavă
		$a\in(0,1)$: convexă

Exemple ce conţin clase de funcţii

a. Daţi câte un exemplu (argumentat) de mulţimi $A,B\subset\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:A\to B$, $f(x)=-x^2+2x+8$ să fie:

i. injectivă;	ii. surjectivă;
iii. bijectivă;	iv. monotonă.

Scanned with OKEN Scanner

i. Ţinând cont de monotonia funcţiei de gradul al doilea şi de interpretările geometrice ale claselor de funcţii vis a vis de parabolă, vom putea alege cel mult „o jumătate de parabolă", pentru ca funcţia să fie injectivă, adică $A=\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]=(-\infty,-1]$, sau $A=\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)=[-1,\infty)$ (eventual submulţimi ale acestora) şi $B=\mathbb{R}$ („cea mai mică" mulţime B care poate fi aleasă fiind $B=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]=(-\infty,9]$).

ii. În baza aceloraşi motive ca la punctul anterior, putem lua, de exemplu, $A=\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]=(-\infty,-1]$, sau $A=\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)=[-1,\infty)$ şi $B=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]=(-\infty,9]$.

iii. Analog ca mai sus.

iv. Dacă dorim ca funcţia f să fie crescătoare putem alege $\begin{cases}A=\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]=(-\infty,-1]\\ B=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]=(-\infty,9]\end{cases}$, iar dacă f trebuie să fie descrescătoare, putem lua: $\begin{cases}A=\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)=[-1,\infty)\\ B=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]=(-\infty,9]\end{cases}$.

b. Demonstraţi că inversa funcţiei bijective $f:[4,\infty)\to(-\infty,1]$, $f(x)=2-\sqrt{x-3}$ este funcţia $g:(-\infty,1]\to[4,\infty)$, dată de $g(x)=x^2-4x+7$.

Domeniul de definiţie al funcţiei f este codomeniul funcţiei g şi invers. Mai trebuie verificat doar că: $\begin{cases}f(g(x))=x,\ \forall x\le 1\\ g(f(x))=x,\ \forall x\ge 4\end{cases}$. Vom justifica doar o singură relaţie, cealaltă demonstrându-se similar; avem, pentru orice $x\le 1$, că $f(g(x))=2-\sqrt{g(x)-3}=$

$=2-\sqrt{x^2-4x+4}=2-\sqrt{(x-2)^2}=2-\left|\underbrace{x-2}_{<0}\right|=2-(-x+2)=x$. Deci $g=f^{-1}$.

c. Se consideră funcţia $f:[1,\infty)\to[3,\infty)$, $f(x)=1+\sqrt{x+3}$.

Scanned with OKEN Scanner

i. Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

ii. Determinaţi-i inversa.

iii. Arătaţi că f este crescătoare.

i. Trebuie arătat că ecuaţia $f(x)=y$, cu $y\in[3,\infty)$ arbitrar, are o unică soluţie $x\in[1,\infty)$; într-adevăr $f(x)=y\Leftrightarrow 1+\sqrt{x+3}=y\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=y-1\Leftrightarrow x=y^2-2y-2=(y-1)^2-3$ şi cum $y\geq 3\Rightarrow$ $\Rightarrow y-1\geq 2\Rightarrow(y-1)^2\geq 4\Rightarrow x=(y-1)^2-3\geq 1$; deci $x=y^2-2y-2$ este unic cu proprietatea $f(x)=y$ şi în plus $x=y^2-2y-2\in[1,\infty)$, $\forall\, y\in[3,\infty)$. Aşadar funcţia f este bijectivă.

ii. Conform punctului anterior rezultă că $f^{-1}:[3,\infty)\to[1,\infty)$, $f^{-1}(x)=x^2-2x-2$.

iii. Pentru oricare $x_1,x_2\geq 1$ avem echivalenţele $x_1+3<x_2+3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{x_1+3}\leq\sqrt{x_2+3}\Leftrightarrow 1+\sqrt{x_1+3}\leq 1+\sqrt{x_2+3}\Leftrightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$, adică funcţia f este crescătoare.

Ecuaţii

Ecuaţii ce conţin funcţii putere

Exemple

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a. $x^3=-8$;

b. $16x^4-81=0$;

c. $x^5-3x^3-2x^2+6=0$;

d. $(2x-7)^3=27(x-4)^3$.

a. Obţinem $x=\sqrt[3]{-8}=-2$;

b. $16x^4-81=0\Rightarrow\left(4x^2-9\right)\underbrace{\left(4x^2-9\right)}_{>0}=0\Rightarrow 4x^2-9=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=\frac{9}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

c. Grupând convenabil termenii obţinem $\left(x^3-2\right)\left(x^2-3\right)=0$; deci sau $x^3-2=0$, de unde rezultă $x_1=\sqrt[3]{2}$, sau $x^2-3=0\Rightarrow x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$.

d. Prin extragerea radicalului de ordinul 3 obţinem ecuaţia echivalentă: $2x-7=3(x-4)$, cu soluţia $x=5$.

***Ecuaţii ce conţin radicali* (*ecuaţii iraţionale*)**

Exemple

Determinaţi soluţiile reale ale ecuaţiilor:

a. $\sqrt{2x-1}=3$;

b. $\sqrt[3]{3x+1}=-2$;

c. $\sqrt{3x^2-5x-1}+x=3$;

d. $2\cdot\sqrt{\frac{3x-2}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{3x-1}}=3$;

e. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4-x}=3$;

f. $\sqrt[3]{5x+3}+\sqrt[3]{6-5x}=3$;

g. $\sqrt{5-x+\sqrt[3]{x^3-7}}=2$.

a. Condiţia de existenţă a radicalului: $2x-1\geq 0$. Ridicând ecuaţia la pătrat obţinem $2x-1=9\Leftrightarrow x=5$, valoare ce verifică condiţia de existenţă.

b. Ridicând la cub va rezulta că $3x+1=-8\Leftrightarrow x=-3$.

c. Se impun condiţiile $\begin{cases}3x^2-5x-1\geq 0\\ 3-x\geq 0\end{cases}$ (a doua condiţie se impune după separarea radicalului cu scopul ridicării la pătrat şi a păstrării echivalenţei); ecuaţia devine: $\sqrt{3x^2-5x-1}=3-x\Big|^2\Leftrightarrow 3x^2-5x-1=(3-x)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-10=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{5}{2},2\right\}$, ambele valori verificând sistemul de condiţii de existenţă.

d. Condiţii de existenţă: $\begin{cases}3x+1\geq 0\\ 4-x\geq 0\end{cases}$. Ridicând la pătrat şi separând ultimul radical rămas se obţine: $\sqrt{(3x+1)(4-x)}=2-x$; ultima ridicare la pătrat, pentru a păstra echivalenţa impune condiţia suplimentară ca $2-x\geq 0$ şi va

Scanned with OKEN Scanner

rezulta că $\Leftrightarrow (3x+1)(4-x)=(2-x)^2 \Leftrightarrow 4x^2-15x=0 \Leftrightarrow x\in\left\{0,\frac{15}{4}\right\}$, din cele două valori obţinute, doar $x=0$ verificând simultan cele 3 condiţii de existenţă impuse pe parcursul rezolvării.

e. Se impun mai întâi condiţia ca $\frac{3x-2}{x+3}$ valabilă pentru existenţa ambilor radicali; se observă că cei doi radicali sunt inverşi unul altuia. Deci dacă $\sqrt{\frac{3x-2}{x+3}} \overset{not}{=} t$, cu $t>0$, va rezulta că $\sqrt{\frac{x+3}{3x-1}}=\frac{1}{t}$. Aşadar vom avea $2t+\frac{1}{t}=3 \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow t\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}$; pentru $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x-2}{x+3}}=1\Big|^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{3x-2}{x+3}=1 \Leftrightarrow x_1=\frac{5}{2}$, care verifică condiţia impusă şi pentru $t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x-2}{x+3}}=\frac{1}{2}\Big|^2 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x+3}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_2=1$ şi a doua valoare obţinută verificând şi ea condiţia de existenţă.

f. Prin ridicare la cub, în baza formulei $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, obţinem succesiv: $9+3\cdot\sqrt[3]{5x+3}\cdot\sqrt[3]{6-5x}\cdot\Big(\underbrace{\sqrt[3]{5x+3}+\sqrt[3]{6-5x}}_{=3}\Big)=27 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt[3]{(5x+3)(6-5x)}=2\Big|^3 \Leftrightarrow 5x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{2}{5},1\right\}$.

g. Condiţia de existenţă a radicalului: $5-x+\sqrt[3]{x^3-7}\geq 0$; după ridicarea la pătrat şi izolarea radicalului cubic, ecuaţia devine $\sqrt[3]{x^3-7}=x-1$, de unde, prin ridicare la puterea a treia, obţinem: $x^3-7=x^3-3x^2+3x-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,2\}$, ambele soluţii verificând condiţia de existenţă.

Ecuaţii exponenţiale

Exemple

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

Scanned with OKEN Scanner

a. $\frac{0,5\cdot 4^{x+1}}{\left(8^{-1}\right)^{x-2}}=\frac{16^{-x+1}}{2^{x+2}}$;

b. $3^{x+1}=7\cdot 3^{x-1}+2$;

c. $4^{x-2}+2^{2x-1}=9$;

d. $3^{x+1}-2^{x+2}=3^x-2^x$;

e. $2^x+3\cdot 4^x=14$;

f. $3^{x-2}+\cdot\frac{1}{3^x-8}=2$;

g. $3\cdot 5^{-x+1}+5^x=8$;

h. $3^{x+1}\cdot 2^{x-1}+36^{x-1}=10$;

i. $\frac{2^{2x-3}}{3^{x-2}}=\frac{8}{3}$;

j. $\frac{5^{x+1}}{50}=\frac{5}{2^{x-1}}$;

k. $4^x+9^x=13\cdot 6^{x-1}$;

l. $25^x+9^x=34\cdot 15^{x-1}$;

m. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x}=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-x}$;

n. $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x=6$.

a. Ecuaţia devine $2^{-1}\cdot 2^{2(x+1)}\cdot 2^{x+2}=2^{4(-x+1)}\cdot 2^{-3(x-2)}\Leftrightarrow 3x-3=-7x+10\Leftrightarrow x=\frac{13}{10}$

b. Avem $3^{x+1}=7\cdot 3^{x-1}+2\overset{3^x=t>0}{\Leftrightarrow}3t=7\cdot\frac{t}{3}+2\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x=1$ (s-a folosit în final injectivitatea funcţiei exponenţiale).

c. Dacă $2^{2x}=4^x=t>0$ rezultă că: $\frac{t}{16}+\frac{t}{2}=9\Leftrightarrow t=16\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow 2^{2x}=2^4\Leftrightarrow x=2$.

d. Separând bazele ajungem la $3\cdot 3^x-3^x=2^2\cdot 2^x-2^x\Leftrightarrow 3^x\left(3-1\right)=2^x\left(2^2-1\right)\Leftrightarrow$

$3^{x-1}=2^{x-1}\left|:2^{x-1}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}=1=\left(\frac{3}{2}\right)^0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

e. Cu notaţia $2^x=t>0$ rezultă $4^x=t^2$ şi obţinem: $3t^2+t-14=0\Leftrightarrow t\in\left\{-\frac{7}{3},2\right\}$;

convine doar $t=2>0$, din care obţinem $2^x=2^1\Leftrightarrow x=1$.

f. Mai întâi, pentru existenţa fracţiei, este necesar ca $3^x-8\neq 0\Leftrightarrow x\neq\log_3 8$; substituindu-l pe 3^x cu $t\left(t>0\right)$, vom avea $\frac{t}{9}+\frac{1}{t-8}=2\Leftrightarrow t^2-26t+153=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\in\left\{9,17\right\}$. Dacă $t_1=9$ obţinem $x_1=2$, iar dacă $t_2=17$ va rezulta $x_2=\log_3 17$.

Scanned with OKEN Scanner

g. Dacă $5^x = t > 0$ rezultă că: $3 \cdot \frac{5}{t} + t = 8 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Leftrightarrow t \in \{3,5\}$; revenind la substituţie, obţinem în final că $x_1 = 1$, $x_2 = \log_5 3$.

h. Obţinem succesiv: $\frac{3}{2} \cdot 3^x \cdot 2^x + \frac{1}{36} \cdot 36^x = 10 \Leftrightarrow 54 \cdot 6^x + 36^x = 360$, de unde, notând pe 6^x cu $t\,(t > 0)$, deci $36^x = t^2$, va rezulta $t^2 + 54t - 360 = 0 \Leftrightarrow t \in \{-60,6\}$, convine doar $t = 6 > 0$, din care obţinem $x = 1$.

i. Ecuaţia dată este echivalentă cu $\frac{9}{8} \cdot \frac{4^x}{3^x} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{64}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$.

j. Separând bazele obţinem: $\frac{5 \cdot 5^x}{5} = \frac{50 \cdot 2}{2^x} \Leftrightarrow 2^x \cdot 5^x = 100 \Leftrightarrow 10^x = 10^2 \Leftrightarrow x = 2$.

k. Cu notaţiile $\begin{cases} 2^x = a > 0 \\ 3^x = b > 0 \end{cases}$, ecuaţia se rescrie astfel: $a^2 + b^2 = \frac{13}{6} ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0 \,\Big|: b^2 \Leftrightarrow 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13 \cdot \frac{a}{b} + 6 = 0$; dacă $\frac{a}{b} \overset{not}{=} t > 0$, obţinem ecuaţia $6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$. Din $t_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Leftrightarrow x_1 = 1$

şi din $t_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x_2 = -1$.

l. Analogă rezolvarea cu cea de la punctul anterior. Fie $\begin{cases} 3^x = a > 0 \\ 5^x = b > 0 \end{cases}$; atunci ecuaţia se devine: $a^2 + b^2 = \frac{34}{15} ab \Leftrightarrow 15a^2 - 34ab + 15b^2 = 0 \,\Big|: b^2 \Leftrightarrow 15\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 34 \cdot \frac{a}{b} + 15 = 0$;

dacă $\frac{a}{b} \overset{not}{=} t > 0$, obţinem $15t^2 - 34t + 15 = 0$, cu soluţiile $t \in \left\{\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right\}$. Deci

$t_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \Leftrightarrow x_1 = 1$; $t_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x_2 = -1$

m. Se observă că $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{-1}$, deci $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{2x} =$

$= \left(\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{-1}\right)^x = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{-x}$, aşadar ecuaţia admite o infinitate de soluţii: $x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

n. Cele două funcţii exponenţiale care conţin necunoscuta sunt conjugate una alteia şi, în plus, au produsul egal cu $\left(\sqrt{2}-1\right)^x\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\left(\underbrace{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}_{=1}\right)^x=1$, deci sunt inverse; prin urmare, dacă $\left(\sqrt{2}-1\right)^x\overset{not}{=}t\Rightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\frac{1}{t}$, unde $t>0$. Obţinem ecuaţia $t+\frac{1}{t}=6\Leftrightarrow t^2-6t+1=0\Leftrightarrow t=3\pm2\sqrt{2}>0$; dacă $t_1=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Rightarrow$ $\Rightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^x=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Rightarrow x_1=2$, iar $t_2=\left(\sqrt{2}-1\right)^x=3+2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{-2}\Rightarrow x_2=-2$

2. Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele $3^{2x-1},9^x-3$ şi 3^x+6 să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Cerinţa din enunţ este echivalentă cu $2\left(9^x-3\right)=3^{2x-1}+\left(3^x+6\right)$. Notând $3^x=t>0$, obţinem ecuaţia $2\left(t^2-3\right)=\frac{t^2}{3}+t+6\Leftrightarrow5t^2-3t-36=0\Leftrightarrow t\in\left\{-\frac{12}{5},3\right\}$; cum $t>0$, rămâne doar soluţia $t=3\Leftrightarrow3^x=3^1\Leftrightarrow x=1$.

Ecuaţii logaritmice

Exemple

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a. $\log_2\left(3x^2-x-2\right)=3$;

b. $\log_2(3x-2)+\log_2(x+2)=4$;

c. $\log_3\left(2x^2+1\right)-\log_3(x+1)=1$;

d. $\log_5(x+1)-2\log_5(3x-7)=-1$;

e. $\log_3(9x)-3\log_{27}x=2$;

f. $\log_2^2(2x)+3\log_2(4x)=13$;

g. $\log_x(9x)+\log_3x=4$;

h. $\log_3\left(9^x-6\right)=x$;

i. $x^{\log_2(4x)}=8$;

j. $(3x)^{1+\log_3x}=81$;

a. Condiţia de existenţă: $3x^2-x-2>0$. Ecuaţia devine $3x^2-x-2=2^3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow3x^2-x-10=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{5}{3},2\right\}$, ambele soluţii verificând condiţia.

Scanned with OKEN Scanner

b. Condiţii: $\begin{cases} 3x-2>0 \\ x+2>0 \end{cases}$. Ecuaţia se scrie: $\log_2\left((3x-2)(x+2)\right)=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x-2)(x+2)=16 \Leftrightarrow 3x^2+4x-20=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{10}{3},2\right\}$; din cele două soluţii obţinute, doar $x=2$ verifică sistemul iniţial de condiţii.

c. Condiţii: $\begin{cases} 2x^2+1>0 \\ x+1>0 \end{cases}$. Obţinem $\log_3\left(\frac{2x^2+1}{x+1}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{x+1}=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},2\right\}$, ambele soluţii verificând condiţiile.

d. Sunt necesare următoarele condiţii de existenţă $\begin{cases} x+1>0 \\ 3x-7>0 \end{cases}$; vom avea:

$\log_5\left(\frac{x+1}{(3x-7)^2}\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(3x-7)^2}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 9x^2-47x+44=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{11}{9},4\right\}$;

din cele două soluţii convine doar $x=4$.

e. $x>0$ pentru existenţa ambilor logaritmi. Ecuaţia devine succesiv: $2+\log_3 x-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\log_3 x=2 \Leftrightarrow 2=2$. Deci orice $x>0$ este soluţie a ecuaţiei.

f. Condiţia de existenţă: $x>0$; avem: $(1+\log_2 x)^2+3(2+\log_2 x)=13$ şi notând $\log_2 x=t$ va rezulta că $t^2+5t-6=0 \Leftrightarrow t\in\{-6,1\}$. Revenind la substituţie, obţinem în final că $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{64}$.

g. Impunem condiţiile: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$. Vom avea că: $1+\log_x 9+\log_3 x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\log_3 x}+\log_3 x=3 \overset{\log_3 x=t}{\Leftrightarrow} t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow t\in\{1,2\} \Leftrightarrow x\in\{3,9\}$.

h. Pentru existenţa logaritmului este necesar ca $9^x-6>0$. Ecuaţia dată este echivalentă cu $9^x-6=3^x \overset{3^x=t>0}{\Leftrightarrow} t^2-t-6=0 \Leftrightarrow t\in\{-2,3\}$; convine doar $t=3$, din care se obţine în final că $x=1$, valoare ce verifică condiţia iniţială.

Scanned with OKEN Scanner

i. Condiţia: $x>0$. Logaritmând ecuaţia în baza 2 rezultă: $\log_2\left(x^{\log_2(4x)}\right)=\log_2 8 \Leftrightarrow$

$(2+\log_2 x)\log_2 x=3 \overset{\log_2 x=t}{\Leftrightarrow} t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t\in\{-3,1\} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{8},2\right\}$.

j. Condiţia: $x>0$. Logaritmând în baza 3 rezultă: $\log_3\left((3x)^{1+\log_3 x}\right)=\log_3 81 \Leftrightarrow$

$(1+\log_3 x)(1+\log_3 x)=4 \overset{\log_3 x=t}{\Leftrightarrow} t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t\in\{-3,1\} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{27},3\right\}$.

2. Determinaţi $x>2$ astfel încât numerele $\log_2(x-2), \log_2 x$ şi $\log_2(x+4)$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Cerinţa din enunţ este echivalentă cu $2\log_2 x=\log_2(x-2)+\log_2(x+4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2=\log_2\left((x-2)(x+4)\right) \Leftrightarrow x^2=x^2+2x-8 \Leftrightarrow x=4$.

Probleme de numărare. Elemente de combinatorică

Mulţimi finite ordonate şi neordonate

Multe probleme practice fac apel la numărarea (determinarea) de mulţimi finite, în care contează sau nu contează ordinea în care sunt scrise elementele acestora; din perspectiva acestui capitol, şi-n special a problemelor de numărare, distingem:

1. ***mulţimi finite*** (***neordonate***), în sensul clasic că ***nu contează decât elementele componente şi nicidecum ordinea de dispunere a acestora***, adică: $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}=\left\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\ldots,a_{\sigma(n)}\right\}$, pentru orice permutare $\sigma\in S_n$ (de exemplu: $\{a,b,c\}=\{a,c,b\}=\{b,a,c\}=\{b,c,a\}=\{c,a,b\}=\{c,b,a\}$);

2. ***mulţimi finite*** (***ordonate***), în care are importanţă atât ***care sunt elementele componente ale mulţimii, dar şi ordinea de dispunere a acestora***, în sensul că: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq\left(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\ldots,a_{\sigma(n)}\right)$, pentru orice permutare $\sigma\in S_n\setminus\{e\}$ (de exemplu în acest context: $(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$ sunt, oricare două, diferite).

Scanned with OKEN Scanner

Există însă câteva principii (reguli) utile în abordarea problemelor de numărare, expuse în cele ce urmează:

Limbaj	Operaţia logică corespunzătoare	Operaţia cu mulţimi corespunzătoare	Principiul de numărare	Operaţia algebrică corespunzătoare
SAU	$\vee$	$\cup$	REGULA SUMEI	$+$
ŞI	$\wedge$	$\cap$	REGULA PRODUSULUI	$\cdot$

Regula sumei: Dacă un obiect A poate fi ales în m moduri, iar un obiect B poate fi ales în n moduri, astfel încât nicio alegere a lui A să nu coincidă cu nicio alegere a lui B, atunci alegerea „lui A sau B" poate fi realizată în $m+n$ moduri.

Regula produsului: Dacă un obiect A poate fi ales în m moduri, iar după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A,B) poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

Cele trei rezultate fundamentale care guvernează, alături de cele două reguli de mai sus, problemele de numărare sunt următoarele:

***CONTEXT*: Dintr-o mulţime cu n elemente, se cere formarea de grupe de câte k elemente ($n,k \in \mathbb{N}$). Atunci:**

	Contează ordinea de dispunere a celor k elemente în cadrul unei grupe?	Numărul grupelor ce se pot forma
Dacă cele k elemente ale fiecărei grupe sunt distincte ($k \leq n$)	DA	A_n^k
	NU	C_n^k
Dacă cele k elemente ale fiecărei grupe nu sunt neapărat distincte	DA	n^k

Scanned with OKEN Scanner

Factorialul. Permutări. Aranjamente. Combinări. Proprietăţi

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $n! \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Prin convenţie $0! = 1$.

Exemple

1. Calculaţi:

a. $3!$; b. $\frac{6!}{4!}$;

c. $\frac{(2010!)^2}{2011! \cdot 2009!}$; d. $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}, n \in \mathbb{N}^*$.

a. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

b. $\frac{6!}{4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$;

c. $\frac{(2010!)^2}{2011! \cdot 2009!} = \frac{2010! \cdot 2009! \cdot 2010}{2010! \cdot 2011 \cdot 2009!} = \frac{2010}{2011}$;

d. $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(n-1)!} = n(n+1)(n+2)$.

2. Rezolvaţi următoarele ecuaţii, inecuaţii şi sisteme de ecuaţii:

a. $\frac{(n+2)!}{n!} = 30$; b. $n! + 5(n-1)! + (n+1)! = \frac{(n+2)!}{n}$;

c. $\frac{1}{n!} + \frac{n-1}{(n+1)!} = \frac{5n^2 - 3n + 2}{(n+2)!}$; d. $\begin{cases} 3x! = y! \\ (x+1)! = x! \cdot y \end{cases}$;

e. $(2n-3)! < 30$ f. $n! + 2(n-1)! \leq 10$.

Scanned with OKEN Scanner

a. $n\in\mathbb{N}$. Obţinem $\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!}=30\Leftrightarrow n^2+3n-28=0\overset{n\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} n=4$.

b. $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n(n-1)!+5(n-1)!+(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)=(n-1)!(n+1)(n+2)$, şi, după ce împărţim ecuaţia la $(n-1)!$, obţinem $n+5+n(n+1)=$ $=(n+1)(n+2)\Leftrightarrow n=3$.

c. Avem $n\in\mathbb{N}$. Numitorul comun este $(n+2)!$. Aducând ecuaţia la acelaşi numitor comun obţinem: $(n+1)(n+2)+(n+2)=5n^2-3n+2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4n^2-7n-2=0\Rightarrow n=2$.

d. Este clar că $x,y\in\mathbb{N}$. Din a doua ecuaţie rezultă că $x+1=y$, relaţie care, înlocuită în prima ecuaţie, ne conduce la $3x!=(x+1)!\Leftrightarrow x+1=3\Leftrightarrow x=2$ şi deci $y=3$. Aşadar perechea $(2,3)$ este singura soluţie a sistemului.

e. Pentru existenţa factorialului este necesar ca $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$; ţinând seama de faptul că $4!<30<5!$, obţinem $2n-3<4\Leftrightarrow n\leq\frac{7}{2}$. Cum însă $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, va rezulta la final că $n\in\{2,3\}$.

f. Analog ca la punctul anterior trebuie să avem $n\in\mathbb{N}^*$; inecuaţia devine $(n-1)!(n+2)\leq 10$ şi, prin verificare, vom obţine $n\in\{1,2,3\}$.

Aranjamente. Permutări. Combinări

CONTEXT: Fie M o mulţime finită cu n elemente şi $k\in\mathbb{N}$, $k\leq n$. Se pot forma trei categorii de submulţimi ale lui M, descrise mai jos:

	Aranjamente	*Permutări*	*Combinări*
Definiţie	toate submulţimile ordonate de k elemente ale lui M	toate submulţimile ordonate de n elemente ale lui M	toate submulţimile de k elemente ale lui M
Notaţie pt. nr. tuturor acestor submulţimi	A_n^k	P_n	C_n^k
Formulă de calcul	$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$	$P_n=n!$	$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii

1. A_n^k şi C_n^k sunt numere naturale nenule.
2. Condiţiile de existenţă pentru A_n^k şi C_n^k sunt: $\begin{cases} n,k \in \mathbb{N} \\ k \le n \end{cases}$.
3. Permutările sunt cazuri particulare de aranjamente şi anume: $k = n$.

Formule

1. ***Formula combinărilor complementare***: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
   i. Consecinţă: $C_n^a = C_n^b \Leftrightarrow a = b$ sau $a + b = n$.
2. ***Formula de recurenţă a combinărilor***: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
3. ***Numărul tuturor submulţimilor mulţimii*** M:
   $\left|\mathcal{P}(M)\right| = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Binomul lui Newton

Fie numerele reale a şi b şi numărul natural nenul n. Avem:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Termenul de rang k din suma precedentă este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.

Între termenii de rang k şi $k+1$ există relaţia $T_{k+1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot T_k$.

Exemple

1. Să se determine termenul care nu conţine pe x din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$.
2. Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(1+\sqrt{3}\right)^5$.
3. Să se determine rangul celui mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right)^{100}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2+\sqrt{x}\right)^{20}$. Să se determine rangul termenului care conţine pe x^{22}.
5. Să se determine numărul termenilor iraţionali din dezvoltarea $\left(2+\sqrt[3]{2}\right)^{2013}$.
6. Demonstraţi că au loc următoarele egalităţi:
   a. $C_3^2 - A_3^2 + P_3 = 3$;
   b. $C_{2011}^{1005} - C_{2010}^{1005} - C_{2010}^{1004} = 0$;
   c. $\left(C_2^0\right)^2 + \left(C_2^1\right)^2 + \left(C_2^2\right)^2 = C_4^2$;
   d. $C_{2011}^{2010} \cdot P_{2010} = A_{2011}^{2010}$.
7. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:
   e. $C_n^1 + C_n^2 = 6$;
   f. $\frac{P_n}{(n-2)!} + A_n^2 = 12$;
   g. $C_n^2 = C_n^{n-3}$;
   h. $A_n^3 \le 120$.
8. În câte moduri pot fi amestecate cifrele numărului 12345 pentru a obţine numere pare?
9. Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
   a. Câte numere de trei cifre se pot forma cu elemente ale mulţimii A ?
   b. Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elemente din A ?
   c. Determinaţi numărul tuturor numerelor formate din trei cifre nedistincte.
   d. Câte submulţimi cu cel puţin 5 elemente se pot forma?
   e. Câte submulţimi de 4 elemente nu-l conţin pe 1?
   f. Determinaţi numărul submulţimilor care au un număr impar de elemente.
   g. Câte numere divizibile cu 5 au toate cele 4 cifre în mulţimea A ?
   h. Aflaţi numărul numerelor de 3 cifre impare şi distincte care se pot forma cu elemente ale mulţimii A.
   i. Câte numere de 3 cifre distincte, al căror produs este egal cu 30, se pot forma?
   j. Determinaţi numărul tripletelor formate din numere aflate în progresie aritmetică care se pot forma cu elemente ale mulţimii A.
10. Pe două drepte paralele d_1 şi d_2 se consideră punctele $A_1, A_2, \ldots, A_8 \in d_1$ şi $B_1, B_2, \ldots, B_{10} \in d_2$.
    a. Câte drepte se pot obţine unind două din punctele date?
    b. Câte segmente se pot forma prin unirea a două din cele 18 puncte date?
    c. Câţi vectori îşi au extremităţile în mulţimea celor 18 puncte?
    d. Câte triunghiuri îşi au vârfurile în cele 18 puncte?

Scanned with OKEN Scanner

e. Câte patrulatere se pot forma, unind câte 4 din cele 18 puncte?

1. Avem $T_{k+1}=C_9^k\left(x^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_9^k x^{18-3k}$. Pentru ca termenul T_{k+1} să nu conţină pe x, trebuie ca $18-3k=0$, de unde obţinem $k=6$. Prin urmare, termenul T_7 nu conţine pe x.

2. Avem $T_{k+1}=C_5^k 1^{5-k}\sqrt{3}^k=C_5^k 3^{\frac{k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Impunem condiţia $\frac{k}{2}\in\mathbb{N}$ şi obţinem $k\in\{0,2,4\}$. Prin urmare, dezvoltarea are 3 termeni raţionali.

3. Din relaţia de recurenţă între termenii T_{k+1} şi T_k rezultă că $\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{4}{3}\cdot\frac{100-k+1}{k}=\frac{404-4k}{3k}$.

Să presupunem că T_{k+1} este cel mai mare termen. Atunci $\frac{404-4k}{3k}\geq 1$ şi obţinem $k\leq 57$.

Pentru $k\leq 57$ avem $T_{k+1}\geq T_k$, iar pentru $k\geq 57$ avem $T_{k+1}\leq T_k$. Prin urmare, cel mai mare termen se obţine pentru $k=57$, adică termenul T_{58}.

4. Termenul general este $T_{k+1}=C_{20}^k\left(x^2\right)^{20-k}\sqrt{x}^k=C_{20}^k x^{\frac{80-3k}{2}}$. Din condiţia $\frac{80-3k}{2}=22$ se obţine $k=12$. Rangul termenului care conţine pe x^{22} este $k+1=13$.

5. Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1}=C_{2013}^k 2^{2013-k}\sqrt[3]{2}^k=C_{2013}^k 2^{2013-k+\frac{k}{3}}$. Termenii raţionali sunt daţi de condiţiile $\frac{k}{3}\in\mathbb{N}$ şi $k\in\{0,1,2,\ldots,2013\}$, adică vom avea 671 termeni raţionali. Prin urmare, avem $2014-671=1343$ termeni iraţionali.

6.

a. Avem $C_3^2-A_3^2+P_3=\frac{3!}{2!\cdot 1!}-\frac{3!}{1!}+3!=3$.

b. Din formula de recurenţă a combinărilor obţinem: $C_{2011}^{1005}=C_{2010}^{1005}+C_{2010}^{1004}$, de unde concluzia.

c. Prin calcul: $\left(C_2^0\right)^2+\left(C_2^1\right)^2+\left(C_2^2\right)^2=1^2+2^2+1^2=6$ şi $C_4^2=6$.

Scanned with OKEN Scanner

d. Din formula de calcul a combinărilor rezultă $C_n^k \cdot P_k = A_n^k$ şi pentru $n = 2011$ şi $k = 2010$ obţinem concluzia, sau prin calcul direct.

7.

a. Din condiţii rezultă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Aplicând formula de calcul a combinărilor obţinem: $n + \frac{n(n-1)}{2} = 6 \Leftrightarrow n^2 + n - 12 = 0 \Rightarrow n = 3$.

b. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; avem $\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 12 \Leftrightarrow n^2 - n - 6 = 0 \Rightarrow n = 3$.

c. Pentru existenţa combinărilor este necesar ca $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; avem posibile, conform consecinţei, următoarele situaţii: $n - 3 = 2$, adică $n = 5$ sau $2 + (n-3) = n$, fals. Deci $n = 5$.

d. Trebuie ca $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Avem: $(n-2)(n-1)n \leq 120$; pentru $n \geq 7$ inegalitatea anterioară este falsă. Prin urmare $n \in \{3,4,5,6\}$.

8. Numerele pare care se pot obţine se termină în 2 sau în 4; în fiecare din cele două cazuri restul de 4 cifre pot fi permutate în 4! moduri. Conform regulii sumei, vom avea în total $4! + 4! = 48$ de numere.

9.

a. Avem numere de forma $\overline{abc}$, unde $a, b, c \in \{1,2,\ldots,7\}$ pot fi alese, conform regulii produsului, în $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ moduri; deci avem 343 de astfel de numere.

b. Numărul cerut reprezintă numărul tuturor submulţimilor ordonate de 3 elemente ce pot fi formate cu cele 7 elemente din mulţimea A, adică $A_7^3 = 210$ numere.

c. Numărul cerut este diferenţa dintre cele două categorii de numere aflate la punctele anterioare, adică $343 - 210 = 133$ de numere.

d. Putem forma submulţimi cu 5, 6 sau 7 elemente ale mulţimii A, mai exact $C_7^5 = 21$ submulţimi cu 5 elemente, $C_7^6 = 7$ submulţimi cu 6 elemente sau $C_7^7 = 1$ submulţime cu 7 elemente; deci, conform regulii sumei, există $C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 21 + 7 + 1 = 29$ astfel de submulţimi.

e. Submulţimile cerute trebuie să aibă 4 elemente din mulţimea $B = A \setminus \{1\} = \{2,3,\ldots,7\}$, deci sunt în număr $C_6^4 = 15$ submulţimi.

f. Sunt submulţimi cu 1, 3, 5 sau 7 elemente, deci în total $C_7^1 + C_7^3 + C_7^5 + C_7^7 = 7 + 35 + 21 + 1 = 64$ de submulţimi.

Scanned with OKEN Scanner

g. $\overline{abcd} \vdots 5 \overset{d\in A}{\Leftrightarrow} d=5$; restul cifrelor, a,b,c, sunt din mulţimea $C=A\setminus\{5\}$, care are 6 elemente; prin urmare vor fi, în baza regulii produsului, $6\cdot 6\cdot 6=216$ de numere.

h. Avem numere de forma $\overline{abc}$, unde $a,b,c\in\{1,3,5,7\}$, distincte; aşadar sunt $A_4^3=24$ de numere.

i. Dacă numerele cerute au forma $\overline{abc}$, cu a,b,c cifre distincte din mulţimea $\{1,2,\ldots,7\}$, care verifică relaţia $a\cdot b\cdot c=30$, atunci $\{a,b,c\}=\{1,5,6\}$ (în total $A_3^3=P_3=3!=6$ numere) sau $\{a,b,c\}=\{2,3,5\}$ (în total $A_3^3=P_3=3!=6$ numere); prin urmare, conform regulii sumei, vor fi $6+6=12$ astfel de numere.

j. Există triplete de numere aflate în progresie aritmetică de raţie 1: $(1,2,3),(2,3,4),\ldots,(5,6,7)$, sau de raţie 2: $(1,3,5),(2,4,6),(3,5,7)$, sau de raţie egală cu 3: $(1,4,7)$; în total există 9 astfel de triplete.

10.

a. La cele 2 drepte date d_1 şi d_2 se adaugă dreptele de forma A_iB_j, unde $i=\overline{1,8}$ şi $j=\overline{1,10}$, formate prin unirea oricărui punct de pe d_1 cu orice punct de pe d_2, acestea fiind în număr de $C_8^1\cdot C_{10}^1=80$. Aşadar vor fi în total $80+2=82$ de drepte.

b. În cazul determinării numărului de segmente ce se pot forma, acestea reprezintă de fapt numărul tuturor submulţimilor de 2 elemente (cele două puncte ce constituie extremităţile fiecărui segment) care se pot obţine dintr-o mulţime cu 18 elemente (cele 18 puncte aflate pe cele două drepte), adică $C_{18}^2=153$ segmente.

c. Numărul vectorilor îl putem gândi ca fiind dublul numărului de segmente de la punctul anterior, adică 306, fie acesta reprezintă, de fapt, numărul tuturor submulţimilor ordonate de 2 elemente ce se pot forma dintr-o mulţime cu 18 elemente, adică $A_{18}^2=306$.

d. Putem găsi 2 categorii de triunghiuri: unele care-şi au 2 vârfuri pe dreapta d_1 şi celălalt vârf pe dreapta d_2, în număr de $C_8^2\cdot C_{10}^1=280$, sau altele care au 2 vârfuri pe dreapta d_2 şi un vârf pe dreapta d_1, în număr de $C_8^1\cdot C_{10}^2=360$. Conform regulii sumei vor exista în total $280+360=640$ de triunghiuri.

Scanned with OKEN Scanner

e. Pentru a obţine patrulatere singura posibilitate este să alegem 2 puncte pe dreapta d_1 şi 2 puncte pe dreapta d_2; conform regulii produsului vom obţine $C_8^2 \cdot C_{10}^2 = 1260$ de patrulatere.

Observaţie

În rezolvarea de probleme de numărare a funcţiilor de un anumit tip (injective, bijective, strict crescătoare, pare, etc.), pot fi utile şi formulele de mai jos.

Fie pentru aceasta $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ şi $B=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ domeniul de definiţie, respectiv codomeniul, fiecărei clase de funcţii în parte. Evident că $|A| = \text{card}\, A = n$ şi $|B| = \text{card}\, B = m$.

Atunci:

	Condiţii suplimentare asupra mulţimilor A şi B	Numărul funcţiilor
Funcţii oarecare	-	m^n
Funcţii injective	$n \le m$	A_m^n
Funcţii bijective	$n = m$	$A_n^n = P_n = n!$
Funcţii strict crescătoare (sau strict descrescătoare)	$n \le m$	C_m^n
Funcţii strict monotone	$n \le m$	$2 \cdot C_m^n$
Funcţii impare (sau impare)	A este mulţime simetrică ($\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$)	$m^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$

Elemente de calcul financiar

Procente

Relaţia $\frac{p}{100} \cdot a = b$ este utilă în rezolvarea problemelor de tipul următor:

a. aflarea a $p\%$ dintr-un număr dat a;

b. aflarea unui număr dat a când se cunoaşte $p\%$ din el;

Scanned with OKEN Scanner

c. aflarea raportului procentual.

Dobânzi

Dobânda simplă este dobânda calculată pentru suma depusă, pe toată perioada depunerii şi se notează cu D.

Procentul dobânzii sau ***rata dobânzii*** reprezintă dobânda care se plăteşte pentru suma de 100 unităţi monetare pe timp de un an şi se notează cu p.

Dobânda simplă se calculează după relaţia $D = S_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n$, unde S_0 este suma depusă iniţial, p este procentul dobânzii, iar n este perioada depunerii (numărul de ani).

O sumă este depusă cu ***dobânda compusă*** (capitalizare) dacă, la sfârşitul perioadei se adaugă dobânda simplă a acestei perioade la suma respectivă pentru a produce, la rândul ei dobândă în perioada următoare. Dobânda compusă se notează cu d.

După n ani o sumă S_0 plasată cu o dobândă compusă d devine $S_n = S_0(1+d)^n$.

Exemple

1. Un produs costă 120 de lei: Cu ce procent trebuie ieftinit produsul pentru ca noul preţ să fie de 84 de lei.
2. Determinaţi valoarea dobânzii obţinută de o persoană care a depus la o bancă suma de 180 de lei, iar după un an are în cont 207 de lei.
3. Un produs costă 100 de lei. După o scumpire cu 10%, urmează o ieftinire, astfel încât preţul devine 99 de lei. Determinaţi procentul reducerii de preţ.
4. În perioada sărbătorilor de iarnă preţul unui produs care costa 120 de lei devine 78 de lei. Determinaţi procentul reducerii de preţ.
5. O persoană depune la bancă 120 de lei. Ce sumă de bani va avea în cont persoana respectivă după 2 ani de zile, ştiind că banca acordă o dobândă simplă de 5% pe an?
6. Care este dobânda compusă după 2 ani de zile ce va fi obţinută de o persoană care a depus la o bancă suma de 200 de lei, ştiind că în contul acelei persoane există, după cei 2 ani, suma de 241 de lei?

1. Fie p procentul cerut. Atunci $120 - \frac{p}{120} \cdot 120 = 84 \Rightarrow p = 30\%$.

2. Fie D dobânda băncii. Atunci $180 + \frac{D}{100} \cdot 180 = 207 \Rightarrow D = 15\%$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie p procentul reducerii de preţ. După scumpire produsul va costa $100+\frac{10}{100}\cdot 100=110$ lei. Atunci $110-\frac{p}{100}\cdot 110=99\Rightarrow p=10\%$.

4. Fie p procentul reducerii. Atunci $120-\frac{p}{100}\cdot 120=78\Rightarrow p=35\%$.

5. Suma din cont după 2 ani de zile va fi: $120+2\cdot\frac{5}{100}\cdot 120=132$.

6. Fie d procentul dobânzii compuse; deci $241=200(1+d)^2\Rightarrow d=10\%$.

Probabilităţi

Fie U o mulţime (numită ***univers***) şi E părţile mulţimii U. Elementele lui E se numesc ***evenimente***. Fie $P:\mathsf{E}\to[0,1]$. Tripletul (U,E,P) se numeşte ***câmp de probabilitate*** dacă oricare ar fi A şi B evenimente din E, avem:

a. $P(\varnothing)=0$;

b. $A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)$;

c. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$;

d. $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Observaţie

Într-un câmp de evenimente egal probabile (U,P), $\forall\, A\in\mathsf{E}$ avem $P(A)=\frac{|A|}{|U|}$, adică

$$P(A)=\frac{\text{nr. cazurilor favorabile evenimentului}}{\text{nr. total de cazuri}}.$$

Exemple

1. Determinaţi probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $\left\{C_5^k \,\middle|\, k\in\mathbb{N},\, k\le 5\right\}$, acesta să fie divizibil cu 5.
2. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinaţi probabilitatea ca alegând o submulţime a lui A, aceasta să aibă 3 elemente.
3. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr natural n, acesta să verifice relaţia $C_3^n \mid A_3^n$.
4. Într-o urnă sunt 10 bile albe şi 8 bile negre. Determinaţi probabilitatea ca extrăgând simultan 2 bile, acestea să fie albe.

Scanned with OKEN Scanner

5. Care este probabilitatea ca alegând un număr de două cifre distincte din mulţimea $A=\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă ambele cifre impare.
6. Determinaţi probabilitatea ca alegând o funcţie $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3,4\}$, aceasta să fie injectivă.

1. Deoarece $C_5^0=C_5^5=1, C_5^1=C_5^4=5, C_5^2=C_5^3=10$, rezultă că mulţimea are 3 elemente, dintre care doar două sunt multipli de 5. Deci probabilitatea cerută va fi egală cu $\frac{2}{3}$.
2. Cazurile favorabile sunt acelea în care submulţimea extrasă are 3 elemente, adică sunt în număr de $C_5^3=10$; numărul total de cazuri reprezintă numărul tuturor submulţimilor lui A, adică $2^{|A|}=2^5=32$. Aşadar $P=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.
3. Din condiţiile de existenţă: $n\in\mathbb{N}, n\le 3$. Cum pentru orice numere $n,k\in\mathbb{N}, k\le n$ avem $A_n^k=C_n^k\cdot P_k\Rightarrow C_n^k \mid A_n^k$, obţinem $n\in\{0,1,2,3\}$. Deci $P=\frac{4}{4}=1$.
4. Cazurile favorabile sunt acelea în care cele 2 bile se extrag doar din cele 10 bile albe, existente în urnă, adică sunt în număr de $C_{10}^2=45$; numărul total de cazuri reprezintă numărul tuturor posibilităţilor de a extrage 2 bile din cele 18, câte sunt în urnă, adică $C_{18}^2=153$. Prin urmare probabilitatea va fi egală cu $P=\frac{45}{153}=\frac{15}{31}$.
5. Cifrele impare ale lui A sunt elementele mulţimii $B=\{1,3,5\}$; deci numărul cazurilor favorabile va fi numărul tuturor submulţimilor ordonate de 2 elemente ce pot fi formate cu elemente ale lui B, adică $A_3^2=6$; numărul total de cazuri reprezintă numărul tuturor submulţimilor ordonate de 2 elemente ce se pot extrage din mulţimea A, adică $A_5^3=60$. Aşadar probabilitatea va fi egală cu $P=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$.
6. Numărul funcţiilor injective este egal cu $A_5^3=60$ şi numărul total de funcţii este $5^3=125$. Aşadar probabilitatea cerută va fi egală cu $P=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$.

Scanned with OKEN Scanner

Geometrie

Axa reprezintă o dreaptă din plan pe care s-au fixat o ***origine***, un ***sens*** şi o ***unitate de măsură***.

Sistemul format din două axe ortogonale (perpendiculare) Ox şi Oy, care au aceeaşi origine (punctul O) se numeşte ***reper cartezian în plan*** şi se notează cu xOy.

$Ox = \{ M(x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$ se numeşte ***axa absciselor***;

$Oy = \{ M(0,y) \mid y \in \mathbb{R} \}$ se numeşte ***axa ordonatelor***.

Oricărui punct M din planul $\mathcal{P}$ i se asociază unica pereche $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, unde x desemnează coordonata proiecţiei punctului M pe axa Ox şi se numeşte ***abscisa punctului*** M, iar y reprezintă coordonata proiecţiei punctului M pe axa Oy şi se numeşte ***ordonata punctului***.

Dreptele în plan se împart în trei categorii:

- ***orizontale*** (paralele cu axa Ox); acestea au ca ecuaţii $d: y = a, a \in \mathbb{R}$;
- ***verticale*** (paralele cu axa Oy); acestea au ca ecuaţii $d: x = b, b \in \mathbb{R}$;
- ***oarecare*** sau ***oblice*** (cele care nu sunt paralele nici cu axa Ox, nici cu axa Oy); acestea au ca ecuaţii $d: y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0$.

Panta unei drepte.

Dacă d este o dreaptă care nu e verticală, atunci ***panta dreptei*** d reprezintă numărul real definit prin:

$$m_d = \operatorname{tg} \alpha,$$

unde α este unghiul format de dreapta d cu axa Ox şi măsurat în sens trigonometric.

Scanned with OKEN Scanner

Geometrie analitică

	Elemente date în ipoteză	Formula
Distanţa dintre două puncte	$A(x_A,y_A), B(x_B,y_B) \in d$	$d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
Coordonatele mijlocului unui segment	$M(x_M,y_M)$ este mijlocul segmentului AB, $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B)$	$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$
Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat	$M(x_M,y_M)\in(AB)$, $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B)$ şi $\dfrac{MA}{MB}=k$	$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+kx_B}{k+1} \\ y_M=\dfrac{y_A+ky_B}{k+1} \end{cases}$
Coordonatele centrului de greutate al unui triunghi	$G(x_G,y_G)$ este centrul de greutate al ΔABC, de vârfuri $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$	$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$

Proprietăţi ale pantei

Panta dreptei determinată de 2 puncte	$m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A},\ x_A\neq x_B$
Condiţia de paralelism a două drepte (care nu sunt verticale)	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}$
Condiţia de perpendicularitate a două drepte	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1$
Condiţia de paralelism a unei drepte cu axa Ox	$d \parallel Ox \Leftrightarrow m_d=0$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Diverse forme ale ecuaţiei dreptei în plan

Tipul de ecuaţie a dreptei	Elemente date în ipoteză	Ecuaţia dreptei
Ecuaţia dreptei printr-un punct şi pantă	$A(x_A, y_A) \in d$ şi $m_d \in \mathbb{R}$	$d: y - y_A = m_d(x - x_A)$
Ecuaţia dreptei prin două puncte	$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \in d$ unde $x_A \neq x_B$ şi $y_A \neq y_B$	$d: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$
Ecuaţia carteziană implicită a dreptei	- panta $m \in \mathbb{R}$ şi n - ordonata la origine $A(0, n) \in d \cap Oy$	$d: y = mx + n$
Ecuaţia generală a dreptei	-	$d: ax + by + c = 0$

Poziţii relative a două drepte în plan

Ecuaţia generală a dreptelor	$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$
Drepte egale (suprapuse)	$d_1 = d_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_k = \alpha b_k$, $k \in \{1,2,3\}$ sau $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Drepte paralele	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
Drepte secante	$d_1 \cap d_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
Drepte ortogonale (perpendiculare)	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

Observaţii

1. Rezolvarea sistemului format din ecuaţiile a două drepte stabileşte poziţia acestora una faţă de cealaltă:

Scanned with OKEN Scanner

a. ***Dacă sistemul are soluţie unică, atunci dreptele*** d_1 ***şi*** d_2 ***sunt secante*** şi soluţia sistemului reprezintă coordonatele punctului lor de intersecţie;

b. ***Dacă sistemul nu are soluţie, atunci dreptele*** d_1 ***şi*** d_2 ***nu au puncte comune, deci sunt paralele***;

c. ***Dacă sistemul admite o infinitate de soluţii, atunci dreptele*** d_1 ***şi*** d_2 ***sunt suprapuse (coincid).***

2. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un punct $M(x_M, y_M)$ să aparţină unei drepte de ecuaţie $d: ax+by+c=0$, este ca cele două coordonate ale sale să verifice ecuaţia dreptei, adică: $ax_M + by_M + c = 0$.

3. Pentru demonstrarea concurenţei a trei drepte, de ecuaţii date, se poate determina punctul de intersecţie a două dintre ele şi apoi se verifică apartenenţa acestuia la a treia dreaptă.

Exemple

1. În reperul xOy se consideră punctele $A(-1,4), B(3,-2)$ şi $C(7,-4)$.

   a. Aflaţi lungimile laturilor triunghiului ABC.
   b. Calculaţi pantele dreptelor AB, BC, CA.
   c. Determinaţi ecuaţiile:
      i. înălţimilor triunghiului;
      ii. medianelor triunghiului:
      iii. mediatoarelor segmentelor AB, BC, CA;
   d. Determinaţi coordonatele punctelor H (ortocentrul triunghiului – punctul de intersecţie al înălţimilor), G (centrul de greutate – intersecţia medianelor) şi O (centrul cercului circumscris triunghiului - intersecţia mediatoarelor);
   e. Demonstraţi că punctele O, G şi H sunt coliniare şi în plus $OH = 3OG$;
   f. Aflaţi punctul de intersecţie dintre mediana din A şi înălţimea din B;
   g. Determinaţi ecuaţia dreptei ce trece prin punctul C şi este paralelă cu AB;
   h. Verificaţi dacă punctul $Q(8,3)$ se află pe mediatoarea laturii BC;
   i. Determinaţi coordonatele punctului A', simetricul punctului A faţă de mijlocul laturii BC;
   j. Care sunt coordonatele punctului $T \in (AC)$ astfel încât $\frac{TA}{TB} = \frac{2}{3}$.

   a. Avem: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 2\sqrt{13}$; $BC = 2\sqrt{5}$ şi $AC = 8\sqrt{2}$;

Scanned with OKEN Scanner

b. $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{3}{2}$, analog $m_{BC}=-\frac{1}{2}$ şi $m_{CA}=-1$;

c. Avem:

i. Fie AD, BE, CF cele trei înălţimi ale triunghiului, $D\in BC$, $E\in AB$ şi $F\in AB$. Cum $AD\perp BC\Rightarrow m_{AD}\cdot m_{BC}=-1\Rightarrow m_{AD}=2$; deci $AD: y-y_A=m_{AD}(x-x_A)\Rightarrow AD: 2x-y+6=0$. Analog obţinem ecuaţiile celorlalte două înălţimi $BE: x-y-5=0$ şi $CF: 2x-3y-26=0$.

ii. Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, CA. Atunci $\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}\Rightarrow$

$M(1,1)$; analog $N(5,-3)$ şi $P(3,0)$. Deci

$AN: \frac{x-x_A}{x_N-x_A}=\frac{y-y_A}{y_N-y_A}\Rightarrow AN: 7x+6y-17=0$; la fel obţinem $BP: x=3$ şi $CM: 5x+6y-11=0$;

iii. Dacă d_1, d_2, d_3 sunt mediatoarele laturilor AB, BC, CA, atunci $M\in d_1$ şi $m_{d_1}=m_{CF}=\frac{2}{3}$, deci $d_1: 2x-3y+1=0$. Analog vom obţine $d_2: 2x-y-13=0$ şi $d_3: x-y-3=0$;

d. Punctul H, ortocentrul triunghiului, este punctul de intersecţie al înălţimilor, deci $\{H\}=AD\cap BE\cap CF$; rezolvând sistemul format din ecuaţiile celor trei înălţimi obţinem $H(-11,-16)$; similar se obţine $G\left(3,-\frac{2}{3}\right)$ şi $O(10,7)$;

e. $OH=\sqrt{(x_H-x_O)^2+(y_H-y_O)^2}=\sqrt{970}$, $GO=\frac{\sqrt{970}}{3}$ şi $HG=\frac{2\sqrt{970}}{3}$; deoarece $GO+HG=OH$, $OH=3OG$ rezultă concluzia;

f. Rezolvând sistemul format din ecuaţiile dreptelor AN şi BE obţinem $AN\cap BE=U\left(\frac{47}{13},-\frac{18}{13}\right)$;

g. Fie $C\in d$ şi $d\parallel AB$. Atunci $m_d=m_{AB}=-\frac{3}{2}$; deci $d: y-y_C=m_d(x-x_C)\Rightarrow$

$\Rightarrow d: 3x+2y-13=0$;

h. Cum mediatoarea lui BC are ecuaţia $d_2: 2x-y-13=0$ şi $2x_Q-y_Q-13=0\Leftrightarrow 2\cdot 8-3-13=0$, adevărat, deducem, de aici, că $Q(8,3)\in d_2$.

Scanned with OKEN Scanner

i. Dacă A' este simetricul punctului A faţă de mijlocul laturii BC, atunci patrulaterul $ABA'C$ este paralelogram, deci punctul $N(5,-3)$ este mijlocul diagonalelor AA' şi BC; deci $\begin{cases} x_N = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_N = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$, de unde $A'(11,-5)$.

j. Avem $k = \dfrac{TA}{TB} = \dfrac{2}{3}$ şi cum $T \in (AC)$, rezultă că $\left.\begin{cases} x_T = \dfrac{x_A + kx_B}{k+1} \\ y_T = \dfrac{y_A + ky_B}{k+1} \end{cases}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow T\left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.

2. Se consideră dreptele de ecuaţii: $d_1 : ax + a^2y - a^2 - 6 = 0,\ a \neq 0$ şi $d_2 : x + 2y - 5 = 0$.

a. Determinaţi $a \in \mathbb{R}^*$, ştiind că $A(1,2) \in d_2$;

b. Aflaţi $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $d_1 = d_2$;

c. Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}^*$ avem $d_1 \parallel d_2$?

d. Demonstraţi că dacă $a = 1$, atunci dreptele d_1 şi d_2 sunt secante, determinând în acest caz punctul lor de intersecţie.

e. Există $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt perpendiculare?. Justificaţi răspunsul.

a. $A(1,2) \in d_1 \Leftrightarrow a + 2a^2 - a^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow a \in \{-2,3\}$;

b. $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{1} = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{-a^2-6}{-5} \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{R}^*$;

c. $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{1} = \dfrac{a^2}{2} \neq \dfrac{-a^2-6}{-5} \Rightarrow a \in \varnothing$;

d. Pentru $a = 1$ obţinem $d_1 : x + y - 7 = 0$, $d_2 : x + 2y - 5 = 0$; cum $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{2}$ (rapoartele coeficienţilor lui x şi y din cele 2 ecuaţii) rezultă că $d_1 \cap d_2 \neq \varnothing$; rezolvând sistemul ecuaţiilor celor două drepte obţinem $d_1 \cap d_2 = A(9,-2)$;

e. $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \Leftrightarrow a \cdot 1 + a^2 \cdot 2 + \left(-a^2 - 6\right) \cdot (-5) = 0 \Rightarrow 7a^2 + a + 30 = 0$

ecuaţie care nu are soluţii reale; deci nu există $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $d_1 \perp d_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a, M_2

Elemente de calcul matriceal

Matrice

Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$. Orice funcţie $f:\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$, definită prin $f\big((i,j)\big)=a_{ij}$, oricare ar fi $i=\overline{1,m}$ şi $j=\overline{1,n}$ se numeşte ***matrice cu m linii şi n coloane*** (având elemente numere reale) sau ***matrice de tipul*** (m,n).

Mulţimea tuturor matricelor care au m linii şi respectiv n coloane se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Notaţii şi observaţii

1. Matricele se notează, de regulă, cu litere mari din alfabet: $A, B, C,\ldots$.
2. Reprezentarea unei matrice se face prin intermediul unui tablou dreptunghiular de forma $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, sau $A=\big(a_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
3. Pentru orice $i=\overline{1,m}$ elementele $a_{i1}, a_{i2},\ldots,a_{in}$ determină ***linia*** i şi pentru orice $j=\overline{1,n}$ elementele $a_{1j}, a_{2j},\ldots,a_{ij}$ formează ***coloana*** j.
4. Elementul a_{ij} al matricei A se găseşte la intersecţia dintre linia i şi coloana j (primul indice precizează numărul liniei, iar cel de-al doilea pe cel al coloanei).

Dacă $A=\big(a_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, atunci matricea $A^t=\big(a_{ji}\big)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ se numeşte ***transpusa matricei*** A (liniile matricei A devin coloanele matricei A^t), iar matricea $-A=\big(-a_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se numeşte ***opusa matricei*** A.

Matricea în care toate elementele sunt egale cu zero: $O_{m,n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se numeşte ***matrice nulă***.

Scanned with OKEN Scanner

Cazuri particulare de matrice

1. Dacă $m=1$, atunci matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ se numeşte ***matrice linie.***

2. Dacă $n=1$, atunci matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ se numeşte ***matrice coloană.***

3. Dacă $m=n$, atunci matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte ***matrice pătratică de ordinul n*** şi se notează $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$.

a. Matricea $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte ***matrice unitate de ordinul n.***

b. Mulţimea ordonată de elemente $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ formează ***diagonala principală,*** iar mulţimea ordonată de elemente $(a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1})$ formează ***diagonala secundară.***

c. Suma elementelor situate pe diagonala principală este un număr real numit ***urma matricei*** A şi notat $\operatorname{tr} A$; deci

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Egalitatea matricelor

Plecând de la definiţia egalităţii a două funcţii, egalitatea matricelor se defineşte în mod analog (câtă vreme matricele sunt funcţii), în sensul că:

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \\ a_{ij}=b_{ij}, \ \forall i=\overline{1,m} \text{ şi } \forall j=\overline{1,n} \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Exemplu

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B=-A^t$, $C=(-A)^t$ şi

$D=\begin{pmatrix} 2x+1 & -x^2 & 4+\log_2 y \\ -\sqrt{z-1} & 0 & \frac{x}{z-1} \end{pmatrix}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$, $y>0$, $z\geq 1$.

a. Aflaţi tipul fiecărei matrice.

b. Determinaţi, în matricea B, elementele b_{12} şi b_{31}.

c. Demonstraţi că $B=C$.

d. Ştiind că $A=D$, determinaţi numerele reale x,y,z.

a. Avem $A\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=-A^t=-\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$,

$C=(-A)^t=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ şi $D\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

b. Avem $b_{12}=-\sqrt{2}$ şi $b_{31}=-5$.

c. Reiese din forma celor două matrice B şi C obţinute la punctul a.

d. Din $A=D$ rezultă că au loc simultan următoarele 6 relaţii: $2x+1=3$; $-1=-x^2$; $5=4+\log_2 y$; $-\sqrt{2}=-\sqrt{z-1}$; $0=0$ şi respectiv $\frac{x}{z-1}=\frac{1}{2}$, din care obţinem, în final, că $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

Operaţii cu matrice

Operaţia	Date ale ipotezei	Tipul matricei obţinută în urma operaţiei	Definiţia elementelor matricei obţinute
Adunarea matricelor	$A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$	$C = A + B$, $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = \overline{1,m}$ şi $\forall j = \overline{1,n}$
Înmulţirea matricelor cu scalari (constante)	$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$C = \alpha \cdot A$ $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$	$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $\forall i = \overline{1,m}$ şi $\forall j = \overline{1,n}$
Înmulţirea matricelor	$A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ $A = (a_{ik})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le p}}$, $B = (b_{kj})_{\substack{1\le k\le p \\ 1\le j\le n}}$	$C = A \cdot B$ $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$	$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$, $\forall i = \overline{1,m}$ şi $\forall j = \overline{1,n}$

Observaţii (legate de înmulţirea a două matrice)

1. Pentru a se putea efectua înmulţirea $A \cdot B$, condiţia necesară şi suficientă este ca numărul coloanelor matricei A să fie egal cu numărul liniilor matricei B.
2. ***Orice formulă de calcul algebric prescurtat (binom sumă / diferenţă la pătrat, diferenţă de pătrate, binomul lui Newton, etc.) rămân valabile şi în cazul matricelor, dacă şi numai dacă matricele care intră în respectiva formulă, oricare două dintre ele, comută faţă de operaţia de înmulţire.***
3. Produsul $A \cdot B$ se efectuează, conform definiţiei, ***linie – coloană***, adică, pentru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

se va obţine: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} L_1 \cdot C_1 & L_1 \cdot C_2 & \dots & L_1 \cdot C_n \\ L_2 \cdot C_1 & L_2 \cdot C_2 & \dots & L_2 \cdot C_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_m \cdot C_1 & L_m \cdot C_2 & \dots & L_m \cdot C_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde

$L_1, L_2, \dots, L_m$ sunt liniile lui A, iar $C_1, C_2, \dots, C_n$ sunt coloanele matricei B.

4. Au sens $A \cdot B$ şi $B \cdot A \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Ridicarea la putere a matricelor

Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\forall m \in \mathbb{N}^*$ se definesc puterile matricei A astfel:

$A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, ..., $A^m = A^{m-1} \cdot A = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } m \text{ ori}}$.

Proprietăţi ale operaţiilor cu matrice

Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

Proprietate	Operaţie	Formulă
comutativitatea	adunarea matricelor	$A + B = B + A$
	înmulţirea matricelor	Pe caz general: $A \cdot B \neq B \cdot A$
	înmulţirea matricelor cu scalari	$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$
asociativitatea	adunarea matricelor	$A + (B + C) = (A + B) + C$
	înmulţirea matricelor	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
	înmulţirea matricelor cu scalari	$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = \beta \cdot (\alpha \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$
		$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$
element neutru	adunarea matricelor	$A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$
	înmulţirea matricelor	$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$
	înmulţirea matricelor cu scalari	$1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
distributivitatea	înmulţirea matricelor faţă de adunarea matricelor	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
		$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
	înmulţirea cu scalari a matricelor (înmulţirea matricelor) faţă de adunarea matricelor (adunarea scalarilor)	$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
		$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

Scanned with OKEN Scanner

Alte proprietăţi:

1. $0 \cdot A = O_{m,n}$.
2. $\alpha \cdot A = O_{m,n} \Rightarrow \alpha = 0$ sau $A = O_{m,n}$.

Proprietăţi ale urmei şi transpusei unei matrice faţă de operaţiile cu matrice

Pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $m \in \mathbb{N}$ au loc:

Proprietăţi ale „urmei" unei matrice	Proprietăţi ale transpusei unei matrice
$\operatorname{tr} I_n = n$	$\left(A^t\right)^t = A$
$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^t$	$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$
$\operatorname{tr} O_n = 0$	$(A+B)^t = A^t + B^t$
$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$	$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
$\operatorname{tr}(\alpha \cdot A + \beta \cdot B) = \alpha \cdot \operatorname{tr} A + \beta \cdot \operatorname{tr} B$	$\left(A^m\right)^t = \left(A^t\right)^m$.

Exemple

1. Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = 3A^t - 2A - 2I_2$.

   a. Aflaţi matricea $2A + 3A^t - I_2$.

   b. Determinaţi suma elementelor matricei B.

   c. Calculaţi $A \cdot B$, $B \cdot A$ şi verificaţi că $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$.

   d. Verificaţi dacă $A^2 = 4A - I_2$.

   e. Demonstraţi că $A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$.

   f. Arătaţi că matricea $C = 4 \cdot I_2 - A$ verifică relaţia $A \cdot C = C \cdot A = I_2$.

   g. Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $A^3 = xA + yI_2$.

   h. Demonstraţi că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = XA$.

   i. Rezolvaţi, în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuaţia $X^2 = A$.

Scanned with OKEN Scanner

a. Avem $2A+3A^t-I_2=2\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-11\\-9&9\end{pmatrix}$.

b. $B=3A^t-2A-2I_2=3\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-7\\3&0\end{pmatrix}$.

c. $A\cdot B=\begin{pmatrix}9&-11\\-9&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-7\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\cdot0+(-11)\cdot3&9\cdot(-7)+(-11)\cdot0\\-9\cdot0+9\cdot3&-9\cdot(-7)+9\cdot0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-33&-63\\27&63\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}0&-7\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&-11\\-9&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}63&-63\\27&-33\end{pmatrix}$. Se observă că $\operatorname{tr}(A\cdot B)=\operatorname{tr}(B\cdot A)=-33+63=30$.

d. Avem: $A^2-4A+I_2=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}7&-4\\-12&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&-4\\-12&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$, de unde concluzia.

e. Conform punctului c. $A\cdot B\neq B\cdot A$, deci formula „diferenţei de pătrate" nu este valabilă în acest caz. Sau putem obţinem concluzia şi prin calcul direct: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}7&-4\\-12&7\end{pmatrix}$, $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0&-7\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-7\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21&0\\0&-21\end{pmatrix}$,

deci $A^2-B^2=\begin{pmatrix}28&-4\\-12&28\end{pmatrix}$; pe de altă parte avem însă că $A-B=$

$=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-7\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6\\-6&2\end{pmatrix}$ şi $A+B=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-7\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-8\\0&2\end{pmatrix}$,

prin urmare obţinem: $(A-B)(A+B)=\begin{pmatrix}2&6\\-6&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-8\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4\\-12&52\end{pmatrix}$. Aşadar, comparând rezultatele, deducem în final, că: $A^2-B^2\neq(A-B)(A+B)$.

f. $C=4\cdot I_2-A=4\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$;

$A\cdot C=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$; $C\cdot A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$

de unde concluzia.

Scanned with OKEN Scanner

g. Conform punctului d. avem $A^2 = 4A - I_2$. Înmulţind această relaţie cu A obţinem $A^3 = 4A^2 - A = 4\cdot(4A - I_2) - A = 15A - 4I_2$, relaţie care comparată cu ipoteza $A^3 = xA + yI_2$ conduce la $\begin{cases} x = 15 \\ y = -4 \end{cases}$; sau prin calcul direct vom avea: $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -15 \\ -45 & 26 \end{pmatrix}$, $xA + yI_2 = x \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & -x \\ -3x & 2x + y \end{pmatrix}$, de unde, prin egalare, va rezulta, ca şi la prima metodă, că $\begin{cases} 2x + y = 26 \\ -x = -15 \\ -3x = -45 \end{cases}$, adică $\begin{cases} x = 15 \\ y = -4 \end{cases}$.

h. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; din $AX = XA$ obţinem $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ -3a + 2c & -3b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 3b & -a + 2b \\ 2c - 3d & -c + 2d \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2a - c = 2a - 3b \\ 2b - d = -a + 2b \\ -3a + 2c = 2c - 3d \\ -3b + 2d = -c + 2d \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ c = 3b \end{cases}$. Prin urmare există o infinitate de matrice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, arbitrare, care sunt soluţii ale ecuaţiei $AX = XA$.

i. Evident că $X \neq O_2$. Înmulţind ecuaţia dată $X^2 = A$ la stânga şi la dreapta cu matricea X obţinem $X^3 = AX = XA$, de unde, ţinând seama de punctul anterior, va rezulta că $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$; înlocuind acum această matrice în ecuaţia $X^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 3b^2 & 2ab \\ 6ab & a^2 + 3b^2 \end{pmatrix} =$

Scanned with OKEN Scanner

$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+3b^2=2 \\ 2ab=-1 \end{cases}$; este clar, conform celei de-a doua ecuaţii, că $a,b\neq 0$. Prin substituţie rezultă $b=-\frac{1}{2a}$, care înlocuită în prima ecuaţie conduce la $4t^2-8t+3=0$, unde $t=a^2>0$, cu soluţiile $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=\frac{3}{2}$. La final obţinem $(a,b)\in\left\{\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\mp\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right\}$, adică ecuaţia $X^2=A$ are 4 soluţii, corespunzătoare celor 4 valori obţinute pentru (a,b):

$X_1=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$ şi

$X_4=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$.

2. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ şi submulţimea $G=\left\{M(x)\,\middle|\,M(x)=xA+I_2,\ x\in\mathbb{R}\right\}$.

a. Verificaţi dacă matricele O_2 şi I_2 aparţin mulţimii G.

b. Dacă $M(a)$ şi $M(b)$ sunt elemente arbitrare ale lui G astfel încât $M(a)=M(b)$, atunci $a=b$.

c. Demonstraţi că dacă $M(x),M(y)\in G$, atunci $M(x)\cdot M(y)\in G$.

d. Arătaţi că există un unic $e\in\mathbb{R}$ pentru care $M(x)\cdot M(e)=$ $=M(e)\cdot M(x)=M(x)$, oricare ar fi $M(x)\in G$.

e. Arătaţi că pentru orice matrice $M(x)\in G$ are loc egalitatea $M(x)\cdot A=A\cdot M(x)=A$.

Scanned with OKEN Scanner

f. Demonstraţi că oricare ar fi $M(x)\in G$, există $M(x')\in G$ astfel încât $M(x)\cdot M(x')=M(x')\cdot M(x)=M(e)$.

g. Verificaţi că $M(x)\cdot M(y)=M(y)\cdot M(x),\ \forall M(x),M(y)\in G$.

h. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât:
$M(-2010)\cdot M(-2009)\cdot\ldots\cdot M(0)\cdot M(1)\cdot\ldots\cdot M(2010)=M(m)$.

i. Demonstraţi că $(2010\cdot A+I_2)^{2010}=2010^2\cdot A+I_2$.

j. Dacă $f:\mathbb{R}\to G$ este funcţia definită prin $f(x)=M(x),\forall x\in\mathbb{R}$, atunci $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a. $M(x)=xA+I_2=x\cdot\begin{pmatrix}4&16\\-1&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+1&16x\\-x&-4x+1\end{pmatrix}$; dacă ar exista $x\in\mathbb{R}$, pentru care $M(x)=O_2$ ar rezulta că $4x+1=16x=-x=-4x+1=0$, fals. Prin urmare $O_2\notin G$. Matricea I_2 aparţine mulţimii G, deoarece $I_2=M(0)$ sau, ca mai sus, obţinem sistemul $\begin{cases}4x+1=-4x+1=1\\16x=-x=0\end{cases}$, din care rezultă $x=0\in\mathbb{R}$, deci $I_2=M(0)\in G$.

b. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $M(a)=M(b)$. Atunci $\begin{pmatrix}4a+1&16a\\-a&-4a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4b+1&16b\\-b&-4b+1\end{pmatrix}$, de unde rezultă evident că $a=b$. Sau $M(a)=M(b)\Leftrightarrow aA+I_2=bA+I_2\Leftrightarrow(a-b)\cdot A=O_2$ şi cum $A\neq O_2$, din ultima relaţie obţinem $a-b=0$, adică $a=b$.

c. Fie $M(x),M(y)\in G$, două matrice oarecare. Atunci $M(x)\cdot M(y)=(xA+I_2)(yA+I_2)=xyA^2+(x+y)A+I_2$ şi cum, din calcul, avem $A^2=O_2$, obţinem în final că $M(x)\cdot M(y)=$ $=(x+y)A+I_2=M(x+y)\in G$, pentru că $x+y\in\mathbb{R},\forall x,y\in\mathbb{R}$. Sau, prin calcul direct, obţinem: $M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix}4x+1&16x\\-x&-4x+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4y+1&16y\\-y&-4y+1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}4(x+y)+1&16(x+y)\\-(x+y)&-4(x+y)+1\end{pmatrix}=M(x+y)\in G$.

Scanned with OKEN Scanner

d. Avem $M(x)\cdot M(e)=M(x+e)=M(e+x)=M(e)\cdot M(x)$, deci prima parte a egalităţii este verificată de orice matrice $M(x), M(e)\in G$. Determinarea lui $e\in\mathbb{R}$ o vom face aşadar din relaţia $M(x)\cdot M(e)=M(x), \forall M(x)\in G$, obţinând $M(x+e)=M(x), \forall M(x)\in G$ şi conform cu punctul b. va rezulta că $x+e=x, \forall x\in\mathbb{R}$, adică $e=0\in\mathbb{R}$.

e. Din calcul rezultă succesiv: $M(x)\cdot A=(xA+I_2)\cdot A=x\cdot \underbrace{A^2}_{=O_2}+A=A$, iar cealaltă egalitate este analoagă (sau eventual se pot înlocui matricele $M(x)$ şi A, în forma lor explicită, şi în urma înmulţirii în ambele sensuri rezultă concluzia).

f. Avem $M(x)\cdot M(x')=M(x')\cdot M(x)=M(e)\Rightarrow M(x+x')=M(0)\Rightarrow$ $\Rightarrow x+x'=0\Leftrightarrow x'=-x\in\mathbb{R}$. Deci $\forall M(x)\in G,\ \exists M(x')=M(-x)\in G$ astfel încât $M(x)\cdot M(x')=M(x')\cdot M(x)=M(e)$.

g. În baza punctului c. avem $M(x)\cdot M(y)=M(x+y)=M(y+x)=$ $=M(y)\cdot M(x),\ \forall M(x), M(y)\in G$.

h. Datorită comutativităţii înmulţirii matricelor pe mulţimea G (conform punctului anterior), a asociativităţii acestei operaţii şi conform punctului f. ($M(x)\cdot M(-x)=M(-x)\cdot M(x)=M(0)=I_2$), ecuaţia dată devine succesiv:

$$\underbrace{\big(M(-2010)\cdot M(2010)\big)}_{=M(0)}\cdot\underbrace{\big(M(-2009)\cdot M(2009)\big)}_{=M(0)}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\big(M(-1)\cdot M(1)\big)}_{=M(0)}\cdot$$

$$\cdot M(0)=M(m)\Rightarrow M(m)=\underbrace{M(0)\cdot M(0)\cdot\ldots\cdot M(0)}_{\text{de 1006 ori}}=M(0)\Rightarrow m=0.$$

i. Din punctul c. obţinem $M(x)\cdot M(y)=M(x+y)\Rightarrow\big(M(x)\big)^n=$ $=M(n\cdot x)\Rightarrow(x\cdot A+I_2)^n=nx\cdot A+I_2$ şi alegând $n=x=2010$ va rezulta că $(2010\cdot A+I_2)^{2010}=2010^2\cdot A+I_2$, ceea ce trebuia demonstrat.

j. Relaţia de demonstrat este echivalentă cu $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow M(x+y)=M(x)\cdot M(y)$, adevărat $\forall x, y\in\mathbb{R}$, conform cu c.

Scanned with OKEN Scanner

Determinanţi

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci ***determinantul matricei*** A este unicul număr real, notat $\det A$ sau $|A|$, definit printr-o formulă generală, care, în cazurile particulare, devine:

Tipul matricei	*Mod de calcul (rezultat în urma aplicării definiţiei generale)*
$A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $A = (a_{11})$	$\det A = \lvert a_{11} \rvert \overset{def}{=} a_{11}$
$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{def}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{def}{=}$ $= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) -$ $-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33})$

Exemple

Calculaţi:

a. $\lvert -2 \rvert$.

b. $\lvert -\cos 120^\circ \rvert$.

c. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$.

d. $\begin{vmatrix} -\sqrt{12} & \sqrt[3]{24} \\ -\sqrt[3]{9} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$.

e. $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$, $x \in (0^\circ, 90^\circ)$.

f. $\begin{vmatrix} \log_2 9 & \log_3 2 \\ \log_2 81 & \log_3 4 \end{vmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

g. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & -10 \end{vmatrix}$

h. $\begin{vmatrix} a & 3-a & 3 \\ -4 & a+3 & a-1 \\ -a & 2a+1 & a+1 \end{vmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

a. $|-2| = -2$.

b. $\left|-\cos 120^\circ\right| = -\cos 120^\circ = \cos\left(180^\circ - 120^\circ\right) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

c. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-5) \cdot (-3) = -1$.

d. $\begin{vmatrix} -\sqrt{12} & \sqrt[3]{24} \\ -\sqrt[3]{9} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \left(-\sqrt{12}\right) \cdot \sqrt{3} - \sqrt[3]{24} \cdot \left(-\sqrt[3]{9}\right) = -\sqrt{36} + \sqrt[3]{216} = -6 + 6 = 0$.

e. $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - \left(-\cos^2 x\right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

f. $\begin{vmatrix} \log_2 9 & \log_3 2 \\ \log_2 81 & \log_3 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot \log_2 3) \cdot (2 \cdot \log_3 2) - (\log_3 2) \cdot (4 \cdot \log_2 3) = 0$.

g. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & -10 \end{vmatrix} = \left(1 \cdot (-3) \cdot (-10) + 1 \cdot (-4) \cdot (-6) + 2 \cdot 3 \cdot 5\right) -$

$-\left(1 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot (-6) + 3 \cdot (-4) \cdot (-10)\right) = (30 + 24 + 30) - (-6 - 30 + 120) =$

$= 84 - 84 = 0$.

h. $\begin{vmatrix} a & 3-a & 3 \\ -4 & a+3 & a-1 \\ -a & 2a+1 & a+1 \end{vmatrix} = \left(a(a+3)(a+1) - 12(2a+1) - a(3-a)(a-1)\right) -$

$-\left(-3a(a+3) + a(a-1)(2a+1) - 4(3-a)(a+1)\right) = \left(2a^3 - 18a - 12\right) -$

$-\left(2a^3 - 18a - 12\right) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Minori ai elementelor unei matrice. Complement algebric

Dacă $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci determinantul matricei obţinută din matricea A, după eliminarea liniei i şi a coloanei j se notează cu δ_{ij} şi se numeşte ***minorul elementului*** a_{ij}, iar numărul $(-1)^{i+j}\delta_{ij}$ se numeşte ***complementul algebric al elementului*** a_{ij} şi se notează cu Γ_{ij}.

Exemplu

Fie $A=\begin{pmatrix}2&-1&5\\-3&0&7\\1&-4&-6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Atunci minorii şi complementii algebrici ai celor 9 elemente ale matricei A sunt:

Elementul matricei A	Minorul acestui element	Complementul algebric al acestui element
$a_{11}=2$	$\delta_{11}=\begin{vmatrix}0&7\\-4&-6\end{vmatrix}=28$	$\Gamma_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\delta_{11}=28$
$a_{12}=-1$	$\delta_{12}=\begin{vmatrix}-3&7\\1&-6\end{vmatrix}=11$	$\Gamma_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\delta_{12}=-11$
$a_{13}=5$	$\delta_{13}=\begin{vmatrix}-3&0\\1&-4\end{vmatrix}=12$	$\Gamma_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\delta_{13}=12$
$a_{21}=-3$	$\delta_{21}=\begin{vmatrix}-1&5\\-4&-6\end{vmatrix}=26$	$\Gamma_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\delta_{21}=-26$
$a_{22}=0$	$\delta_{22}=\begin{vmatrix}2&5\\1&-6\end{vmatrix}=-17$	$\Gamma_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\delta_{22}=-17$
$a_{23}=7$	$\delta_{23}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&-4\end{vmatrix}=-7$	$\Gamma_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\delta_{23}=7$
$a_{31}=1$	$\delta_{31}=\begin{vmatrix}-1&5\\0&7\end{vmatrix}=-7$	$\Gamma_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\delta_{31}=-7$
$a_{32}=-4$	$\delta_{32}=\begin{vmatrix}2&5\\-3&7\end{vmatrix}=29$	$\Gamma_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\delta_{32}=-29$
$a_{33}=-6$	$\delta_{33}=\begin{vmatrix}2&-1\\-3&0\end{vmatrix}=-3$	$\Gamma_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\delta_{33}=-3$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Combinaţie liniară (de linii sau coloane)

Dacă $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, iar $L_{i_1},L_{i_2},\ldots,L_{i_s}$ (cu $s\in\mathbb{N}^*, s\le n$ şi $\{i_1,i_2,\ldots,i_s\}\subset\{1,2,\ldots,n\}$) sunt s linii ale matricei A şi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\in\mathbb{R}$, atunci o matricea linie $B=\alpha_1L_{i_1}+\alpha_2L_{i_2}+\ldots+\alpha_sL_{i_s}$ se numeşte ***combinaţie liniară*** ale liniilor $L_{i_1},L_{i_2},\ldots,L_{i_s}$ ale matricei A. Analog se defineşte ***combinaţia liniară de coloane.***

Exemplu

Fie $A=\begin{pmatrix}2&-1&5\\-3&0&7\\1&-4&-6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dacă înlocuim prima linie din matricea A cu următoarea combinaţie liniară: $L_1+2L_2-3L_3\to L_1$, atunci noua matrice B obţinută va fi: $B=\begin{pmatrix}-7&11&37\\-3&0&7\\1&-4&-6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Proprietăţile determinanţilor

1. ***Orice determinant de ordinul n se descompune, după elementele unei linii, respectiv coloane, în suma a n determinanţi de ordinul $n-1$,*** fiecare dintre aceştia fiind de fapt egali cu produsul dintre fiecare element al liniei / coloanei alese şi complementul său algebric, adică, dacă $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi alegem să descompunem $\det A$ după linia i, se va obţine: $\det A=a_{i1}\Gamma_{i1}+a_{i2}\Gamma_{i2}+\ldots+a_{in}\Gamma_{in}$ (analog se va face descompunerea $\det A$ după coloana j: $\det A=a_{1j}\Gamma_{1j}+a_{2j}\Gamma_{2j}+\ldots+a_{nj}\Gamma_{nj}$).

Exemplu

$$\begin{vmatrix}2&-1&5\\-3&0&7\\1&-4&-6\end{vmatrix}\overset{\text{descompunem după } L_2}{=}(-3)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&5\\-4&-6\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&5\\1&-6\end{vmatrix}+$$

$$+7\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\1&-4\end{vmatrix}=3\cdot26+(-7)\cdot(-7)=127.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. ***Dacă în determinantul unei matrice schimbăm între ele două linii sau coloane, atunci noua matrice are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.***

Exemplu

Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi B matricea obţinută din matricea A prin schimbarea L_2 cu L_3; deci $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Din calcul obţinem $\det A = 127$ şi $\det B = -127$. Prin urmare $\det B = -\det A$.

3. ***Dacă înmulţim toate elementele unei linii sau coloane ale unei matrice cu un număr, atunci matricea obţinută are determinantul egal cu produsul dintre numărul respectiv şi determinantul matricei iniţiale*** (cu alte cuvinte a înmulţi un determinant cu un număr înseamnă a înmulţi numărul respectiv doar cu elementele unei singure linii sau coloane).

Exemple

a. $2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 12 & -4 & -10 \end{vmatrix} = 98$ (s-a înmulţit 2 cu elementele celei de-a treia linii).

b. $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 15 \\ -1 & 2 & 20 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15\cdot(-45) = -675$ (s-a scos 3 factor de pe prima linie şi 5 factor de pe ultima coloană).

4. ***Dacă în determinantul unei matrice adăugăm la toate elementele unei linii sau coloane o combinaţie liniară de alte linii sau coloane, atunci noua matrice are determinantul egal cu determinantul matricei iniţiale.***

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu

Fie $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ -3 & 0 & 7\\ 1 & -4 & -6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi B matricea obţinută din matricea A prin adăugarea la elementele L_1 a combinaţiei liniare $2L_2-3L_3$; deci $B=\begin{pmatrix}-7 & 11 & 37\\ -3 & 0 & 7\\ 1 & -4 & -6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Din calcul obţinem: $\det A=127$ şi $\det B=127$.

Prin urmare $\det B=\det A$.

5. ***Un determinant se descompune ca o sumă de 2 determinanţi după elementele unei linii sau coloane, care sunt sume de câte doi termeni celelalte linii sau coloane rămânând neschimbate.*** Mai precis are loc, de exemplu, descompunerea:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}'+a_{21}'' & a_{22}'+a_{22}'' & a_{23}'+a_{23}''\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}'\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}'' & a_{22}'' & a_{23}''\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ a+1 & a+2 & a+3\\ b & b & b\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ a & a & a\\ b & b & b\end{vmatrix}}_{=0}+\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ b & b & b\end{vmatrix}}_{=0}=0$$

(primul dintre cei doi determinanţi este egal cu 0 având ultimele două linii proporţionale, iar cel de-al doilea este nul pentru că primele sale două linii sunt egale).

Condiţii suficiente pentru ca valoarea unui determinant să fie egală cu 0

a. ***Toate elementele unei linii sau coloane să fie egale cu 0.***

b. ***Toate elementele aflate pe două linii sau coloane să fie egale sau proporţionale.***

c. ***Toate elementele unei linii sau coloane să fie combinaţie liniară de alte linii sau coloane.***

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

a. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} \overset{\text{descompunem după } L_2}{=} 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} +$

$+0\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$ (elementele liniei a doua sunt toate egale cu 0).

b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{L_1-L_3\to L_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (prima şi ultima linie sunt egale).

c. $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} \overset{-2C_1+C_3\to C_3}{=} \begin{vmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (prima şi ultima coloană sunt proporţionale: $C_3 = -2C_1$).

d. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 9 \end{vmatrix} \overset{-3L_1+2L_2\to L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 9 \end{vmatrix} = 0$ (linia a treia este combinaţie liniară a primelor două linii: $L_3 = 3L_1 - 2L_2$).

e. Fără a-l calcula, demonstraţi că valoarea determinantului $d = \begin{vmatrix} 2009 & 200 & 9 \\ 2010 & 201 & 0 \\ 2011 & 201 & 1 \end{vmatrix}$

este egală cu 0.

Observăm că $C_1 = 10C_2 + C_3$, deci, câtă vreme coloana întâi este combinaţie liniară de celelalte două coloane, rezultă de aici că $d = 0$.

Alte proprietăţi (formule) pentru determinanţi

Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

$\det O_n = 0$	$\det I_n = 1$
$\det A = \det A^t$	$\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$
$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$	$\det A^p = (\det A)^p$
$\det(C+D) + \det(C-D) = 2(\det C + \det D)$	

(A^{-1} este ***matricea inversă***; iar A^* este ***matricea adjunctă*** (***reciprocă***) a matricei A)

Determinanţi particulari

1. ***Determinant VANDERMONDE***

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i).$$

Exemple

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

b. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\begin{vmatrix} 1 & 2x-1 & (1-2x)^2 \\ 1 & 3x+2 & 9x^2+12x+4 \\ 1 & 4-5x & 25x^2-20x+16 \end{vmatrix} = 0.$

Restrângând în binom pătratele perfecte şi folosind faptul că $\det A = \det A^t$, obţinem $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x-1 & 3x+2 & 4-5x \\ (2x-1)^2 & (3x+2)^2 & (4-5x)^2 \end{vmatrix} = 0$; acesta din urmă fiind un determinant de tip

Scanned with OKEN Scanner

Vandermonde, conform punctului anterior, va rezulta ecuaţia:
$((3x+2)-(2x-1))((4-5x)-(2x-1))((4-5x)-(3x+2))=0\Rightarrow$
$\Rightarrow(x+3)(5-3x)(2-8x)=0\Rightarrow x\in\left\{-3,\frac{1}{4},\frac{5}{3}\right\}$.

2. ***Determinanţi ai unor matrice „ciclice"***

Prin matrice „ciclică" vom înţelege o matrice pătratică ale cărei elemente, pe linii şi coloane, sunt aceleaşi, dar într-o altă ordine; de exemplu $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$, sau $B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix}$, etc.

Observaţie metodică

Pentru a obţine în final valoarea unui astfel de determinant scrisă sub formă descompusă (ca produs de factori) ***se adună toate liniile / coloanele la una din linii / coloane*** şi se va putea apoi scoate factor (în faţa determinantului) de pe linia / coloana respectivă, numărul ce reprezintă suma tuturor elementelor de pe o linie / coloană a determinantului iniţial.

Exemple

1. $\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}\overset{C_1+C_2+C_3\to C_1}{=}\begin{vmatrix}a+b+c & b & c\\ b+c+a & c & a\\ c+a+b & a & b\end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 1 & c & a\\ 1 & a & b\end{vmatrix}=$

$(a+b+c)\cdot\left(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2\right)$.

2. Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $\begin{vmatrix}m & 2m+1 & 3-m\\ 3-m & m & 2m+1\\ 2m+1 & 3-m & m\end{vmatrix}=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Adunând la prima coloană celelalte două coloane obţinem ecuaţia echivalentă:

$$\begin{vmatrix} 2m+4 & 2m+1 & 3-m \\ 2m+4 & m & 2m+1 \\ 2m+4 & 3-m & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2m+4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2m+1 & 3-m \\ 1 & m & 2m+1 \\ 1 & 3-m & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (2m+4)\cdot\left(7m^2-11m+7\right)=0 \Rightarrow m=-2$ (al doilea factor nu are soluţii reale).

Relaţia lui HAMILTON – CAYLEY. Aplicaţii

Prezentăm doar cazurile particulare pentru matricele pătratice de ordinul 2 şi 3:

1. $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia: $X^2-(\operatorname{tr}X)\cdot X+(\det X)\cdot I_2=O_2$.

2. $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifică relaţia: $X^3-(\operatorname{tr}X)\cdot X^2+s\cdot X-(\det X)\cdot I_3=O_3$, unde s este suma minorilor corespunzători elementelor matricei X, situate pe diagonala principală.

Observaţii

Relaţia lui Hamilton – Cayley poate fi utilă în probleme pentru cerinţe de tipul:

a. determinarea mai rapidă a matricei inverse;

b. demonstrarea unor identităţi ce conţin diverse puteri de matrice;

c. exprimarea puterii unei matrice în funcţie de puterile anterioare ale aceleiaşi matrice;

d. rezolvarea unor ecuaţii matriceale.

Exemple

1. Dacă $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, atunci $\operatorname{tr}A=3+7=10$, $\det A=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}=1$; aşadar $A^2-10A+I_2=O_2$, egalitate din care se pot obţine eventual „liniarizări" ale puterilor matricei A, adică relaţii de forma $A^n=x_nA+y_nI_2$, $n\in\mathbb{N}$. În cazul nostru rezultă $A^2=10A-I_2$; prin înmulţire cu A obţinem $A^3=10A^2-A=99A-10I_2$, etc.

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{tr}A=1+3+2=6$, $s=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3$

şi $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-18$, deci, conform relaţiei lui Hamilton – Cayley, rezultă:

$A^3-6A^2-3A-18I_3=O_3$.

Aplicaţii ale determinanţilor

1. ***Ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte distincte*** $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B)$

este $AB:\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\end{vmatrix}=0$.

2. ***Aria triunghiului de vârfuri*** $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B), C(x_C,y_C)$ este

$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$.

3. ***Condiţia de coliniaritate a trei puncte*** $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B), C(x_C,y_C)$

este ca $\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$

Exemplu

În reperul xOy se consideră punctele $A(3,2), B(2,3), C(-5,-4)$ şi $D(-3,-2)$.

1. Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
2. Calculaţi aria triunghiului ABC.
3. Demonstraţi că punctele B, C şi D sunt coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

1. Avem $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB: x + y - 5 = 0$.

2. Cum $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 14$ va rezultă că aria triunghiului ABC va fi $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| = \frac{1}{2} \cdot |14| = 7$.

3. Punctele B, C şi D sunt coliniare dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = 0$;

într-adevăr $\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_3 \to C_3}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -5 & -4 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix}}_{=0\,(C_2=C_3)} = 0$.

Sisteme de ecuaţii liniare

Matrice inversabile. Ecuaţii matriceale

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte ***inversabilă*** dacă şi numai dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, numită ***inversa matricei*** A, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Se notează în acest caz $B = A^{-1}$.

Exemplu

Arătaţi că matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ are ca inversă matricea $B = -A - 5I_2$.

Avem $A \cdot B = B \cdot A = -A^2 - 5A$ şi din relaţia lui Hamilton – Cayley obţinem $A^2 + 5A + I_2 = O_2$, adică $A \cdot B = B \cdot A = -A^2 - 5A = I_2$. Sau se află explicit matricea $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ şi, prin calcul direct, $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ***să fie inversabilă este ca*** $\det A \neq 0$.

În acest caz, determinarea inversei se face după formula: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, unde

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ se numeşte ***matricea adjunctă*** (***reciprocă***) a matricei A,

iar A_{ij} (cu $i, j \in \overline{1,n}$) sunt complementii algebrici ai elementelor matricei A^t.

Formule

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice inversabile şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Atunci au loc egalităţile:

$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$	$\left(A^*\right)^* = (\det A)^{n-2} A$
$\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$	$\left(A^*\right)^t = \left(A^t\right)^*$
$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$	$(\alpha A)^* = \alpha^{n-1} A^*$
$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	$(AB)^* = B^* A^*$
$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$	$\det A^* = (\det A)^{n-1}$

Observaţie

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ este inversabilă, adică $\det A \neq 0$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(adică ***pentru scrierea adjunctei se inversează elementele de pe diagonala principală, iar cele de pe diagonala secundară îşi schimbă semnul***).

Exemple

1. Verificaţi dacă următoarele matrice sunt inversabile şi, în caz afirmativ, determinaţi-le inversele:

Scanned with OKEN Scanner

a. $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

b. $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -5 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 7\end{pmatrix}$.

a. Avem $\det A=11\neq 0$, deci matricea A este inversabilă. Conform observaţiei anterioare obţinem $A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -5 & 4\end{pmatrix}$.

b. $\det B=66\neq 0$, deci matricea B este inversabilă. $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot B^{*}$, unde $B^{*}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23}\\ B_{31} & B_{32} & B_{33}\end{pmatrix}$ este adjuncta matricei B. Avem $B^{t}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -1 & 7\end{pmatrix}$ şi

$B_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & 7\end{vmatrix}=26$; $B_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ -3 & 7\end{vmatrix}=-8$;

$B_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & -1\end{vmatrix}=10$; $B_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 0\\ -1 & -7\end{vmatrix}=35$;

$B_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & 7\end{vmatrix}=7$; $B_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -5\\ -3 & -1\end{vmatrix}=16$;

$B_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10$; $B_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$ şi

$B_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -5\\ 2 & 4\end{vmatrix}=14$. Deci $B^{-1}=\frac{1}{66}\cdot\begin{pmatrix}26 & -8 & 10\\ 35 & 7 & 16\\ 10 & 2 & 14\end{pmatrix}$ este inversa lui B.

Ecuaţii matriceale

Ecuaţiile matriceale de bază sunt:

a. $AX=C$ b. $XB=C$ c. $AXB=C$

Scanned with OKEN Scanner

unde $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sunt matrice inversabile. În prima ecuaţie se înmulţeşte la stânga cu A^{-1} şi se obţine soluţia unică $X = A^{-1} \cdot C$; în cea de-a doua, prin înmulţire la dreapta cu B^{-1} rezultă soluţia unică $X = C \cdot B^{-1}$ şi în ultima ecuaţie, înmulţind la stânga cu A^{-1} şi la dreapta cu B^{-1} obţinem $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Exemplu

Determinaţi $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, atunci $\det A = -1 \neq 0$, deci matricea A este inversabilă; prin urmare ecuaţia are soluţia unică $X = B \cdot A^{-1}$. Cum $A^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ rezultă în final că $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -21 \\ 18 & -47 \end{pmatrix}$.

Sisteme de ecuaţii liniare cu cel mult trei necunoscute

Un sistem de forma $(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 = b_n \end{cases}$ este un sistem de n ecuaţii liniare cu 3 necunoscute: x_1, x_2, x_3. Dacă considerăm matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,3}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

atunci avem următoarea echivalenţă: $(S) \Leftrightarrow AX = B$.

O ***soluţie*** a sistemului (S) este un triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ care verifică simultan toate cele n ecuaţii ale sistemului. A rezolva un sistem presupune a-i determina toate soluţiile (dacă acestea există).

Scanned with OKEN Scanner

Din punctul de vedere al soluţiilor se disting:

<table>
<tr><td rowspan="3">Sisteme</td><td rowspan="2">compatibile
(care au soluţii)</td><td>compatibil determinate
(care au soluţie unică)</td></tr>
<tr><td>compatibil nedeterminate
(care au o infinitate de soluţii)</td></tr>
<tr><td colspan="2">incompatibile (care nu au soluţii)</td></tr>
</table>

Exemplu

1. Verificaţi dacă tripletul $(1,2,3)$ este soluţie a sistemului $(S):\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 3x-4y+z=-2 \\ -2x+y+3z=9 \end{cases}$.

Înlocuind $x=1, y=2$ şi $z=3$ în cele trei ecuaţii obţinem propoziţii adevărate; prin urmare tripletul $(1,2,3)$ este soluţie a sistemului (S).

2. Se consideră sistemul $(S):\begin{cases} mx+(m+1)y+(2m^2-3)z=2 \\ (m^2+2)x-(m+3)y+mz=-2 \\ (1-3m)x+my+(m^2+m+1)z=9 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$. Poate fi tripletul $(1,2,3)$ soluţie a sistemului (S)?

Trebuie de fapt să vedem dacă există valori reale ale lui m pentru care $(1,2,3)$ să fie soluţie. Înlocuind $x=1, y=2$ şi $z=3$ în cele trei ecuaţii obţinem $\begin{cases} 6m^2+3m-9=0 \\ m^2+m-2=0 \\ 3m^2+2m-5=0 \end{cases}$.

Soluţia comună a celor trei ecuaţii este $m=1$. Deci pentru $m=1$, tripletul $(1,2,3)$ poate fi soluţie a sistemului (S).

Sisteme CRAMER

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare $(S):\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$,

Scanned with OKEN Scanner

Matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se numeşte ***matricea (asociată) sistemului*** (S), $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ este ***matricea (coloană) a necunoscutelor,*** iar matricea $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ se numeşte ***matricea (coloană) a termenilor liberi.***

Dacă ***determinantul matricei asociată sistemului*** $\det A=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$, atunci sistemul se numeşte ***sistem Cramer.*** Avem $(S) \Leftrightarrow AX=B$, adică sistemul este Cramer $\Leftrightarrow \det A\neq 0$, adică matricea A este inversabilă.

Orice sistem Cramer este compatibil determinat, soluţia sa unică fiind dată de formulele lui Cramer : $(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}\right)$, ***unde*** Δ_{x_i}, ***cu*** $i\in\{1,2,3\}$ ***este determinantul matricei obţinută din*** A ***prin înlocuirea coloanei*** i ***cu cea a termenilor liberi.***

Exemplu

Rezolvaţi, prin regula lui Cramer, sistemul $(S):\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 3x-4y+z=-2 \\ -2x+y+3z=9 \end{cases}$.

Determinantul matricei asociate este $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-30\neq 0$, deci sistemul este Cramer. Avem: $\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-30$, $\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 9 & 3 \end{vmatrix}=-60$ şi

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -4 & -2\\ -2 & 1 & 9\end{vmatrix}=-90$; aşadar $(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}\right)=(1,2,3)$ este unica soluţie a sistemului.

Observaţii

1. Câtă vreme orice sistem Cramer este echivalent cu o ecuaţie matriceală de forma $AX=B$, cu A matrice inversabilă, rezolvarea sistemului s-ar putea face şi prin înmulţirea la stânga cu A^{-1}, însă timpul de lucru ar fi ceva mai mare (în special pentru sistemele liniare de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute).

2. ***În concluzie: rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare poate fi făcută printr-una din următoarele metode:***

   a. ***regula lui Cramer (când este posibil a fi aplicată);***

   b. ***metoda matricei inverse (ca în cazul ecuaţiilor matriceale de forma $AX=B$, cu A matrice inversabilă);***

   c. ***prin substituţii repetate până când se obţine o ecuaţie ce poate fi rezolvată..***

Exemplu

Rezolvaţi, în 3 moduri diferite, sistemul $(S):\begin{cases}-3x+y+2z=-5\\ x-2y-3z=-4\\ 2x+3y-z=11\end{cases}$.

Metoda 1

Determinantul matricei asociate este $\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -3\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=-24\neq 0$, deci sistemul este Cramer. Avem: $\Delta_x=-72$, $\Delta_y=-48$ şi $\Delta_z=-24$; deci $(x,y,z)=(3,2,1)$ este unica soluţie a sistemului.

Metoda 2

Fie $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -3\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-5\\ -4\\ 11\end{pmatrix}$; atunci $(S)\Leftrightarrow AX=B$. Cum $\det A=-24\neq 0$ înseamnă că matricea A este inversabilă şi deci $X=A^{-1}\cdot B$. Dar

Scanned with OKEN Scanner

$A^{-1}=-\frac{1}{24}\begin{pmatrix}11 & 7 & 1\\ -5 & -1 & -7\\ 7 & 11 & 5\end{pmatrix}$; aşadar obţinem: $X=-\frac{1}{24}\begin{pmatrix}11 & 7 & 1\\ -5 & -1 & -7\\ 7 & 11 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\ -4\\ 11\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow X=-\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix}-72\\ -48\\ -24\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

Metoda 3

Din prima ecuaţie rezultă $y=3x-2z-5$, care, înlocuită în celelalte două ecuaţii, conduce la sistemul $\begin{cases}-5x+z=-14\\ 11x-7z=26\end{cases}$. Rezolvând acest sistem obţinem $x=3$ şi $z=1$, deci, revenind la substituţie, rezultă $y=2$.

Observaţie

Sistemele de ecuaţii liniare pentru care matricea asociată nu este pătratică sau este pătratică, dar nu e inversabilă, pot fi rezolvate doar prin substituţie.

Exemple

Rezolvaţi sistemele:

1. $\begin{cases}x+2y+3z=3\\ x-2y-z=-1\\ 2x+3y+5z=6\end{cases}$. 2. $\begin{cases}x+2y=5\\ 3x-4y=-5\\ 5x+y=7\end{cases}$. 3. $\begin{cases}2x+y+z=4\\ x+2y+z=4\\ x+y+2z=4\\ x+y+z=4\end{cases}$.

1. Determinantul matricei asociate sistemului este egal cu $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=0$ ($C_1+C_2=C_3$), deci sistemul nu este Cramer şi nici nu-l putem rezolva ca o ecuaţie matriceală, câtă vreme $\det A=0$, deci matricea asociată A nu este inversabilă. Din a doua ecuaţie rezultă $x=2y+z-1$, care prin înlocuire în celelalte două ecuaţii ne conduce la $\begin{cases}y+z=1\\ y+z=\frac{8}{7}\end{cases}$, sistem care evident nu are soluţii (este incompatibil).

Scanned with OKEN Scanner

2. Din primele două ecuaţii obţinem $(x,y)=(1,2)$, pereche ce verifică şi ultima ecuaţie a sistemului. Deci avem soluţia unică $(x,y)=(1,2)$.

3. ***Metoda 1***
Rezolvând sistemul format din primele 3 ecuaţii (care este un sistem Cramer, deoarece determinantul matricei asociate este egal cu $\Delta=4\neq 0$) obţinem soluţia unică $(x,y,z)=(1,1,1)$, care însă nu verifică şi ultima ecuaţie a sistemului iniţial; deci sistemul nu are soluţii.

Metoda 2
Dacă adunăm primele 3 ecuaţii obţinem $4x+4y+4z=12$, adică $x+y+z=3$ relaţie aflată în contradicţie cu ultima ecuaţie a sistemului. Prin urmare sistemul iniţial este incompatibil.

Elemente de analiză matematică

Limite de funcţii

Mulţimi mărginite. Intervale

Mulţimea numerelor reale este $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$.

Fie $A\subset\mathbb{R}$. Din punctul de vedere al aşezării (distribuţiei elementelor) mulţimii A pe axa reală distingem:

denumire	definiţie	notaţie
mărginită inferior	$\exists m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\geq m, \forall x\in A$	$m=\inf A\in\mathbb{R}$
mărginită superior	$\exists M\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\leq M, \forall x\in A$	$M=\sup A\in\mathbb{R}$
nemărginită inferior	$\forall m\in\mathbb{R}, \exists x\in A$ astfel încât $x<m$	$\inf A=-\infty$
nemărginită superior	$\forall M\in\mathbb{R}, \exists x\in A$ astfel încât $x>M$	$\sup A=\infty$

Dacă pentru o mulţime A mărginită avem:

a. $\sup A\in A$, atunci el se numeşte ***cel mai mare element al lui*** A şi se notează cu $\max A$;

b. dacă $\inf A\in A$, atunci el se numeşte ***cel mai mic element al lui*** A şi se notează cu $\min A$.

Observaţie

Dacă mulţimea A este nemărginită superior, atunci $\sup A=+\infty$.

Dacă mulţimea A este nemărginită inferior, atunci $\inf A=-\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

1. Mulţimea $A=(-1,2]$ este mărginită; $\sup A=\max A=2$, $\inf A=-1$ şi pentru că $\inf A\in A$ rezultă că nu există $\min A$ (mulţimea A nu are un cel mai mic element).

2. Mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,x^2\le 2010\right\}$ este mărginită, pentru că $A=\left[-\sqrt{2010},\sqrt{2010}\right]\cap\mathbb{Q}$, deci $\sup A=\sqrt{2010}$ şi $\inf A=-\sqrt{2010}$, dar nu admite un cel mai mic, respectiv un cel mai mare element, câtă vreme $\pm\sqrt{2010}\notin A$.

Pentru $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ se definesc ***intervalele*** ca acele submulţimi ale lui $\mathbb{R}$ care au una din următoarele forme:

mărginite	nemărginite	
	inferior	superior
$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$	$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$		
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$	$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le a\}$	$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$		

Dreapta încheiată

Se definesc ***simbolurile***:

- $-\infty$ şi $+\infty$ prin $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow-\infty<x<\infty$;
- 0_+ şi 0_- prin $-\varepsilon<0_-<0<0_+<\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$.

Comentariu metodic

Într-un limbaj matematic, ***neriguros***, ne putem imagina aceste simboluri ca având următoarea reprezentare „numerică”:

- $+\infty=+100\ldots0$, numărul zerourilor fiind *„neprecizat” de mare*;
- $-\infty=-100\ldots0$, numărul zerourilor fiind *„neprecizat” de mare*;
- $0_+=+0,00\ldots01$, numărul zerourilor după virgulă fiind *„neprecizat” de mare*;
- $0_-=-0,00\ldots01$, numărul zerourilor după virgulă fiind *„neprecizat” de mare*.

Dreapta reala încheiată este, prin definiţie, mulţimea: $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}\overset{not}{=}[-\infty,+\infty]$.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Vecinătăţi în $\overline{\mathbb{R}}$ Pentru $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ mulţimea $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte ***vecinătate a lui*** α, atunci când:

Valoarea lui α	Definiţia vecinătăţii
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $I = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset V$
$\alpha = +\infty$	$\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $(\varepsilon, +\infty] \subset V$
$\alpha = -\infty$	$\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $[-\infty, -\varepsilon) \subset V$

Aritmetica în $\overline{\mathbb{R}}$ În calculul limitelor de funcţii apare deseori necesitatea efectuării de operaţii între elementele mulţimii $\overline{\mathbb{R}}$. Acestea sunt de două categorii:

- ***„operaţii permise"*** care au ca rezultat unul prestabilit prin reguli (formule) şi
- ***„operaţii nepermise"*** (***cazuri exceptate***, sau ***de nedeterminare***), care de la caz la caz, în aceeaşi situaţie de operaţie, pe exemple diferite, pot conduce la rezultate diferite.

Operaţii permise

$+\infty + \infty = +\infty;\ -\infty - \infty = -\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty;\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
$(+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
$\frac{1}{\pm\infty} = 0_{\pm};\ \frac{1}{0_{\pm}} = \pm\infty$	$(+\infty)^{-\infty} = 0_{+}$
$a + \infty = +\infty;\ a - \infty = -\infty$	$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{dacă } a > 0 \\ \mp\infty, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$
$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 0_{+}, & \text{dacă } a \in (0,1) \end{cases}$	$a^{-\infty} = \begin{cases} 0_{+}, & \text{dacă } a > 1 \\ +\infty, & \text{dacă } a \in (0,1) \end{cases}$
$(+\infty)^{a} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a > 0 \\ 0_{+}, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$	$\log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a > 1 \\ -\infty, & \text{dacă } a \in (0,1) \end{cases}$
$\log_a 0_{+} = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } a > 1 \\ +\infty, & \text{dacă } a \in (0,1) \end{cases}$	$(0_{+})^{+\infty} = 0_{+}$

Scanned with OKEN Scanner

Operaţii „nepermise" (cazuri de nedeterminare)

Aceste situaţii au „tratamente" speciale în calculul limitelor de funcţii, în aşa fel încât să se reducă la final la operaţiile permise cu simboluri.

$+\infty-\infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$0_{\pm}\cdot(\pm\infty)$
$\frac{0_{\pm}}{0_{\pm}}$	$(+\infty)^{0_+}$	1^{∞}
$(0_+)^{0_+}$		

Limita unei funcţii într-un punct. Limite laterale

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie reală şi $D'\subset\overline{\mathbb{R}}$ mulţimea punctelor de acumulare ale domeniului de definiţie D. Spunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă:

a. $a\in D'$ şi

b. când x este „foarte aproape" de a, fără a fi egal cu a, (adică $x\to a$), $f(x)$ este „foarte aproape" de $l\in\overline{\mathbb{R}}$, adică $f(x)\to l$; l se numeşte ***limita funcţiei*** f ***în punctul*** a.

Consideraţii metodice

- ***Dacă*** $f:D\to\mathbb{R}$ ***este o funcţie numerică*** (D ***fiind domeniul maxim de definiţie al funcţiei***), ***atunci*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\forall a\in D$, ***cu excepţia punctelor izolate ale lui*** D.
- ***Dacă*** $a\in D'-D$, ***unde*** D' ***este mulţimea punctelor de acumulare a lui*** D, ***atunci se "înlocuieşte" argumentul*** x ***din funcţie cu*** a ***şi se încearcă, în cazul în care se obţin operaţii nepermise, înlăturarea nedeterminărilor ce pot apărea, folosind formule, algoritmi specifici, etc., în funcţie de tipul nedeterminării şi expresia funcţiei.***

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to 1} x^{2010} = 1^{2010} = 1.$
2. $\lim\limits_{x\to -8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-8} = -2.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1.$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{8}} \log_2 x = \log_2 \frac{1}{8} = -3.$

Limitele laterale ale unei funcţii într-un punct reprezintă limita funcţiei, cu precizarea suplimentară a modului în care se „apropie" x de a (din stânga, caz în care $x \to a,\ x < a$ sau din dreapta, când $x \to a,\ x > a$); se obţin astfel:

- $l_s(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = f(a-0)$ şi se numeşte ***limită laterală la stânga a funcţiei*** f ***în punctul*** a;
- $l_d(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a+0)$ şi se numeşte ***limită laterală la dreapta a funcţiei*** f ***în punctul*** a.

Are loc: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}\ (a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists\, l_s(a), l_d(a)$ şi $l_s(a) = l_d(a) = l$,

adică o ***funcţie are limită într-un punct de acumulare real al domeniului dacă şi numai dacă există ambele limite laterale în acel punct şi acestea sunt egale.***

Exemple

Studiaţi dacă următoarele funcţii au limită în punctele indicate:

a. $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x_0 = 1.$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ \ln x + 2, & x > 1 \end{cases},\ x_0 = 1.$

c. $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^{2010}},\ x_0 = 0.$

a. $x_0 = 1$ este punct de acumulare al mulţimii $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, pentru care $D' = \overline{\mathbb{R}}$, şi

Scanned with OKEN Scanner

avem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}\overset{\frac{1}{0}}{=}\begin{cases} l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{1-x}\overset{\frac{1}{0_+}}{=}+\infty \\ l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1}{1-x}\overset{\frac{1}{0_-}}{=}-\infty \end{cases}$; deci nu există $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b. Avem $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x+1)=1+1=2$ şi $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(\ln x+2)=\ln 1+2=2$; cum $l_s(1)=l_d(1)=2\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2010}}=\dfrac{1}{0_+}=+\infty$ (s-a folosit faptul că "$0^{2010}=0_+$").

Operaţii cu limite de funcţii

Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D'$ cu proprietatea că există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2\in\overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

Operaţia	Condiţii	Limita operaţiei
suma	are sens în $\overline{\mathbb{R}}$: l_1+l_2	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=l_1+l_2$
diferenţa	are sens în $\overline{\mathbb{R}}$: l_1-l_2	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=l_1-l_2$
produsul	are sens în $\overline{\mathbb{R}}$: $l_1\cdot l_2$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=l_1\cdot l_2$
câtul	$g(x)\neq 0$ şi are sens în $\overline{\mathbb{R}}$: $\dfrac{l_1}{l_2}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$
$f(x)^{g(x)}$	$f(x)>0$ şi are sens în $\overline{\mathbb{R}}$: $l_1^{l_2}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=l_1^{l_2}$
$\log_{f(x)} g(x)$	$f(x)>0, f(x)\neq 1, g(x)>0$ şi $l_1>0,\ l_1\neq 0,\ l_2>0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\log_{f(x)} g(x)\right)=\log_{l_1} l_2$

Concluzie: Când au sens în $\overline{\mathbb{R}}$ limitele şi operaţiile cu funcţii comută între ele.

Scanned with OKEN Scanner

Formule tip

Cazul de nedeterminare $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_nx^n\right)=\pm\infty$$

Cazul de nedeterminare $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}\overset{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=}\begin{cases}\pm\infty, & n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m\\ 0, & n<m\end{cases}$$

Deşi $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha=\lim\limits_{x\to\infty}b^x=\infty$, pentru $a,b>1,\alpha>0$, are loc:

$\log_a x\ll x^\alpha\ll b^x$, pentru $x\to\infty$, din care se obţine:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{b^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{b^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0 \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{\log_a x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{b^x}{\log_a x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{b^x}{x^\alpha}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\infty$$

(relaţia "$f(x)\ll g(x)$" înseamnă că funcţia $f(x)$ creşte „mult mai încet" către ∞ decât $g(x)$)

Cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}1$	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln f(x)}{f(x)-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}1$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{b^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\ln b$	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{b^{f(x)}-1}{f(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\ln b$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}r$	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(f(x))^r-1}{f(x)-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}r$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii

Evident că în cazul calculului limitelor de funcţii, pentru eliminarea nedeterminării se mai aplică şi multe alte procedee, precum:

a. ***Metoda factorului comun forţat*** (pentru limite aflate în cazul $\infty-\infty$);

b. ***Metoda descompunerii în produs de factori*** (pentru limite ce conţin câtul a două funcţii de gradul al doilea);

c. ***Metoda amplificării cu conjugata unei expresii iraţionale*** (pentru limite ce conţin diferenţe de radicali, aflată în cazul $\infty-\infty$, sau cât de funcţii iraţionale, aflată în cazul $\frac{0}{0}$);

d. ***Aplicarea regulii lui L'Hôspital***

e. ***Metode combinate*** (***cele de mai sus plus formule***)

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}x^3-\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x}=1-1=0.$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x\ln x-\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}(x\ln x)-\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3\right)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=1\cdot\ln 1-\dfrac{4}{2}=-2.$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(e^x\cdot\log_2 x+x^x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(e^x\right)\cdot\lim\limits_{x\to 2}\left(\log_2 x\right)+\lim\limits_{x\to 2}\left(x^x\right)=e^2+4.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-2x^2+5\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty.$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^5+x^4+2x-1\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^5\right)=-\infty.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-1}{2x^2+5x-7}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\dfrac{3}{2}$ (cazul 2 din formulă).

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^7+4x^2+x+2}{x^4-3x-3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\infty$ (cazul 1 din formulă).

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4(x-1)^2-(2x+3)^2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-20x-5}{x^2+x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$ (cazul 1 din formulă).

Scanned with OKEN Scanner

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overset{=x}{\overbrace{|x|}}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}}}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}=1.$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}\overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\overset{=-x}{\overbrace{|x|}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}\overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}{1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}}=-1.$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+x^2+1}}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\underbrace{|x|}_{=-x}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\underbrace{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}}_{\to 0}}}{-\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}}}=-1$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2}_{\to -1}\right)=-\infty.$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}\right)}=2.$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\ln x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0}\right)=\infty$ ($\ln x \ll x^2$, pentru $x\to\infty$).

Scanned with OKEN Scanner

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-e^x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}e^x\left(\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0}-1\right)=-\infty$ (s-a folosit că $x\ll e^x$, pentru $x\to\infty$).

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-e^x}{x+e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)}{e^x\left(\frac{x}{e^x}+1\right)}=-1$ (am utilizat că $x\ll e^x$, pentru $x\to\infty$).

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x-x}{\ln x+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)}{x\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)}=-1$ (s-a folosit că $\ln x\ll x$, pentru $x\to\infty$).

18. *ATENŢIE*: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x\cdot\ln x\right)\overset{0_+\cdot(-\infty)}{\underset{\frac{1}{x}=t}{=}}\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{1}{t}\right)=-\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$ (s-a folosit faptul că $\ln t\ll t$, pentru $t\to\infty$).

19. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-3x-10}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x-2)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-2}\frac{x-5}{x-2}=\frac{7}{4}$.

20. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-3x+1}-1}{\sqrt{x+1}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2-1^2\right)\left(\overbrace{\sqrt{x+1}+2}^{\to 4}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2\right)\left(\underbrace{\sqrt{x^2-3x+1}+1}_{\to 2}\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}2\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=2\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}2\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{x-3}=6$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2+x-5\right)}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\underbrace{\frac{\ln\left(x^2+x-5\right)}{x^2+x-6}}_{\to 1}\cdot\frac{x^2+x-6}{x-2}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=5$

Scanned with OKEN Scanner

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-e^x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}e^x\left(\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0}-1\right)=-\infty$ (s-a folosit că $x\ll e^x$, pentru $x\to\infty$).

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-e^x}{x+e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)}{e^x\left(\frac{x}{e^x}+1\right)}=-1$ (am utilizat că $x\ll e^x$, pentru $x\to\infty$).

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x-x}{\ln x+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)}{x\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)}=-1$ (s-a folosit că $\ln x\ll x$, pentru $x\to\infty$).

18. *ATENŢIE*: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x\cdot\ln x\right)\overset{0_+\cdot(-\infty)}{\underset{\frac{1}{x}=t}{=}}\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{1}{t}\right)=-\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$ (s-a folosit faptul că $\ln t\ll t$, pentru $t\to\infty$).

19. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x-2)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-5}{x-2}=\frac{7}{4}$.

20. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-3x+1}-1}{\sqrt{x+1}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2-1^2\right)\left(\overbrace{\sqrt{x+1}+2}^{\to 4}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2\right)\left(\underbrace{\sqrt{x^2-3x+1}+1}_{\to 2}\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}2\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=2\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}2\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{x-3}=6$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2+x-5\right)}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\underbrace{\frac{\ln\left(x^2+x-5\right)}{x^2+x-6}}_{\to 1}\cdot\frac{x^2+x-6}{x-2}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=5$

Scanned with OKEN Scanner

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2^{x+1}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\dfrac{e^x-1}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\dfrac{x}{2^x-1}}_{\to(\ln 2)^{-1}}\right)=\dfrac{\ln 2}{2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(1+x)^4-81}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}81\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\left(\frac{1+x}{3}\right)^4-1}{\underbrace{\frac{1+x}{3}-1}_{\to 4}}\cdot\dfrac{\frac{1+x}{3}-1}{x-2}\right)=4\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{3(x-2)}=\dfrac{4}{3}$.

24. Determinaţi parametrul real $m>0$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\le 1\\ \ln(mx)+2, & x>1\end{cases}$ să aibă limită în punctul $x_0=1$.

Din enunţ deducem că $l_s(1)=l_d(1)\Rightarrow \ln m+2=3\Rightarrow \ln m=1\Rightarrow m=e>0$.

Asimptotele graficului unei funcţii

Asimptotele sunt drepte (***orizontale***, ***verticale*** sau ***oblice***) către care „tinde" graficul unei funcţii (se apropie „din ce în ce mai mult" de asimptotă, fără să o intersecteze).

Tipul asimptotei		Condiţia de existenţă a asimptotei şi determinarea ei	Ecuaţia asimptotei
orizontală	$\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=a\in\mathbb{R}$	$d:y=a$
oblică	$\pm\infty$	$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$, $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)\in\mathbb{R}$	$d:y=mx+n$
verticală	la stânga	$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}f(x)\in\{\pm\infty\}$	$d:x=b$
	la dreapta	$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}}f(x)\in\{\pm\infty\}$	

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie

1. Calculul fiecărui tip de asimptotă se face dacă $\pm\infty \in D'$ *(pentru cele orizontale şi oblice), respectiv* $b \in D' \cap \mathbb{R}$ *(pentru cele verticale), unde* D' *este mulţimea punctelor de acumulare ale domeniului de definiţie* D *al funcţiei* f.

2. Spre $+\infty$, *respectiv* $-\infty$ *nu pot fi simultan şi asimptote orizontale şi asimptote oblice (se exclud reciproc spre* $+\infty$ *sau* $-\infty$*).*

3. Studiul asimptotelor verticale se face, de regulă, în punctele $b \in (D' \setminus D) \cap \mathbb{R}$, *adică „capetele" reale ale lui* D, *care nu fac parte din* D *sau, uneori, (pentru funcţiile multiforme, cu „acoladă") sunt şanse de a găsi asimptote verticale în punctul / punctele de „trecere de la o ramură la alta" a funcţiei respective.*

Exemple

Determinaţi asimptotele graficelor următoarelor funcţii:

a. $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

b. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$.

c. $f:(0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

d. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-1}, & x<1\\ \dfrac{x+1}{e^x}, & x\geq 1\end{cases}$

a. Studiem existenţa asimptotelor orizontale: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overbrace{|x|}^{=x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=1\in\mathbb{R}$, deci dreapta de ecuaţie $y=1$ este asimptotă orizontală la $\mathcal{G}_f$ spre $+\infty$. Analog $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\overbrace{|x|}^{=-x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=-1\in\mathbb{R}$; prin urmare dreapta de ecuaţie $y=-1$ este

Scanned with OKEN Scanner

asimptotă orizontală la $\mathcal{G}_f$ spre $-\infty$. Având asimptote orizontale spre $\pm\infty$, $\mathcal{G}_f$ nu va mai admite asimptote oblice. Studiem existenţa asimptotelor verticale:

$$l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{\frac{1}{0_-}}{=} -\infty \quad \text{şi} \quad l_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{\frac{1}{0+}}{=} +\infty,$$

deci dreapta de ecuaţie $x=0$ este asimptotă verticală şi la stânga şi la dreapta (bilaterală).

b. Studiem existenţa asimptotei orizontale: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3+1}=\pm\infty$,

deci $\mathcal{G}_f$ nu admite asimptote orizontale spre $\pm\infty$; studiem existenţa celor oblice:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{x}=1\in\mathbb{R}^* \quad \text{şi apoi}$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)^{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3+1}+1}=\frac{1}{\infty}=0.$$ Deci dreapta de ecuaţie

$d: y=mx+n \Rightarrow d: y=x$ (prima bisectoare) este asimptotă oblică la $\mathcal{G}_f$ spre $\pm\infty$. Datorită faptului că domeniul de definiţie al funcţiei este $\mathbb{R}$ şi funcţia are o singură ramură (nu este multiformă), rezultă de aici că nu există $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to a} f(x)\in\{\pm\infty\}$, deci $\mathcal{G}_f$ nu admite asimptote verticale.

c. Studiem existenţa asimptotei orizontale (doar spre $+\infty$):

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$, deoarece $\ln x \ll x$, pentru $x\to\infty$. Având asimptotă orizontală spre $+\infty$, $\mathcal{G}_f$ nu va mai admite asimptotă oblică. Studiem existenţa asimptotei verticale: $l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{-\infty}{0_+}}{=}(-\infty)\cdot\frac{1}{0_+}=$

$=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$; prin urmare dreapta de ecuaţie $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta în punctul $x_0=0$.

Scanned with OKEN Scanner

d. Studiem existenţa asimptotelor orizontale: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0$,

deoarece $x+1 \ll e^x$, pentru $x\to\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-1} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} 2$. Deci $y=2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$. Având asimptote orizontale spre $\pm\infty$, $\mathcal{G}_f$ nu va mai admite asimptotă oblică. Studiem existenţa asimptotei verticale: $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2x+1}{x-1} \overset{\frac{3}{0_-}}{=} -\infty$; prin urmare dreapta de ecuaţie $x=1$ este asimptotă verticală la stânga în punctul $x_0=1$.

Funcţii continue

Funcţia numerică $f: D\to\mathbb{R}$ este ***continuă în punctul*** $x_0\in D$ (cu excepţia punctelor izolate ale lui D, unde, prin definiţie, funcţia f este continuă) dacă şi numai dacă ***există şi este finită limita funcţiei*** f ***în punctul*** x_0 ***şi ea este egală cu valoarea funcţiei în acel punct***, adică $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

O funcţie $f: D\to\mathbb{R}$ este ***continuă pe*** D dacă este continuă în fiecare punct $x_0\in D$.

Observaţii

1. ***Interpretare geometrică***: Dacă $I\subset\mathbb{R}$ este interval şi funcţia $f: I\to\mathbb{R}$ este continuă pe I, atunci ***graficul funcţiei*** f ***trasat pe mulţimea*** I ***este o curbă continuă (fără întreruperi)***.

2. Toate funcţiile elementare studiate (funcţia afină, funcţia de gradul al doilea, funcţia putere, funcţia radical, funcţia exponenţială, funcţia logaritmică) sunt continue pe domeniul lor maxim de definiţie.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Operaţii cu funcţii continue

1. Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$ două funcţii reale continue pe D. Atunci:

   a. orice ***operaţie algebrică*** între cele două funcţii: ***adunare, scădere, produs, cât***, are ca rezultat, pe domeniul maxim de definiţie al funcţiei obţinute, tot o funcţie continuă;

   b. funcţiile $|f|$, $|g|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, f^g (cu $f(x)>0,\forall x\in D$), $\log_f g$ (cu $f(x)>0, f(x)\neq 1, g(x)>0,\forall x\in D$) sunt şi ele continue pe D.

2. Fie $f:C\to B$ şi $g:A\to C$ două funcţii reale continue pe mulţimea C şi respectiv A. Atunci funcţia $(f\circ g):A\to B$ este continuă pe mulţimea A (deci ***compunerea a două funcţii continue este tot o funcţie continuă***).

Semnul unei funcţii continue pe un interval

Fie $I\subset\mathbb{R}$ interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe I. Dacă f nu se anulează pe I (adică ecuaţia $f(x)=0$ nu are soluţii), atunci funcţia f păstrează semn constant pe tot intervalul I, semn ce se poate afla atribuindu-i lui $x\in I$ o valoare arbitrară şi determinând semnul numărului $f(x)$.

Cu alte cuvinte atunci când avem de aflat semnul unei funcţii $f:I\to\mathbb{R}$ continue pe intervalul $I\subset\mathbb{R}$, procedăm astfel:

- rezolvăm ecuaţia $f(x)=0$ şi obţinem soluţiile $x_1,x_2,\ldots,x_n\in I$;
- realizăm un tabel al semnului funcţiei f, ţinând seama că pe fiecare din intervalele $(a,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},x_n),(x_n,b)$ (unde $I=(a,b)$, $a,b\in\overline{\mathbb{R}}, a<b$) funcţia f are semn constant, obţinut prin înlocuirea lui x cu o valoare α din acel interval şi determinând $\operatorname{sgn} f(\alpha)$.

Exemple

1. Studiaţi continuitatea următoarelor funcţii:

   a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x-e+1, & x\le 1\\ x+\ln x, & x>1\end{cases}$.

   b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+x+2}, & x<1\\ \sqrt[3]{5x+3}, & x\ge 1\end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

a. Funcţia f este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,+\infty)$ (ca operaţii algebrice cu funcţii elementare continue). Studiem continuitatea în punctul $x_0=1$. Avem $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(e^x-e+1\right)=1$, $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+\ln x)=1$, $f(1)=e^1-e+1=1$

Deci $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=1$, prin urmare funcţia f este continuă şi în punctul $x_0=1$. Aşadar f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b. Analog ca la punctul anterior funcţia f este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,+\infty)$ (compuneri de funcţii elementare continue). Studiem continuitatea în punctul $x_0=1$. Avem $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=2$,

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)=2$, $f(1)=\sqrt[3]{5\cdot 1+3}=2$. Deci $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=2$;

prin urmare funcţia f este continuă şi în punctul $x_0=1$. Aşadar f continuă pe $\mathbb{R}$.

2. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases} ax^2+2x-1, & x\le 1\\ \sqrt{a^2x+3}, & x>1\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

Ipoteza enunţului implică faptul că funcţia f trebuie să fie continuă şi în punctul $x_0=1$; prin urmare $l_s(1)=l_d(1)=f(1)\Rightarrow a+1=\sqrt{a^2+3}$. Impunem condiţia ca $a+1\ge 0$ şi, după ridicare la pătrat, obţinem ecuaţia $a^2+2a+1=a^2+3$, cu soluţia $a=1$ (care verifică condiţia impusă).

3. Rezolvaţi inecuaţiile:

a. $\left(2^x-8\right)(1-\ln x)\ge 0,\ x>0$.

b. $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(-x^2+x+6\right)>0,\ x\ge 0$.

a. Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(2^x-8\right)(1-\ln x)$; deci avem de rezolvat inecuaţia $f(x)\ge 0$. Din $f(x)=0$ obţinem $2^x-8=0\Rightarrow x=3>0$ sau $1-\ln x=0\Rightarrow x=e>0$. Din tabelul semnului funcţiei f deducem că $f(x)\ge 0\Leftrightarrow x\in[e,3]$.

Scanned with OKEN Scanner

b. Considerăm funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(-x^2+x+6\right)$; deci avem de rezolvat inecuaţia $f(x)>0$. Din $f(x)=0$ obţinem $\sqrt{x}-1=0\Rightarrow x=1\geq 0$ sau $-x^2+x+6=0\Rightarrow x\in\{-2,3\}$, doar $x=3\in[0,\infty)$. Din tabelul semnului funcţiei f deducem că $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(1,3)$.

Funcţii derivabile

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie reală şi $x_0\in D$ astfel încât f este continuă în x_0.

1. Dacă există limita: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci spunem că ***funcţia f are derivată în x_0***, iar ***derivata în punctul x_0*** este $f'(x_0)=l$.

2. Dacă există şi este finită limita: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$, atunci spunem că ***funcţia f este derivabilă în x_0***, iar ***derivata în punctul x_0*** este $f'(x_0)=l$.

O funcţie $f:D\to\mathbb{R}$ continuă pe D şi derivabilă în fiecare punct al lui D se numeşte ***derivabilă pe D***.

Derivate laterale

Analog definiţiei limitelor laterale, se introduc şi ***derivatele laterale ale unei funcţii într-un punct***, prin:

1. dacă există limita: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci ea se notează cu $f'_s(x_0)$ şi se ***numeşte derivată laterală la stânga a funcţiei f în punctul x_0***;

2. dacă există limita: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci ea se notează cu $f'_s(x_0)$ şi se ***numeşte derivată laterală la stânga a funcţiei f în punctul x_0***.

Observaţii

1. Pentru ca o funcţie să fie derivabilă într-un punct, condiţia de continuitate a funcţiei în acel punct este una necesară, dar nu şi suficientă.

Scanned with OKEN Scanner

2. Prin aplicarea definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct ne situăm întotdeauna în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$.

3. Funcţia f este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă $\exists f'_s(x_0), f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$ şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = l \in \mathbb{R}$; în acest caz $f'(x_0) = l$. Altfel spus ***dacă derivatele laterale ale unei funcţii într-un punct există, sunt finite şi egale, atunci funcţia este derivabilă în acel punct, iar valoarea derivatei ei în acel punct este valoarea comună a celor două derivate laterale.***

4. Mulţimea punctelor din D în care funcţia $f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă se numeşte ***domeniu de derivabilitate*** şi se notează cu D' (a nu se confunda cu mulţimea punctelor de acumulare). Deci $D' \subset D$, iar funcţia $f': D' \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se numeşte ***funcţia derivată a lui*** f (sau ***derivata întâi a funcţiei*** f).

5. ***Interpretare geometrică a derivatei unei funcţii într-un punct:***

Dacă $f: I \to \mathbb{R}$, cu $I \subset \mathbb{R}$ interval, este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, atunci ***derivata*** funcţiei f în punctul $x_0 \in I$, adică numărul real $f'(x_0)$ ***reprezintă panta tangentei la*** $\mathcal{G}_f$ ***dusă în punctul*** $M(x_0, y_0) \in \mathcal{G}_f$. Cu alte cuvinte $m_d = f'(x_0)$, dreapta d fiind tangenta la $\mathcal{G}_f$ în punctul de abscisă x_0.

Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii într-un punct

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ cu $I \subset \mathbb{R}$ interval, derivabilă în punctul $x_0 \in I$. Atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în punctul de abscisă x_0 este:

$$d: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exemple

Pentru fiecare dintre funcţiile următoare studiaţi dacă sunt derivabile în punctele indicate şi, în caz afirmativ, determinaţi-le ecuaţiile tangentelor în acele puncte:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 1$, $x_0 = 2$.

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 2, & x \le 0 \\ x^2 + x - 1, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

a. Funcţia f este continuă şi derivabilă în $x_0=2$ şi $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=5\Rightarrow f'(2)=5$. Ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în punctul $A(2,f(2))$ va fi $d: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow$ $\Rightarrow d: 5x-y-5=0$.

b. Avem $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=-1$, deci f este continuă în $x_0=0$. Studiem derivabilitatea în punctul $x_0=0$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}1\Rightarrow f_s'(0)=1$ şi

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x^2+x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x(x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}1\Rightarrow f_d'(0)=1$. Deoarece am obţinut $f_s'(0)=f_d'(0)=1$, rezultă de aici că funcţia f este derivabilă în punctul $x_0=0$ şi $f'(0)=1$. Atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în punctul $A(0,f(0))$ va fi $d: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow d: x-y-1=0$.

Operaţii cu funcţii derivabile

Fie $f,g: D\to\mathbb{R}$, $u: A\to D$ derivabile pe $D'\subset D$, respectiv pe $A'\subset A$ şi $c\in\mathbb{R}$.

Operaţia	*Derivata „operaţiei”*
adunarea	$\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$
înmulţirea cu scalari	$\big(c\cdot f(x)\big)'=c\cdot f'(x)$
înmulţirea	$\big(f(x)\cdot g(x)\big)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
împărţirea	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
	caz particular: $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$
compunerea	$\big(f(u(x))\big)'=f'\big(u(x)\big)\cdot u'(x)$

Scanned with OKEN Scanner

Derivarea funcţiilor elementare

Funcţia elementară	Domeniul de definiţie (D) şi domeniul de derivabilitate (D')	Derivata funcţiei elementare
$f(x)=c$	$D=D'=\mathbb{R}$	$c'=0$
$f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\neq 0$	$D=D'=\mathbb{R}^*$	$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D=[0,\infty)$; $D'=(0,\infty)$	$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=a^x$, $a>0, a\neq 1$	$D=D'=\mathbb{R}$	$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$
$f(x)=e^x$	$D=D'=\mathbb{R}$	$\left(e^x\right)'=e^x$
$f(x)=\log_a x$, $a>0, a\neq 1$	$D=D'=(0,\infty)$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$
$f(x)=\ln x$	$D=D'=(0,\infty)$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$f(x)=\sin x$	$D=D'=\mathbb{R}$	$(\sin x)'=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$D=D'=\mathbb{R}$	$(\cos x)'=-\sin x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$D=D'=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\operatorname{ctg} x$	$D=D'=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)=\arcsin x$	$D=[-1,1]$; $D'=(-1,1)$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$D=[-1,1]$; $D'=(-1,1)$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$D=D'=\mathbb{R}$	$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{x^2+1}$
$f(x)=\operatorname{arcctg} x$	$D=D'=\mathbb{R}$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{x^2+1}$

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

1. Determinaţi derivatele următoarelor funcţii:

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-e^x+2x-\ln 2$.

b. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-5\sqrt{x}+\frac{2}{x}-3\ln x$.

c. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

d. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

e. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-e^x}{x+e^x}$.

a. $f'(x)=\left(x^3-e^x+2x-\ln 2\right)'=\left(x^3\right)'-\left(e^x\right)'+(2x)'-(\ln 2)'=3x^2-e^x+2$

b. $f'(x)=\left(4x^3-5\sqrt{x}+\frac{2}{x}-3\ln x\right)'=\left(4x^3\right)'-\left(5\sqrt{x}\right)'+\left(\frac{2}{x}\right)'-(3\ln x)'=$

$=12x^2-\frac{5}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}$.

c. $f'(x)=(x\ln x)'=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

d. $f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$

$=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

e. $f'(x)=\left(\frac{x-e^x}{x+e^x}\right)'=\frac{\left(x-e^x\right)'\left(x+e^x\right)-\left(x-e^x\right)\left(x+e^x\right)'}{\left(x+e^x\right)^2}=\frac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Derivata a doua a unei funcţii.

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie reală derivabilă pe $D'\subset D$ (adică $f':D'\to\mathbb{R}$). Dacă funcţia f' este derivabilă pe $D''\subset D'$, atunci funcţia $f'':D''\to\mathbb{R}$, $f''(x)=(f')'(x),\forall x\in D''$ se numeşte ***derivata a doua*** (sau ***derivata de ordin 2***) a funcţiei f.

Exemple

Determinaţi a doua derivată pentru fiecare din funcţiile:

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-4x^3+1$.

b. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x+\dfrac{\ln x}{x}$.

c. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}-xe^x$.

a. Avem $f'(x)=4x^3-12x^2\Rightarrow f''(x)=12x^2-24x$.

b. $f'(x)=\ln x+1+\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{x^2+2\ln x-3}{x^3}$.

c. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-(x+1)e^x\Rightarrow f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}-(x+2)e^x$.

Regulile lui L'Hôspital

Fie $f,g:I\to\mathbb{R}$, cu $I\subset\mathbb{R}$ interval, două funcţii derivabile pe $I\setminus\{\alpha\}$, unde $\alpha\in I'$ astfel încât $g'(x)\neq 0,\forall x\in I\setminus\{\alpha\}$. Dacă $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\pm\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=\beta$, unde $\beta=0$ sau $\beta\in\{\pm\infty\}$ şi dacă există limita $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi limita $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ şi valoarea ei este tot l.

În fapt, regulile lui L'Hôspital afirmă că $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}\text{ sau }\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, ***dacă limita din dreapta există în*** $\overline{\mathbb{R}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Exemple

Calculaţi următoarele limite, utilizând regulile lui L'Hôspital:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln x}{x+e^x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\ln x-x^2}{x^3-1}$.

a. Ne aflăm în cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$. Cum există limita $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\ln x)'}{\left(x+e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+e^x}=$

$=\dfrac{1+\dfrac{1}{\infty}}{1+e^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$, va rezulta de aici că există şi limita iniţială şi valoarea ei va fi tot 0.

b. Analog ca la punctul anterior, ne aflăm în cazul $\dfrac{0}{0}$. Cum $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}+\ln x-x^2\right)'}{\left(x^3-1\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}-2x}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$, obţinem că limita cerută este egală cu $-\dfrac{1}{6}$.

Rolul derivatelor I şi II în studiul funcţiilor

Determinarea intervalelor de monotonie a unei funcţii, a punctelor de extrem şi a intervalelor de convexitate şi concavitate

Fie $f:I\to\mathbb{R}$, cu $I\subset\mathbb{R}$ interval, o funcţie de două ori derivabilă pe I.

Semnul derivatei		Concluzii referitoare la funcţia f
semnul funcţiei $f'(x)$	$f'(x)>0,\forall x\in I$	$f\nearrow$ (funcţia f este crescătoare pe I)
	$f'(x)<0,\forall x\in I$	$f\searrow$ (funcţia f este descrescătoare pe I)
sèmnul funcţiei $f''(x)$	$f''(x)>0,\forall x\in I$	funcţia f este convexă pe I
	$f''(x)<0,\forall x\in I$	funcţia f este concavă pe I

Observaţii foarte importante

3. ***Pentru determinarea intervalelor de monotonie*** ale unei funcţii $f:D\to\mathbb{R}$ derivabile pe $D'\subset D$ sau a ***punctelor de extrem*** sau pentru ***determinarea imaginii*** funcţiei cu scopul eventual al ***demonstrării unor inegalităţi***, procedăm astfel:

a. se determină derivata întâi (funcţia f') şi se află ***punctele critice*** ale funcţiei f, adică soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$ (fie acestea $x_1<x_2<\ldots<x_n\in D'$);

b. se realizează ***tabelul de variaţie al funcţiei***, care este un tabel de forma:

x	a	x_1	x_2	...	x_n	b
$f'(x)$		0	0	...	0	
$f''(x)$		$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$	

În tabel se trece semnul derivatei întâi (care se obţine atribuindu-i lui x câte o valoare convenabilă din fiecare interval format), semn ce permite stabilirea monotoniei funcţiei pe fiecare interval; se calculează, de asemenea valorile funcţiei f în fiecare punct critic şi limitele funcţiei la capetele domeniului de definiţie.

- Punctul (x_i de pe prima linie a tabelului) cu proprietatea că tipul de monotonie al funcţiei este diferit de o parte şi de alta a lui x_i este ***punct de extrem*** (mai exact x_i este ***punct de minim*** dacă $f\searrow$ în stânga lui şi $f\nearrow$ în dreapta lui, sau ***punct de maxim***, în cazul invers celui anterior).
- Dacă se cere în enunţ ***valoarea extremă*** (maximă sau minimă) ***a funcţiei***, atunci aceasta este $f(x_i)$.
- Dacă trebuie să determinăm ***imaginea funcţiei*** (sau ***mulţimea valorilor funcţiei***), atunci, tot din tabel, de pe linia lui $f(x)$ se aleg valorile extreme ale funcţiei, iar intervalul acestora este $\operatorname{Im} f$.

2. ***Un tabel similar celui de mai sus, cu deosebirea că, în locul derivatei I apare derivata II, permite, pe baza semnului funcţiei f'', determinarea intervalelor de convexitate şi concavitate a funcţiei f şi-n acelaşi timp a intervalelor de monotonie a funcţiei f' (conform cu cele de mai sus).***

Scanned with OKEN Scanner

3. ***Pentru a demonstra inegalităţi de forma*** $f(x)\geq g(x), \forall x\in D$ ***(sau orice altă relaţie de ordine ar fi între cele două funcţii) se procedează astfel:***

   a. ***se consideră funcţia*** $h:D\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)-g(x)$***; în acest moment trebuie demonstrat că*** $h(x)\geq 0, \forall x\in D$***;***

   b. ***din tabelul de variaţie al funcţiei*** h ***se obţine că*** $\operatorname{Im} h\subset[0,\infty)$***, ceea ce încheie rezolvarea cerinţei.***

Exemple

1. Pentru fiecare din următoarele funcţii determinaţi intervalele de monotonie, punctele de extrem, mulţimea valorilor funcţiei respective precum şi intervalele de convexitate / concavitate:

   a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^3+6x^2+15x+1$.

   b. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-\ln x$.

   c. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

   a. Avem $f'(x)=-3x^2+12x+15$. Din $f'(x)=0\Rightarrow x\in\{-1,5\}$. Apoi $f''(x)=-6x+12$ şi $f''(x)=0\Leftrightarrow x=2$. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\mp\infty$, din tabelul de variaţie al funcţiei obţinem $f\searrow$ pe fiecare din intervalele $(-\infty,-1]$ şi $[5,\infty)$ iar $f\nearrow$ pe intervalul $[-1,5]$; $x_1=-1$ este punct de minim (local) al funcţiei, $x_2=5$ este punct de maxim (local) al funcţiei şi $\operatorname{Im} f=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$. Realizând eventual un alt tabel pentru derivata II, din semnul acesteia deducem că funcţia f este convexă pe intervalul $(-\infty,2]$ (interval pe care $f'\nearrow$) şi concavă pe $[2,\infty)$ (interval pe care $f'\searrow$).

   b. Obţinem: $f'(x)=4x-\dfrac{1}{x}$ şi $f''(x)=4+\dfrac{1}{x^2}$. Din $f'(x)=0\overset{x>0}{\Rightarrow} x=\dfrac{1}{2}$ şi cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2+\dfrac{1}{2}$; aşadar $f\searrow$ pe

Scanned with OKEN Scanner

intervalul $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $f\nearrow$ pe intervalul $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$. $x_0=\frac{1}{2}$ este punct de minim, iar $\operatorname{Im} f=\left[\ln 2+\frac{1}{2},\infty\right)$. Deoarece $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă de aici că funcţia f este convexă pe tot intervalul $(0,\infty)$, altfel spus $f'\nearrow$ pe $(0,\infty)$.

c. Obţinem succesiv $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}=0\Rightarrow x=1$ şi $f''(x)=\frac{x-2}{e^x}=0\Rightarrow x=2$. Avem, de asemenea, $f(1)=\frac{1}{e}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. Din tabel rezultă $f\searrow$ pe intervalul $[1,\infty)$, $f\nearrow$ pe intervalul $(-\infty,1]$; $x_1=1$ este punct de maxim, iar $\operatorname{Im} f=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$. Funcţia f este concavă pe intervalul $(-\infty,2]$ şi convexă pe $[2,\infty)$.

2. Demonstraţi inegalităţile:

a. $e^x\geq x+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

b. $x-\ln x\geq 1,\forall x>0$.

a. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x-1$. Avem $f'(x)=e^x-1=0\Rightarrow x=0$. Avem $f(0)=0$ şi, din tabelul de variaţie al funcţiei, rezultă $f\searrow$ pe intervalul $(-\infty,0]$, $f\nearrow$ pe intervalul $[0,\infty)$, deci $x_0=0$ este punct de minim. Obţinem de aici că $f(x)=e^x-x-1\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă concluzia.

b. Analog ca mai sus, dacă considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln x-1$, avem de arătat că $f(x)\geq 0,\forall x>0$. Cum $f'(x)=1-\frac{1}{x}=0\Rightarrow x=1$, $f(1)=0$ şi din tabelul de variaţie obţinem că $x_0=1$ este punct de minim, adică $f(x)\geq f(1)=0,\forall x>0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Clasa a XII-a, M_2

Lege de compoziţie internă. Proprietăţi. Grupuri

Dacă $M \neq \varnothing$, atunci orice funcţie $f : M \times M \to M$ care asociază perechii $(x, y) \in M \times M$ unicul element $f\big((x, y)\big) \in M$ se numeşte ***lege de compoziţie internă*** (***operaţie algebrică***) pe mulţimea M. De regulă pentru reprezentarea lui $f\big((x, y)\big)$ se utilizează simboluri, precum: $x * y$, $x \circ y$, $x \perp y$, $x \Delta y$, etc.

Observaţii şi exemple

1. Într-un limbaj mai puţin riguros din punct de vedere ştiinţific, ***legile de compoziţie definite pe o mulţime nevidă sunt de fapt operaţii pe acea mulţime*** şi ele pot fi clasificate în:

   a. ***legi de compoziţie „elementare"***, adică cele deja studiate, precum: adunarea (numerelor, funcţiilor, matricelor), înmulţirea (numerelor, funcţiilor, matricelor), compunerea (funcţiilor, permutărilor), reuniunea, intersecţia mulţimilor, etc.; acestea au simboluri specifice ($+$ pentru adunare, $\cdot$ pentru înmulţire, $\cup$ pentru reuniune, etc.);

   b. ***legi de compoziţie „neelementare"***, sunt acele operaţii definite într-un enunţ prin intermediul ***legilor de compoziţie „elementare"***, a căror aplicabilitate este doar pentru acea problemă şi care au ca reprezentare grafică simboluri precum $*$, $\circ$, $\perp$, Δ, etc., pentru a se evita confuzia lor cu cele cunoscute.

2. ***Exemplu***

Pe mulţimea $M = \mathbb{R}$ definim operaţia $*$ prin $x * y = x + y - xy$.

a. Calculaţi $2010 * \dfrac{2008}{2009}$.

b. Rezolvaţi în M ecuaţia $x * (x - 1) = 1$.

c. Arătaţi că $x * 1 = 1 * x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a. Avem $2010 * \dfrac{2008}{2009} = 2010 + \dfrac{2008}{2009} - 2010 \cdot \dfrac{2008}{2009} = 2$.

b. $x * (x - 1) = 1 \Leftrightarrow x + (x - 1) - x(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}$.

c. Cum $x * 1 = x + 1 - x \cdot 1 = 1$ şi $1 * x = 1 + x - 1 \cdot x = 1$, rezultă concluzia.

Scanned with OKEN Scanner

Tabla operaţiei

Dacă pe mulţimea finită $M=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ este definită o operaţie algebrică $*$, atunci tabelul următor se numeşte ***tabla operaţiei*** $*$ (***tabla lui Cayley***):

$*$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_j	...	x_n
x_1	x_1*x_1	x_1*x_2	...	x_1*x_i	...	x_1*x_j	...	x_1*x_n
x_2	x_2*x_1	x_2*x_2	...	x_2*x_i	...	x_2*x_j	...	x_2*x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
x_i	x_i*x_1	x_i*x_2	...	x_i*x_i	...	x_i*x_j	...	x_i*x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
x_j	x_j*x_1	x_j*x_2	...	x_j*x_i	...	x_j*x_j	...	x_j*x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
x_n	x_n*x_1	x_n*x_2	...	x_n*x_i	...	x_n*x_j	...	x_n*x_n

Exemplu

Pe mulţimea $M=\{-1,0,1\}$ se defineşte operaţia algebrică $*$ prin $x*y=\sqrt[3]{xy}$. Atunci tabla operaţiei $*$ este:

$*$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Parte stabilă

Fie $M\neq\varnothing$ şi $*$ o operaţie pe M. O submulţime nevidă $H\subset M$ se numeşte ***parte stabilă a lui M în raport cu operaţia*** $*$ dacă şi numai dacă $\forall\, x,y\in H\Rightarrow x*y\in H$.

Exemple

Pe $M=\mathbb{R}$ este definită operaţia $*$ prin $x*y=xy-2(x+y)+6$. Verificaţi care din următoarele submulţimi ale lui M sunt părţi stabile în raport cu operaţia $*$:

a. $A=(2,\infty)$

b. $B=\mathbb{N}$

c. $C=[-2,2]$

d. $D=[3,\infty)$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

a. Ar trebui ca $x*y\in A,\forall x,y\in A$, adică $xy-2x-2y+6>2,\forall x,y\in A\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-2)(y-2)>0,\forall x,y\in A$, adevărat, deoarece $x,y\in A\Rightarrow x-2>0,y-2>0$.

b. $B=\mathbb{N}$ nu este parte stabilă întrucât, pentru $x=1\in\mathbb{N},y=5\in\mathbb{N}$ obţinem $x*y=-1\notin\mathbb{N}$.

c. Mulţimea $C=[-2,2]$ nu este parte stabilă a lui M în raport cu operaţia $*$ pentru că $\exists x,y\in\mathbb{N}$, astfel încât $x*y\notin\mathbb{N}$, de exemplu pentru $x=y=-1\in[-2,2]\Rightarrow x*y=11\notin[-2,2]$.

d. Ar trebui ca $x*y\in D,\forall x,y\in D$, adică $xy-2x-2y+6\geq 4,\forall x,y\in D\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-2)(y-2)\geq 2,\forall x,y\in D$, propoziţie adevărată deoarece $x,y\in D\Rightarrow$ $\Rightarrow x-2\geq 2,y-2\geq 2$, inegalităţi care înmulţite conduc la $\Leftrightarrow(x-2)(y-2)\geq 4$.

Proprietăţile legilor de compoziţie

Pe mulţimea $M\neq\varnothing$ este definită o operaţie $*$. Atunci

Proprietatea operaţiei	***Definiţie***
ASOCIATIVITATEA	$x*(y*z)=(x*y)*z,\ \forall x,y,z\in M$
COMUTATIVITATEA	$x*y=y*x,\ \forall x,y,\in M$
ELEMENTUL NEUTRU	$\exists e\in M$, numit ***element neutru*** astfel încât $x*e=e*x=x,\ \forall x\in M$
ELEMENT SIMETRIZABIL	Presupunem că $*$ admite elementul neutru $e\in M$. $x\in M$ se numeşte ***simetrizabil***, dacă $\exists x'\in M$ numit ***simetricul lui*** x astfel încât $x*x'=x'*x=e$

GRUPURI

Pe mulţimea $G\neq\varnothing$ este definită o operaţie $*$. Atunci perechea $(G,*)$ se numeşte ***grup*** dacă sunt îndeplinite următoarele trei proprietăţi:

1. $x*(y*z)=(x*y)*z,\ \forall x,y,z\in G$, adică operaţia $*$ este ***asociativă***;
2. $\exists e\in G$ astfel încât $x*e=e*x=x,\ \forall x\in G$, adică $*$ are ***element neutru***;
3. $\forall x\in G,\exists x'\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$, adică ***orice element*** $x\in G$ ***este simetrizabil***, deci are un ***simetric*** $x'\in G$.

Dacă, în plus, $x*y=y*x,\ \forall x,y,\in G$, adică operaţia $*$ este ***comutativă***, atunci cuplul $(G,*)$ se numeşte ***grup comutativ*** (***abelian***)

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăţi ale elementelor simetrizabile ale unui grup

Fie $(G,*)$ un grup cu elementul neutru e. Atunci pentru orice $x,y\in G$ avem:

$e'=e$	$(x')'=x$
$(x*y)'=y'*x'$	

Morfisme şi izomorfisme de grupuri

Dacă $(G_1,*)$ şi $(G_2,\circ)$ sunt două grupuri, atunci orice funcţie $f:G_1\to G_2$ care verifică proprietatea $f(x*y)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y\in G_1$ se numeşte ***morfism de grupuri.***

În plus, dacă funcţia f este şi bijectivă, atunci ea se numeşte ***izomorfism de grupuri,*** iar în această situaţie grupurile se numesc ***izomorfe*** (notăm $(G_1,*)\simeq(G_2,\circ)$).

Proprietăţi

Fie $(G_1,*)$ şi $(G_2,\circ)$ două grupuri, având elementele neutre $e_1\in G_1$, respectiv $e_2\in G_2$ şi $f:G_1\to G_2$ un morfism de grupuri. Pentru $\forall x\in G_1$ au loc egalităţile:

$f(e_1)=e_2$	$f(x')=(f(x))'$

Observaţii

1. Dacă pe mulţimea $M\neq\varnothing$, finită, se defineşte o operaţie $*$, atunci tabla lui Cayley permite argumentarea proprietăţilor operaţiei $*$ astfel:

   a. $H\neq\varnothing, H\subset M$ este parte stabilă a lui M în raport cu operaţia $*$, dacă toate elementele tablei (realizată doar pe mulţimea H) aparţin lui H;

   b. operaţia $*$ este comutativă, dacă tabla lui Cayley este simetrică faţă de propria-i diagonală principală;

   c. operaţia $*$ are element neutru, dacă în tablă, pe linia, respectiv coloana unui anumit element din M se regăsesc, în aceeaşi ordine, toate elementele mulţimii M; în această situaţie elementul pe linia / coloana căruia se întâmplă acest lucru este elementul neutru al operaţiei;

Scanned with OKEN Scanner

d. un element $x \in M$ este simetrizabil în raport cu operaţia $*$, care are elementul neutru $e \in M$, dacă pe linia, respectiv coloana lui x regăsim elementul neutru, caz în care elementul corespunzător mulţimii situat pe coloană este simetricul său x'.

2. Dacă pe mulţimea $G \neq \varnothing$, finită, se defineşte o operaţie $*$, atunci $(G,*)$ este grup dacă, în tabla lui Cayley toate elementele mulţimii G apar, pe fiecare linie, respectiv coloană, într-o altă ordine, fără să se repete.

3. Proprietatea $f(e_1)=e_2$, verificată de orice morfism de grupuri, permite determinarea parametrului (sau aflarea unei relaţii între parametri) prezent în funcţia dată despre care se ştie, în ipoteză, că este morfism de grupuri.

Exemple

1. Fie mulţimea $G=(1,\infty)$ şi legea de compoziţie $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

a. Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

b. Să se determine numerele m şi n astfel încât funcţia $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=\sqrt{mx+n}$ să fie un izomorfism între $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$ şi $(G,*)$.

a. Operaţia $*$ este lege de compoziţie internă pe mulţimea G

$\Leftrightarrow \forall x,y\in(1,\infty)\Rightarrow x*y\in(1,\infty)\Leftrightarrow \sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}\geq 1\Leftrightarrow (x^2-1)(y^2-1)\geq 0$

adevărat, întrucât $x,y>1$.

„$*$" este comutativă deoarece au loc egalităţile:

$$\left.\begin{aligned} x*y&=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}\\ y*x&=\sqrt{y^2x^2-y^2-x^2+2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x*y=y*x,\ \forall x,y\in G.$$

„$*$" este asociativă deoarece:

$$x*(y*z)=x*\sqrt{y^2z^2-y^2-z^2+2}=\sqrt{x^2y^2z^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2+x^2+y^2+z^2}$$

şi

$$(x*y)*z=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}*z=\sqrt{x^2y^2z^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2+x^2+y^2+z^2}$$

„$*$" are element neutru, dacă $\exists e\in G$ astfel încât $x*e=e*x=x,\ \forall x\in G\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2e^2-x^2-e^2+2}=x,\ \forall x\in G\Rightarrow(x^2-1)(e^2-2)=0,\ \forall x\in G\Rightarrow e=\sqrt{2}\in G$$

$\forall x\in G,\ \exists x'\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=e\Rightarrow\sqrt{x^2x'^2-x^2-x'^2+2}=\sqrt{2}\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$x'^2\left(\underbrace{x^2-1}_{>0}\right)=x^2\Rightarrow x'^2=\dfrac{x^2}{x^2-1}\Rightarrow x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>1$. Deci orice element din G este simetrizabil, prin urmare din toate cele 5 proprietăţi verificate anterior, rezultă că $(G,*)$ este grup abelian.

b. Funcţia $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=\sqrt{mx+n}$ trebuie să fie morfism de grupuri, adică $f(x\cdot y)=f(x)*f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$ şi trebuie să fie şi bijectivă.

Din $f(e_1)=e_2$, unde $e_1=1$ şi $e_2=\sqrt{2}$ sunt elementele neutre din cele două grupuri, obţinem $m+n=2$, adică $n=2-m\Rightarrow f(x)=\sqrt{mx+2-m}$, iar din condiţia de bijectivitate rezultă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=1\Rightarrow\sqrt{2-m}=1\Rightarrow m=1$, deci $m=n=1\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x+1}$, funcţie care verifică şi relaţia $f(x\cdot y)=f(x)*f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$, pentru că $f(x\cdot y)=\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{(x+1)\cdot(y+1)-(x+1)-(y+1)+2}=f(x)*f(y)$, adevărat pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

2. Fie $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\middle|\, a^2+b^2\neq 0\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Fie două matrice oarecare din G: $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c\end{pmatrix}$, cu $a^2+b^2\neq 0$, $c^2+d^2\neq 0\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}ac-bd & ad+bc\\ -(ad+bc) & ac-bd\end{pmatrix}\in G$, cu $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=$

$=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\neq 0$, deci G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

Comutativitatea reiese din $B\cdot A=\begin{pmatrix}ac-bd & ad+bc\\ -(ad+bc) & ac-bd\end{pmatrix}=A\cdot B$.

Asociativitatea înmulţirii este adevărată pe caz general pentru orice matrice pătratice, deci va fi adevărată şi pe cazul particular al matricelor din mulţimea G.

Se cunoaşte că elementul neutru la înmulţirea matricelor pătratice de ordinul 2 este I_2, care aparţine lui G, pentru că $a=1\in\mathbb{R}, b=0\in\mathbb{R}$ şi $a^2+b^2=1\neq 0$. Orice element al mulţimii G este o matrice inversabilă, câtă vreme $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in G$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$\det A = a^2 + b^2 \neq 0$, iar inversa ei este $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in G$, deoarece

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)^2 = \frac{1}{a^2+b^2} \neq 0.$$

Prin urmare $(G,\cdot)$ este grup abelian.

3. Fie $G = \left\{ a+b\sqrt{2} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Z}, a^2-2b^2=1 \right\}$.

a. Verificaţi dacă $3+\sqrt{8} \in G$.

b. Demonstraţi că mulţimea G, împreună cu înmulţirea numerelor reale, este grup abelian.

a. $3+\sqrt{8} = 3+2\sqrt{2} \in G$, pentru că $a=3 \in \mathbb{Z}$, $b=2 \in \mathbb{Z}$ şi $a^2-2b^2 = 3^2-2\cdot 2^2 = 1$.

b. Mulţimea G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulţirea numerelor reale, dacă $\forall x,y \in G \Rightarrow x\cdot y \in G$. Fie $x = a+b\sqrt{2}$, $y = c+d\sqrt{2}$, cu $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ şi $a^2-2b^2 = c-2d^2 = 1$; atunci $x\cdot y = \left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right) =$

$= \left(\underbrace{ac+2bd}_{=m}\right) + \left(\underbrace{ad+bc}_{=n}\right) = m+n\sqrt{2}$. Evident că $m,n \in \mathbb{Z}$ şi avem

$$m^2-2n^2 = (ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 = \left(a^2-2b^2\right)\left(c^2-2d^2\right) = 1.$$

Asociativitatea şi comutativitatea înmulţirii numerelor reale sunt cunoscute, elementul neutru este $e = 1 = 1+0\sqrt{2} \in G$, pentru că $a=1 \in \mathbb{Z}$, $b=0 \in \mathbb{Z}$ şi $1^2-2\cdot 0^2 = 1$. Orice element $x = a+b\sqrt{2} \in G$ este inversabil deoarece $x \neq 0$ ($x = a+b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a=b=0$, valori ce nu verifică $a^2-2b^2=1$) şi în plus $x^{-1} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = a+(-b)\sqrt{2}$ este din G întru $G = (-3,\infty)$ cât $a,(-b) \in \mathbb{Z}$, $a^2-2(-b)^2 = = a^2-2b^2 = 1$. Deci $(G,\cdot)$ este grup abelian.

4. Pe $\mathbb{R}$ se consideră operaţia $x*y = xy+3x+3y+a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a. Pentru $a=6$ rezolvaţi ecuaţia $\left(x^2+x-9\right)*\left(3x^2+x-7\right) = -3$.

b. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care operaţia $*$ este asociativă.

c. Aflaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât operaţia $*$ să aibă element neutru.

Scanned with OKEN Scanner

d. Determinaţi valorile lui $a\in\mathbb{R}$, pentru care $\exists b\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*b=b*x=b,\forall x\in\mathbb{R}$.

e. Dacă $a=6$, determinaţi elementele simetrizabile ale mulţimii $\mathbb{Z}$ în raport cu operaţia $*$.

f. Pentru $a=6$ calculaţi $\left(\log_2\frac{1}{2010}\right)*\left(\log_2\frac{1}{2009}\right)*\ldots*\left(\log_2\frac{1}{1}\right)$.

a. $a=6\Rightarrow x*y=(x+3)(y+3)-3$: ecuaţia devine

$$\left(\left(x^2+x-9\right)+3\right)\left(\left(3x^2+x-7\right)+3\right)-3=-3\Rightarrow\left(x^2+x-6\right)\left(3x^2+x-4\right)=0$$

de unde $x\in\left\{-3,-\frac{4}{3},1,2\right\}$.

b. Operaţia $*$ este asociativă, deci $x*(y*z)=(x*y)*z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow(a-6)(z-x)=0,\forall x,z\in\mathbb{R}$. Aşadar $a=6$.

c. Operaţia $*$ are element neutru, deci $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$; obţinem $x(e+2)+(3e+a)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Această ultimă relaţie, privită ca o ecuaţie de gradul I în necunoscuta x, trebuie să aibă, conform condiţiei din final, o infinitate de soluţii, prin urmare toţi coeficienţii ei trebuie să fie nuli, adică $e+2=3e+a=0$. Rezultă de aici că $e=-2$ şi $a=6$.

d. $\exists b\in\mathbb{R}:\ x*b=b*x=b,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x(b+3)+(2b+a)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Aplicând acelaşi raţionament ca la punctual anterior obţinem $\begin{cases}b+3=0\\2b+a=0\end{cases}$; deci $b=-3$ şi $a=6$.

e. Pentru $a=6$, conform cu punctul c., elementul neutru este $e=-2\in\mathbb{Z}$. Dacă $x\in\mathbb{Z}$ este un element simetrizabil, atunci $\exists x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$. Deci $x'(x+3)=-3x-8$. Dacă $x=-3$ rezultă $x'\cdot 0=1$, fals, deci $x=-3$ nu este simetrizabil; pentru $x\neq-3$ obţinem $x'=-\frac{3x+8}{x+3}$. Cum $x'\in\mathbb{Z}$ rezultă că $x'=-\frac{3x+8}{x+3}=-3+\frac{1}{x+3}\in\mathbb{Z}$, adică $\frac{1}{x+3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+3\in D_1=\{\pm1\}$; în final se obţine $x\in\{-2,-4\}$, deci doar aceste două elemente ale lui $\mathbb{Z}$ sunt simetrizabile faţă de operaţia $*$.

f. Dacă $a=6$, din punctul d., rezultă că $x*(-3)=(-3)*x=(-3),\forall x\in\mathbb{R}$

Deoarece pentru $a=6$ operaţia $*$ este comutativă şi asociativă, iar în compunerea celor

Scanned with OKEN Scanner

2010 elemente din enunţ se află şi $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, în baza relaţiei anterioare va rezulta, din aproape în aproape, că valoarea expresiei numerice este egală cu -3.

Mulţimea claselor de resturi modulo n

Pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$ resturile împărţirii la n a oricărui număr întreg sunt din mulţimea $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, adică $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m = nk + r$, unde $r \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Se definesc următoarele mulţimi:

$\hat{0} = \{ nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-n,0,n,\ldots\}$ (se numeşte ***clasa lui*** 0 şi reprezintă mulţimea tuturor numerelor întregi care dau, prin împărţire la n restul 0);

$\hat{1} = \{ nk+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-n+1,1,n+1,\ldots\}$ (se numeşte ***clasa lui*** 1 şi reprezintă mulţimea tuturor numerelor întregi care dau, prin împărţire la n, restul 1);

$\vdots$

$\widehat{n-1} = \{ nk+(n-1) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-1,n-1,2n-1,\ldots\}$ (se numeşte ***clasa lui*** $n-1$ şi reprezintă mulţimea tuturor numerelor întregi care dau, prin împărţire la n restul $n-1$).

Atunci $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{n-1}\}$ se numeşte ***mulţimea claselor de resturi modulo n***.

Exemplu

$\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}$, unde $\hat{0} = \{\ldots,-6-3,0,3,6,\ldots\}$, $\hat{1} = \{\ldots,-5-2,1,4,7,\ldots\}$ şi $\hat{2} = \{\ldots,-4-1,2,5,8,\ldots\}$.

Operaţii pe $\mathbb{Z}_n$. Proprietăţi

Dacă $\hat{a},\hat{b} \in \mathbb{Z}_n$ atunci se definesc:

- ***adunarea modulo n*** prin: $\hat{a} + \hat{b} \overset{def}{=} \widehat{a+b}$;
- ***înmulţirea modulo n*** prin: $\hat{a} \cdot \hat{b} \overset{def}{=} \widehat{a \cdot b}$.

Au loc următoarele proprietăţi ale mulţimii $\mathbb{Z}_n$ relativ la cele două operaţii:

Scanned with OKEN Scanner

Cuplul	*Structura algebrică*	*Proprietăţi mai importate*
$(\mathbb{Z}_n,+)$	grup abelian	*Elementul neutru este:* $e=\hat{0}$
		Orice element din $\mathbb{Z}_n$ *are un opus:* $\hat{k}' \overset{not}{=} -\hat{k} = \widehat{n-k},\ \forall \hat{k} \in \mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\}$ *şi* $\hat{0}' \overset{not}{=} -\hat{0} = \hat{0}$
$(\mathbb{Z}_n,\cdot)$	monoid comutativ	*Elementul neutru este:* $e=\hat{1}$
		Elementele inversabile sunt doar cele din mulţimea $U(\mathbb{Z}_n)=\left\{\hat{k}\in\mathbb{Z}_n \middle| (k,n)=1\right\}$, *adică acele clase de resturi* $\hat{k}$ *pentru care* k *şi* n *sunt prime între ele (c.m.m.d.c. al lor este egal cu 1)*
$(\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$, p prim	grup abelian	$\hat{a}^{p-1}=\hat{1}$, *pentru orice* $\hat{a}\in\mathbb{Z}_p^*$

Observaţii metodice

1. *Când avem de calculat o sumă de clase de resturi ideea este să le grupăm (de regulă câte două) astfel ca suma în fiecare grupă să fie egală cu* $\hat{0}$; *când avem de calculat un produs de clase de resturi ideea este dacă putem găsi doi factori al căror produs să fie* $\hat{0}$ *(acest lucru este posibil dacă* n *nu este număr prim).*

2. *Soluţiile unei ecuaţii cu coeficienţi din* $\mathbb{Z}_n$ *se pot obţine prin verificarea efectivă a tuturor elementelor lui* $\mathbb{Z}_n$, *putând obţine soluţie unică, nicio soluţie sau mai mult de o soluţie; dacă ecuaţia este de forma* $\hat{a}x+\hat{b}=\hat{c}$ *şi* $\hat{a}\in U(\mathbb{Z}_n)$, *atunci ea are soluţia unică* $x=\widehat{a^{-1}}\cdot\widehat{c-b}$.

3. *Un sistem de ecuaţii liniare având matricea pătratică şi coeficienţii din* $\mathbb{Z}_n$ *este sistem de tip Cramer dacă* $\det A\in U(\mathbb{Z}_n)$ *(*A *reprezintă matricea asociată sistemului); în acest caz formulele lui Cramer se aplică sub forma* $x_1=\widehat{\det A}^{-1}\cdot\widehat{\Delta x_1}$, ... etc.

4. *O matrice* $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}_n)$ *este inversabilă dacă* $\det A\in U(\mathbb{Z}_n)$; *în acest caz determinarea inversei se face după formula* $A^{-1}=\widehat{\det A}^{-1}\cdot A^*$, *matricea adjunctă având elementele* $A_{ij}=\widehat{(-1)^{i+j}}\cdot\delta_{ij}$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

1. Calculaţi:
   a. $\hat{4}\cdot\hat{3}+\hat{2}\cdot\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$.
   b. $\hat{5}^{-1}-\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_7$.
   c. Suma tuturor elementelor mulţimii $\mathbb{Z}_{2010}$.
   d. Produsul tuturor elementelor nenule ale mulţimii $\mathbb{Z}_{2010}$.
   e. Suma elementelor inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$.

   a. $\hat{4}\cdot\hat{3}+\hat{2}\cdot\hat{5}=\hat{5}+\hat{3}=\hat{1}$.

   b. $\hat{5}^{-1}-\hat{3}=\hat{3}+\hat{4}=\hat{0}$.

   c. $\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\ldots+\widehat{2009}=\left(\underbrace{\hat{1}+\widehat{2009}}_{=\hat{0}}\right)+\left(\underbrace{\hat{2}+\widehat{2008}}_{=\hat{0}}\right)+\ldots+$

   $+\left(\underbrace{\widehat{1004}+\widehat{1006}}_{=\hat{0}}\right)+\widehat{1005}=\widehat{1005}$.

   d. $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\widehat{2009}=\left(\underbrace{\hat{7}\cdot\widehat{287}}_{=\hat{0}}\right)\cdot\ldots=\hat{0}$.

   e. Avem $U(\mathbb{Z}_{12})=\left\{\hat{k}\in\mathbb{Z}_{12}\middle|(k,12)=1\right\}=\left\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},\widehat{11}\right\}$, deci suma lor va fi

   $\hat{1}+\hat{5}+\hat{7}+\widehat{11}=\left(\underbrace{\hat{1}+\widehat{11}}_{=\hat{0}}\right)+\left(\underbrace{\hat{5}+\hat{7}}_{=\hat{0}}\right)=\hat{0}$.

2. Determinaţi în $\mathbb{Z}_5$:

   a. Soluţiile ecuaţiei $\hat{4}x+\hat{3}=\hat{1}$.

   b. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix}\hat{4} & \hat{2}\\ \hat{3} & \hat{1}\end{vmatrix}$.

   c. Inversa matricei $A=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{3}\\ \hat{4} & \hat{3}\end{pmatrix}$.

   d. Soluţiile sistemului $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{4}\\ \hat{3}x+\hat{4}y=\hat{2}\end{cases}$.

   a. Adunând opusul lui $\hat{3}$, adică $\hat{2}$ obţinem $\hat{4}x=\hat{3}$. Cum $(4,5)=1\Rightarrow$ $\Rightarrow\hat{4}\in U(\mathbb{Z}_5)$ şi $\hat{4}^{-1}=\hat{4}$ (pentru că $\hat{4}\cdot\hat{4}=\hat{1}$). Înmulţind acum ultima ecuaţie cu $\hat{4}$ obţinem soluţia unică $x=\hat{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

b. Avem $\begin{vmatrix} \hat{4} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{vmatrix} = \hat{4}\cdot\hat{1} - \hat{2}\cdot\hat{3} = \hat{4} - \hat{1} = \hat{4} + \hat{4} = \hat{3}$.

c. $\det A = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{1} - \hat{2} = \hat{1} + \hat{3} = \hat{4} \in U(\mathbb{Z}_5)$ şi $\hat{4}^{-1} = \hat{4}$. Deci A este inversabilă şi $A^{-1} = \widehat{\det A}^{-1} \cdot A^* = \hat{4}\cdot\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix} = A$.

d. Sistemul este Cramer deoarece $\det A = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{vmatrix} = \hat{3} - \hat{4} = \hat{3} + \hat{1} = \hat{4} \in U(\mathbb{Z}_5)$ şi $\widehat{\det A}^{-1} = \hat{4}^{-1} = \hat{4}$. Deci $x = \widehat{\det A}^{-1} \cdot \hat{\Delta x} = \hat{4}\cdot\hat{0} = \hat{0}$ şi $y = \widehat{\det A}^{-1} \cdot \hat{\Delta} = \hat{4}\cdot\hat{2} = \hat{3}$.

Inele şi corpuri

Tripletul $(A, *, \circ)$, unde $A \neq \varnothing$, iar $*$ şi $\circ$ sunt două operaţii definite pe A se numeşte ***inel*** dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $(A, *)$ este grup abelian;
2. $(A, \circ)$ este monoid;
3. $\circ$ este distributivă faţă de $*$, adică: $\begin{cases} x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \\ (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z) \end{cases}, \forall x, y, z \in A$

Dacă în plus operaţia $\circ$ este şi comutativă atunci $(A, *, \circ)$ se numeşte ***inel comutativ.***

Tripletul $(K, *, \circ)$, unde $K \neq \varnothing$, iar $*$ şi $\circ$ sunt două operaţii definite pe A se numeşte ***corp*** dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $(K, *)$ este grup abelian (având elementul neutru e_1);
2. $(K \setminus \{e_1\}, \circ)$ este grup;
3. $\circ$ este distributivă faţă de $*$, adică: $\begin{cases} x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \\ (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z) \end{cases}, \forall x, y, z \in A$

Dacă în plus operaţia $\circ$ este şi comutativă atunci $(K, *, \circ)$ se numeşte ***corp comutativ.***

Exemplu

Demonstraţi că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel comutativ, unde pe mulţimea $\mathbb{Z}$ operaţiile $*$ şi $\circ$ sunt definite astfel: $x * y = x + y + 1$ şi $x * y = x + y + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom justifica doar "cele două distributivităţi", celelalte axiome presupunându-se cunoscute. Avem succesiv: $x\circ(y*z)=x\circ(y+z+1)=xy+xz+2x+y+z+1$ şi $(x\circ y)*(x\circ z)=(xy+x+y)*(xz+x+z)=xy+xz+2x+y+z+1$; din cele două relaţii rezultă că distributivitatea la stânga este demonstrată. Justificăm acum distributivitatea la dreapta: $(x*y)\circ z=(x+y+1)\circ z=xz+yz+x+y+2z+1$ şi $(x\circ z)*(y\circ z)=(xz+x+z)*(yz+y+z)=xz+yz+x+y+2z+1$.

Observaţii

1. Următoarele triplete sunt inele comutative: $(A,+,\cdot)$, unde A este una din mulţimile $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sau $\mathbb{Z}_n$.
2. Tripletele următoare sunt corpuri comutative: $(K,+,\cdot)$, unde K este una din mulţimile $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ sau $\mathbb{Z}_p$ cu p număr prim.
3. Rezolvările de ecuaţii, sisteme de ecuaţii care au coeficienţi într-un inel / corp (eventual comutativ) au la bază utilizarea proprietăţilor (în număr maxim de 12) pe care le au cele două operaţii ale acelui inel / corp (eventual comutativ).

Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ

Fie $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ, unde K, de regulă, este una din mulţimile $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ sau $\mathbb{Z}_p$ (cu p număr prim). Atunci ***polinomul*** f are următoarele elemente caracteristice:

Elemente caracteristice ale polinomului f	***Notaţii, definiţii***
formă algebrică	$f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$
mulţimea de apartenenţă	$K[X]$
nedeterminata polinomului	X
coeficienţii polinomului	$a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\in K$
gradul polinomului	$\operatorname{grad} f=n=\max\{k\in\mathbb{N}\mid a_k\neq 0\}$
coeficientul dominant al polinomului	$a_n\Leftrightarrow\operatorname{grad} f=n$
termenul liber al polinomului	a_0

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea polinoamelor

Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$, $g=b_mX^m+b_{m-1}X^{m-1}+\ldots+b_1X+b_0$ două polinoame din $K[X]$. Atunci $f=g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{grad } f=\text{grad } g \Leftrightarrow n=m \\ a_i=b_i,\ \forall i=\overline{1,n} \end{cases}$

Exemple

1. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^2+3X-2$ şi $g=mX^2+\left(2m^2+1\right)X-m-1$. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care $f=g$.

Conform definiţiei rezultă $\begin{cases} m=1 \\ 2m^2+1=3 \\ -m-1=-2 \end{cases}$, adică $m=1$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{1}$ şi $g=\left(\hat{3}m+\hat{4}\right)X^3+\left(m+\hat{2}\right)X^2+\left(m+\hat{1}\right)\cdot X+\hat{1}$. Determinaţi $m\in\mathbb{Z}_5$ pentru care polinoamele sunt egale.

Avem în baza definiţiei că $\begin{cases} \hat{3}m+\hat{4}=\hat{0} \\ m+\hat{2}=\hat{4} \\ m+\hat{1}=\hat{3} \end{cases}$; din cele trei relaţii se obţine $m=\hat{2}$.

Operaţii cu polinoame

Adunarea polinoamelor : se adună termenii de acelaşi grad (cei care au exponenţi egali ai nedeterminatei X)

Înmulţirea polinoamelor : se ţine seama de distributivitatea înmulţirii faţă de adunare şi apoi se „reduc" termenii asemenea (cei care au exponenţi egali ai nedeterminatei X); ***înmulţirea cu scalari a polinoamelor*** este caz particular în care unul din factori este polinom constant nenul (gradul său este 0)

Exemple

1. Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=2X^2-X-1$ şi $f=2X^2+X+1$. Determinaţi polinoamele $f+g$, $3g-2f$ şi $f\cdot g$.

$f+g=2X^2-X-1+2X^2+X+1=4X^2$; analog $3g-2f=2X^2+5X+5$ şi $f\cdot g=\left(2X^2-X-1\right)\left(2X^2+X+1\right)=4X^4+2X^3+2X^2-2X^3-X^2-X-$

Scanned with OKEN Scanner

$-2X^2-X-1=4X^4-X^2-2X-1$.

2. Dacă $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{1}$ şi $g=\hat{4}X^3+\hat{2}X+\hat{4}$. Determinaţi $f+g$ şi $f\cdot g$.

Avem $f+g=\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{1}+\hat{4}X^3+\hat{2}X+\hat{4}=\hat{4}X^3$ şi $f\cdot g=\left(\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{1}\right)\cdot$

$\cdot\left(\hat{4}X^3+\hat{2}X+\hat{4}\right)=X^5+\hat{4}X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{4}$.

Valoarea unui polinom într-un punct. Rădăcini ale polinoamelor

Pentru $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\in K[X]$ şi $\alpha\in K$, elementul corpului K definit prin $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0\in K$ se numeşte ***valoarea polinomului*** f ***în*** α.

Dacă $f(\alpha)=0$, ***atunci*** α ***se numeşte rădăcină a polinomului*** f.

Exemple

1. Verificaţi care dintre elementele mulţimii $A=\{1,2,3\}$ este rădăcină a polinomului $f=X^4-3X^3+3X^2-3X+2\in\mathbb{R}[X]$.

Calculând valoarea polinomului f în fiecare element al mulţimii A obţinem $f(1)=f(2)=0$ şi $f(3)=20\neq 0$; prin urmare doar 1 şi 2 sunt rădăcini ale lui f.

2. Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât $x=\hat{4}$ să fie rădăcină a polinomului $f=aX^2+\hat{3}X+a+\hat{2}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

Din enunţ rezultă că $f\left(\hat{4}\right)=\hat{0}$, adică $a+\hat{2}+a+\hat{2}=\hat{0}\Rightarrow\hat{2}a=\hat{1}\Rightarrow a=\hat{3}$.

Teorema împărţirii cu rest a polinoamelor

Pentru orice două polinoame $f,g\in K[X],g\neq 0$, există şi sunt unice două polinoame $q,r\in K[X]$ numite ***cât*** şi respectiv ***rest*** astfel încât $f=g\cdot q+r$ şi $\operatorname{grad}r<\operatorname{grad}g$ (în acest caz polinomul f se numeşte ***deîmpărţit***, iar polinomul g se numeşte ***împărţitor***).

Exemplu

Verificaţi că, împărţind polinomul $f=X^3+2X^2-3X-4\in\mathbb{R}[X]$ la polinomul $g=X^2-X+\hat{2}\in\mathbb{R}[X]$ se obţine câtul $q=X+3$ şi restul $g=-2X-10$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie aplicăm algoritmul împărţirii cu rest a polinoamelor, fie, prin verificare directă, are loc egalitatea $f=g\cdot q+r$ şi în plus $1=\text{grad}\, r<\text{grad}\, g=2$. Deci q este câtul împărţirii, iar r este restul.

Împărţirea prin $X-a$. Schema lui Horner

Restul împărţirii polinomului $f\in K[X]$ la polinomul $X-a$ este $r=f(a)$.

Exemplu

Fără a efectua împărţirea determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul $f=aX^2+bX+1\in\mathbb{R}[X]$ se împarte exact (cu restul 0) la $X-1$ şi prin împărţirea la $X+2$ dă restul -15.

Din ipoteză obţinem sistemul $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-2)=-15 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+b=-1 \\ 4a-2b=-16 \end{cases}\Rightarrow(a,b)=(-3,2)$.

Schema lui Horner este un procedeu mai rapid, comparativ cu împărţirea clasică, de determinare a câtului şi restului împărţirii polinomului $f\in K[X]$ prin polinomul $X-a$.

Exemplu

Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului $f=X^4-2X^2+X-3\in\mathbb{R}[X]$ prin polinomul $X-1$.

	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	0	−2	1	−3
1	1	1	−1	0	−3

Din tabel deducem câtul $q=X^3+X^2-X$ şi restul $r=-3$.

Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bézout

Dacă $f,g\in K[X]$ atunci spunem că g ***divide*** f (notăm $g\,|\,f$) sau echivalent f ***se divide*** cu g (notăm $f\,\vdots\, g$) dacă există $h\in K[X]$ astfel încât $f=gh$ (adică ***restul împărţirii lui f prin g să fie egal cu*** 0).

Exemplu

Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $g\,|\,f$, unde $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-(m-2)X^2+m-3$ şi $g=X^2+X+1$.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

În urma împărţirii obţinem câtul $q=X+(1-m)$ şi restul $r=(m-2)X+(2m-4)$;

cum $g\,|\,f \Rightarrow r=(m-2)X+(2m-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ 2m-4=0 \end{cases} \Rightarrow m=2$.

Teorema lui Bézout

$a\in K$ este rădăcină a polinomului $f\in K[X]$ dacă şi numai dacă $X-a\,|\,f$.

Descompunerea unui polinom în produs de factori ireductibili

Spunem despre un polinom $f\in K[X]$ că este descompus în produs de factori ireductibili dacă el este scris ca un produs al unui număr finit de polinoame din $K[X]$, de grad minim posibil, în sensul că oricare din factorii produsului nu mai pot fi descompuşi în mulţimea $K[X]$.

Observaţie

1. ***În $\mathbb{R}[X]$ singurele polinoame ireductibile sunt: toate cele de gradul I şi cele de gradul II care nu au rădăcini reale (cele pentru care ecuaţia $f(x)=0$ are $\Delta<0$, unde f este funcţia polinomială asociată polinomului).***

2. Un polinom poate fi ireductibil într-o anumită mulţime de polinoame şi ireductibil în altă mulţime de polinoame; de exemplu:

   a. $f=X^2-2$ este reductibil în $\mathbb{R}[X]$, descompunându-se în $f=\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)$, dar este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$ şi $\mathbb{Q}[X]$, câtă vreme rădăcinile sale $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ nu aparţin nici lui $\mathbb{Z}$, nici lui $\mathbb{Q}$;

   b. $f=X^2+\hat{1}$ este reductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$, descompunându-se în $f=\left(X+\hat{1}\right)\left(X+\hat{1}\right)=\left(X+\hat{1}\right)^2$, dar este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$, deoarece $f\left(\hat{0}\right)=\hat{1}\neq\hat{0},\ f\left(\hat{1}\right)=f\left(\hat{2}\right)=\hat{2}\neq\hat{0}$.

3. ***Principiul de bază al obţinerii descompunerii unui polinom este, cel mai des, acela de a căuta eventuali factori de gradul I, „intuind" (sau folosind proprietăţi ale anumitor mulţimi de polinoame) anumite rădăcini, după care, prin împărţirea cu $X-x_1$ (x_1 este o rădăcină găsită) se obţine un alt polinom de grad mai mic cu o unitate şi se continuă procedeul.***

Exemplu

Descompuneţi în produs de factori ireductibili polinomul $f=X^3+\hat{3}X+\hat{4}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin verificare găsim $x=\hat{3}$ rădăcină, pentru că $f\left(\hat{3}\right)=\hat{0}$. Împărţim, cu schema lui Horner pe f la $X-\hat{3}=X+\hat{2}$:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$

Am obţinut câtul $q=X^2+\hat{3}X+\hat{2}$ şi restul $r=\hat{0}$ (evident). Deci $f=\left(X+\hat{2}\right)q$; cum $q\left(\hat{3}\right)=\hat{0}\Rightarrow X-\hat{3}\,|\,q\Rightarrow X+\hat{2}\,|\,q$. În urma împărţirii lui q la $X+\hat{2}$ obţinem câtul $X+\hat{1}$ şi restul, bineînţeles $\hat{0}$; aşadar descompunerea polinomului f va fi $f=\left(X+\hat{1}\right)\left(X+\hat{2}\right)^2$.

Rădăcinile polinoamelor. Relaţiile lui Viète

α este rădăcină a polinomului $f\in K[X]$ dacă şi numai dacă $f(\alpha)=0$.

Relaţiile lui Viète

Dacă polinomul $f=a_4X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{R}[X]$ are rădăcinile reale x_1,x_2,x_3,x_4, atunci între acestea şi coeficienţii polinomului există următoarele egalităţi, numite ***relaţiile lui Viète***:

$$\begin{cases} S_1=x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{a_3}{a_4} \\ S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\dfrac{a_2}{a_4} \\ S_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\dfrac{a_1}{a_4} \\ S_4=x_1x_2x_3x_4=\dfrac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

Fără a fi considerat un abuz aceleaşi formule sunt valabile şi pentru „rădăcinile" unei ecuaţii algebrice de grad cel mult 4.

Exemple

Scrieţi relaţiile lui Viète pentru polinoamele / ecuaţiile:

1. $f=X^2-5X-7\in\mathbb{R}[X]$.

Scanned with OKEN Scanner

2. $x^3-6x^2+11x-6=0$.

1. Avem $S_1=S=x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_2}=5$; $S_2=P=x_1x_2=-\frac{a_0}{a_2}=-7$.

2. Au loc relaţiile: $S_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}=6$; $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_1}{a_3}=11$

şi $S_3=x_1x_2x_3=-\frac{a_0}{a_3}=6$.

Rezolvarea ecuaţiilor algebrice cu coeficienţi în $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$

O ecuaţie de forma $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, ***unde*** $a,b,c,d,e\in A$, ***unde*** A ***poate fi oricare din mulţimile*** $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, ***se numeşte ecuaţie algebrică de grad cel mult*** 4.

Presupunem în cele ce urmează că ecuaţia are toate cele 4 rădăcini reale.

Atunci, în diferite situaţii particulare ale coeficienţilor ecuaţiei, distingem următoarele tipuri de ecuaţii, fiecare având propriul mod de rezolvare:

Condiţii asupra coeficienţilor ecuaţiei	***Denumirea ecuaţiei***	***Mod de abordare a rezolvării***
$a=e\neq 0,\ b=d$	reciprocă de gradul 4	se împarte prin x^2 ; $x+\frac{1}{x}=y$; se obţine o ecuaţie de gradul II în necunoscuta y
$a=0,\ b=e,c=d$	reciprocă de gradul 3	o soluţie este $x_1=-1$; se împarte la $x+1$ şi se obţine o ecuaţie de gradul II
$a=0,$ $b=-e,c=-d$		o soluţie este $x_1=1$; se împarte la $x-1$ şi se obţine o ecuaţie de gradul II
$b=d=0$	bipătrată	$x^2=y$; se obţine o ecuaţie de gradul II în necunoscuta y
$a=\pm 1,\ b,c,d,e\in\mathbb{Z}$	–	dacă $\alpha\in\mathbb{Z}$ e soluţie, atunci $\alpha \mid e$
$a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}$	–	dacă $\alpha=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ e soluţie, atunci $\begin{cases}p\mid e\\ q\mid a\end{cases}$
$a,b,c,d,e\in\mathbb{Q}$	–	dacă $\alpha\in a+b\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$ e soluţie, unde $a,b,d\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$, atunci şi $\overline{\alpha}\in a-b\sqrt{d}$ este, de asemenea, soluţie

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

Fie $m\in\mathbb{R}^*$ şi polinomul $f=X^3-mX^2+(2m-1)X-6\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile reale x_1,x_2,x_3.

a. Calculaţi $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}$.

b. Demonstraţi că $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1<x_1x_2x_3+x_1+x_2+x_3$, pentru orice $m\in\mathbb{R}^*$.

c. Determinaţi $m\in\mathbb{R}^*$ ştiind că suma a două rădăcini este egală cu a treia.

d. Arătaţi că pentru orice $m\in\mathbb{R}^*$ polinomul are o rădăcină întreagă.

e. Determinaţi $m\in\mathbb{R}^*$ şi rădăcinile polinomului f astfel încât $X-3\,|\,f$.

a. Din Viète rezultă: $S_1=x_1+x_2+x_3=m$, $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2m-1$ şi $S_3=x_1x_2x_3=m$. Deci $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{S_1}{S_3}=1$.

b. $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1<x_1x_2x_3+x_1+x_2+x_3\Leftrightarrow S_2<S_3+S_1\Leftrightarrow 2m-1<2m$, adevărat pentru orice $m\in\mathbb{R}^*$.

c. Fie $x_1+x_2=x_3$; înlocuind în S_1 obţinem $x_1+x_2=x_3=\frac{m}{2}$, deci $x_1x_3+x_2x_3=x_3(x_1+x_2)=\frac{m^2}{4}$. Din $S_3=x_1x_2x_3=m$ rezultă că $x_1x_2=2$; înlocuind acum în S_2 vom obţine $\frac{m^2}{4}+2=2m-1\Rightarrow m^2-8m+12=0\Rightarrow m\in\{2,6\}$. Pentru $m=2$ rezultă că $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1x_2=2\end{cases}$, sistem care nu are soluţii reale, iar din $m=6$ obţinem soluţiile 1, 2 şi 3.

d. Avem $f(1)=0,\forall m\in\mathbb{R}^*$, deci $x_1=1$ este rădăcină $\forall m\in\mathbb{R}^*$.

e. Din enunţ rezultă că $f(3)=0\Rightarrow m=6\Rightarrow f=X^3-6X^2+11X-6$; cum $X-3\,|\,f$, prin împărţire cu schema lui Horner găsim $f=(X-3)(X^2-3X+2)$. Prin urmare rădăcinile lui f vor fi 1, 2 şi 3.

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de analiză matematică

Fie I un interval. $F: I \to \mathbb{R}$ se numeşte ***primitivă*** a lui $f: I \to \mathbb{R}$ dacă:

a. F este derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Fie un interval I şi o funcţie $f: I \to \mathbb{R}$ care admite primitive. ***Mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f*** se notează prin $\int f(x)dx$ şi se numeşte ***integrala nedefinită a funcţiei***. Deci $\int f(x)dx = \{F: I \to \mathbb{R} \mid F'(x) = f(x)\}$. Avem

$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$	$\int f'(x)dx = f(x) + C$

Operaţii cu funcţii care admit primitive

Dacă $f, g: I \to \mathbb{R}$ admit primitive şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$, atunci funcţiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ admit primitive şi, în plus, au loc relaţiile:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$	$\int (\alpha \cdot f(x))dx = \alpha \cdot \int f(x)dx$

Orice funcţie continuă pe un interval, admite primitive pe acel interval.

Metode de integrare

1. ***Folosind formule:***

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, \ x \neq \pm a, \ a \neq 0$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C, \ x \neq 0$	$\int \frac{x}{x^2 + a}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2 + a\rvert + C, \ x^2 \neq -a, \ a \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, a \neq 1$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C, \ a \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C, \ \lvert x\rvert > a, \ a \neq 0$
$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C, \ \alpha \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$ $\lvert x\rvert > a, \ a \neq 0$

Scanned with OKEN Scanner

2. ***Formula de integrare prin părţi***

Fie I un interval şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile cu derivatele continue. Atunci funcţiile $f' \cdot g$ şi $f \cdot g'$ admit primitive şi

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx}$$

3. ***Schimbarea de variabilă***

Fie I, J intervale şi $u : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$, astfel încât u este derivabilă, iar f admite primitiva F. Atunci:

$$\boxed{\int f\big(u(x)\big) \cdot u'(x)dx = F\big(u(x)\big) + C}$$

Integrale definite

Fie $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei continue $f : I \to \mathbb{R}$. ***Integrală definită (sau integrală) a funcţiei f de la a la b*** este numărul real:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ (}\textit{formula Leibniz - Newton}\text{).}$$

Proprietăţi:

Numele proprietăţii	*Condiţii*	*Formulă*
liniaritate	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\int_a^b \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)dx,$
aditivitate	$\forall c \in (a,b)$	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
pozitivitate	$f : I \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset I$	$f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
monotonie	$f, g : I \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset I$	$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic şi exemple

Aplicaţii ale integralei definite

Aria unei suprafeţe plane mărginită de graficul unei funcţii

Fie funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci ***aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei*** f ***, axa*** Ox ***şi dreptele de ecuaţii*** $x=a$ ***şi*** $x=b$ este:

$$A=\int_a^b |f(x)|dx$$

Volumul unui corp de rotaţie

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi pozitivă. ***Volumul corpului de rotaţie al funcţiei*** f este:

$$V(C_f)=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)dx$$

Scanned with OKEN Scanner

1.1. Mulțimea numerelor reale

1. Să se determine a 2008 -a zecimală a numărului $0,(285714)$.

2. Să se calculeze $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.

3. Să se calculeze $\sqrt[3]{9} - \frac{3}{\sqrt[3]{3}}$.

4. Să se ordoneze crescător numerele $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, 64 şi $\sqrt[3]{8}$.

5. Să se ordoneze crescător numerele $a = \sqrt{2}$ şi $b = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

6. Să se calculeze valoarea expresiei $E(x) = x^2 - 4x - 1$ pentru $x = 2 + \sqrt{5}$.

7. Să se arate că $E = \sqrt{1+3+5+...+21}$ este număr natural.

8. Să se demonstreze că $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2$ este un număr natural.

9. Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$ este natural.

10. Să se determine valorile naturale ale lui n pentru care expresia $E(n) = \sqrt{10-3n}$ este bine definită.

11. Să se determine numerele reale a şi b pentru care $(a-3)^2 + (b+2)^2 = 0$.

12. Să se calculeze $a^2 + b^2$, ştiind că numerele a şi b au suma egală cu 4 şi produsul egal cu 3.

13. Să se calculeze $0! + 1! + 2! + 3!$.

14. Să se calculeze $\log_3 27 - \log_2 8$.

15. Să se calculeze $\log_6 24 - \log_6 4$.

16. Să se calculeze $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4$.

17. Să se calculeze $2\log_3 4 - 4\log_3 2$.

18. Să se calculeze $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6$.

19. Să se calculeze $\log_5 10 + \log_5 3 - \log_5 6$.

20. Să se calculeze $\log_5 25 - \log_3 9$.

21. Să se calculeze $\log_2 3 - \log_2 \frac{3}{2}$.

22. Să se calculeze $\log_2 3 - \frac{1}{2}\log_2 9$.

23. Să se calculeze $\log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 10$.

24. Să se calculeze $\log_6 3 + \log_6 10 - \log_6 5$.

Scanned with OKEN Scanner

25. Să se calculeze $\log_2 4+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{8}$.

26. Să se calculeze $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\log_5 25$.

27. Să se arate că $\log_2 \frac{1}{4}-\sqrt[3]{-8}=0$.

28. Să se arate că $\log_2 14+\log_2 3-\log_2 6=\log_2 7$.

29. Să se arate că $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=1$

30. Să se verifice că $\frac{\log_5 18-\log_5 2}{\log_5 3}=2$.

31. Să se calculeze $\log_3 \frac{2}{1}+\log_3 \frac{3}{2}+\log_3 \frac{4}{3}+\ldots+\log_3 \frac{9}{8}$.

32. Să se compare numerele 2^2 şi $\log_2 32$.

33. Să se arate că numărul $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_2 8}$ este natural

34. Să se arate că $\log_2 4+\log_3 9<\sqrt{36}$.

35. Să se arate că $\log_3 24=1+3a$, unde $a=\log_3 2$.

36. Se consideră numărul $a=\log_2 3$. Să se arate că $\log_2 18=2a+1$.

37. Să se verifice egalitatea $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\ldots+\lg\frac{9}{10}=-1$.

38. Să se calculeze $\lg\left(tg\,40^\circ\right)\cdot\lg\left(tg\,41^\circ\right)\cdot\ldots\cdot\lg\left(tg\,45^\circ\right)$.

39. Să se calculeze $\log_2\left(tg\,45^\circ\right)+\log_2\left(ctg\,45^\circ\right)$.

40. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

41. Să se arate că $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

42. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

43. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}.$$

44. Să se arate că n^3+5n se divide cu 6, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.2. Mulțimea numerelor complexe

45. Să se calculeze $3(2i+1)-i(4-5i)$.

46. Să se calculeze $(1+2i)^2-3(1-i)$.

47. Arătați că dacă $z=\frac{i}{2+3i}+\frac{i-1}{2-3i}$, atunci $13z=i-2$.

48. Calculați partea reală a numărului $z=\frac{3-5i}{1+2i}$.

49. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{2i+1}{3i-2}$.

50. Fie $z=2+3i$. Calculați $z^2+3\bar{z}$.

51. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2-3x+3=0$.

52. Să se verifice că numărul $2-i$ este rădăcină a ecuației $z^2-4z+5=0$.

53. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2=-16$.

54. Să se calculeze modulul numărului complex $z=(1+i)^6$.

55. Să se calculeze $|3+4i|-|3-4i|$.

56. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^4-2x^2-8=0$.

57. Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $x(1-i)+y(2+3i)=8+7i$.

58. Fie $z_1=7-5i$ și $z_2=4+3i$. Calculați $z_1+z_2+\bar{z_1}+\bar{z_2}$.

59. Calculați $\frac{1}{1+5i}+\frac{1}{1-5i}$.

60. Să se calculeze $1+i+i^2+\cdots+i^{19}+i^{20}$.

61. Să se verifice egalitatea $\left(1+i\sqrt{5}\right)^2+\left(1-i\sqrt{5}\right)^2=-8$.

62. Să se calculeze $(1+i)^3+(1-i)^3$.

63. Să se determine coeficientul părții imaginare a numărului complex $z=\frac{1+3i}{1-i}$.

64. Să se calculeze $\frac{2i}{1-i}+\frac{1}{1+i}$.

65. Să se calculeze modulul numărului complex $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5$.

1.3. Ecuații, inecuații. Sisteme de ecuații

66. Să se calculeze $x_1+x_2+x_1x_2$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-2x-2=0$.

Scanned with OKEN Scanner

67. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-x-2=0$.

68. Să se demonstreze că, dacă x_1 este soluție a ecuației $x^2-2008x+1=0$, atunci $x_1+\frac{1}{x_1}=2008$.

69. Se consideră ecuația $x^2+3x-5=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.

70. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-x-1=0$ verifică relația $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2$

71. Știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-2008x+1=0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

72. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, știind că aceasta are soluțiile $x_1=2$ și $x_2=3$.

73. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică simultan relațiile $x_1+x_2=1$ și $x_1x_2=-2$.

74. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică simultan relațiile $x_1+x_2=2$ și $x_1x_2=-3$.

75. Ecuația $x^2+px-p=0$, cu $p\in\mathbb{R}$, are soluțiile x_1 și x_2. Să se verifice dacă expresia $x_1+x_2-x_1x_2$ este constantă.

76. Se consideră ecuația $x^2+mx+2=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$.

77. Să se determine valoarea parametrului real m, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-(m-1)x-m=0$ verifică relația $x_1+x_2=2(x_1x_2+4)$.

78. Să se determine valorile reale ale numărului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-mx+m+2=0$ verifică egalitatea $2x_1x_2=x_1+x_2$.

79. Se consideră ecuația $x^2-x+m=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Să se determine numărul real m pentru care $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=-\frac{3}{4}$.

80. Să se determine valorile reale ale numărului m pentru care $x=5$ este o soluție a ecuației $m^2(x-1)=x-3m+2$.

81. Să se determine valorile reale ale lui m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2+(m^2+3)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1+x_2+x_1x_2=7$.

82. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-(2m-3)x+m-1=0$ verifică egalitatea $x_1+x_2-2x_1x_2=-1, \forall m\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

83. Să se determine valorile reale ale parametrului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2+(m-1)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1=3x_2$.

84. Să se determine valorile reale ale lui m, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-mx-m-6=0$ verifică relația $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$.

85. Să se determine m real astfel încât soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2+2x+6m-1=0$ să verifice relația $x_1+x_2=x_1x_2$.

86. Să se arate că produsul soluțiilor ecuației $mx^2-2008x-m=0$ este constant, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}^*$.

87. Să se determine valorile reale ale parametrului m astfel încât ecuația $x^2+mx+9=0$ să admită două soluții egale.

88. Se consideră ecuația de gradul al doilea $x^2-x+m=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația să admită soluții de semne contrare.

89. Să se demonstreze că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ ecuația $x^2+mx-m^2-1=0$ are două soluții reale.

90. Să se determine numărul real m astfel încât soluțiile ecuației $x^2-mx-1=0$ să fie numere reale opuse.

91. Să se determine parametrul real m astfel încât soluțiile ecuației $x^2-3x+m=0$ să fie inverse una alteia.

92. Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât soluțiile ecuației $x^2-3x+m=0$ să aibă semne opuse.

93. Să se arate că mulțimea $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-(2m+1)x+m^2+m=0\right\}$ are două elemente, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

94. Să se demonstreze că ecuația $x^2-2x+1+a^2=0$ nu admite soluții reale, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}^*$.

95. Să se demonstreze că, dacă $a\in\mathbb{R}^*$, atunci ecuația $ax^2-(2a+1)x+a+1=0$ are două soluții reale distincte.

96. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-(m+2)x+m+1=0\right\}=\{1\}$.

97. Să se determine mulțimea $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1, x,y\in\mathbb{Z}\}$.

98. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,2x+1\geq 3x-1\right\}$.

99. Să se demonstreze că pentru orice a real, ecuația de gradul al doilea $(1+\cos a)x^2-(2\sin a)x+1-\cos a=0$ admite soluții reale egale.

100. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2-(m-3)x+m-3>0$, pentru orice x real

101. Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $-4\leq 3x+2\leq 4$.

102. Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care $-4<3x+2<4$.

103. Să se determine numărul întreg x care verifică inegalitățile $3\leq\frac{2x-1}{2}\leq 4$.

Scanned with OKEN Scanner

104. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $x^2-9\le 0$.

105. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $x^2-5x+6\le 0$.

106. Să se calculeze suma soluţiilor întregi ale inecuaţiei $x^2-5x+5\le 1$.

107. Să se rezolve inecuaţia $(2x-1)^2\le 9$.

108. Să se arate că $(x-1)(x-2)>x-3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

109. Să se rezolve inecuaţia $(x-2)(x+1)\le 3(x+1)$.

110. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $x(x-1)\le x+15$.

111. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(2x-1)(x+1)\le -x+11$.

112. Să se determine soluţiile întregi ale inecuaţiei $(x-1)^2+x-7<0$.

113. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $(x^2-1)\cdot(x+1)\ge 0$.

114. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}\ge 1$.

115. Să se determine soluţiile reale ale sistemului $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$.

116. Să se formeze o ecuaţie de gradul al doilea, ale cărei soluţii verifică relaţiile $\begin{cases} x+y=11 \\ xy=30 \end{cases}$.

117. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8 \end{cases}$.

118. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

119. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x+2y=16 \\ xy=12 \end{cases}$.

120. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x=y \end{cases}$.

121. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x^2-3x+5 \end{cases}$.

122. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2+2x-7=y \end{cases}$.

123. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2-2x+y=0 \end{cases}$

124. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x-1$. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2f(x)+3g(x)=-5$.

Scanned with OKEN Scanner

125. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 3x + 1$ şi $g(x) = x - 1$. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $f(x) = -g(x)$.

126. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - 4x$. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $f(x) - 1 \geq 4x$.

127. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$. Să se rezolve inecuaţia $f(x) \leq 12$.

128. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se demonstreze că $f(x) \geq -1$, oricare ar fi numărul real x.

129. Să se determine elementele mulţimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |2x - 1| \leq 1\}$.

130. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x-5} = 2$.

131. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2+x} = x$.

132. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{7-x} = x - 1$.

133. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+1} = 5 - x$.

134. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{2x+3} = x$.

135. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+2} = 3$.

136. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1} - 2 = 0$.

137. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1} = x - 1$.

138. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x+3} = x + 2$.

139. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2-3} = 1$.

140. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{5-x^2} = 2$.

141. Să se determine numerele reale x pentru care este verificată egalitatea $\sqrt{x^2+1} = 2$.

142. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x^2-x-2} = 2$.

143. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2-x-2} = x - 2$.

144. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{4x^2+6x+3} = x + 2$.

145. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2+2x-3} = 2\sqrt{3}$.

146. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x+4} = 2\sqrt{x}$.

147. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2} = 0$.

148. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-x-2}$.

149. Să se rezolve în mulţimea nunerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{1-x} = -2$.

150. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+x+1} = x$.

151. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $125^x = \frac{1}{5}$.

152. Să se rezolve ecuaţia $\frac{1}{2^x} = 4$.

Scanned with OKEN Scanner

153. Să se rezolve ecuaţia $\frac{1}{3^x}=9$.

154. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^{x^2}=16$.

155. Să se rezolve ecuaţia $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$.

156. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.

157. Să se rezolve ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{x-2}$.

158. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x-1}=\frac{1}{4}$.

159. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2^x}=\frac{4^x}{8}$.

160. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{2^x}{3^x}=\frac{3}{2}$.

161. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\cdot 5^x=15$.

162. Să se rezolve ecuaţia $2^{x^2-x}=4$.

163. Să se rezolve ecuaţia $3^{1-x}=9$.

164. Să se rezolve ecuaţia $3^{x^2+x}=9$.

165. Să se rezolve ecuaţia $3^{2x-1}=3^{5-x}$.

166. Să se rezolve ecuaţia $3^{2x-5}=3^{x^2-8}$.

167. Să se rezolve ecuaţia $2^{\sqrt{x-1}}=4$.

168. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $4^{x+2}=2^{x^2+5}$.

169. Să se rezolve ecuaţia $5^{x^2-x}=5^{5x-5}$.

170. Să se rezolve ecuaţia $2^{2x^2+3x-2}=8$.

171. Să se rezolve ecuaţia $2^{x^2+x+1}=8$.

172. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x+2^{x+3}=36$.

173. Să se rezolve ecuaţia $3^x+2\cdot 3^{x+1}=7$.

174. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^{x-1}+2^x=12$.

175. Să se rezolve ecuaţia $3^{2x}+2\cdot 3^x-3=0$.

176. Să se rezolve ecuaţia $9^x-4\cdot 3^x+3=0$.

177. Să se rezolve ecuaţia $4^x-6\cdot 2^x+8=0$.

178. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.

179. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+3}-2^x=28$.

180. Să se rezolve ecuaţia $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

181. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$.

182. Să se rezolve ecuaţia $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$.

183. Să se rezolve ecuaţia $2^x \cdot 3^x = 36$.

184. Să se rezolve ecuaţia $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

185. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+5) = 3$.

186. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x-3) = 0$.

187. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_7(2x+1) = 2$.

188. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(2x+1) = 1$.

189. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(2x+3) = 2$.

190. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(10-x) = 2$.

191. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(3x+4) = 2$.

192. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 \sqrt[3]{x} = 1$.

193. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$.

194. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x+2) - \log_2(x+1) = 1$.

195. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(x+2) - \log_5(2x-5) = 1$.

196. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(3x+1) = 1 + \log_5(x-1)$.

197. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$.

198. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia $\log_2 x^2 = 2$.

199. Să se rezolve ecuaţia $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$.

200. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 \sqrt{x+1} = 1$.

201. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(x^2-1) = 1$.

202. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(9-x^2) = 1$.

203. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(x^2+2x-3) = 1$.

204. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3\left(x^2-6\right) = \log_3(2x-3)$.

205. Să se rezolve ecuaţia $\log_2\left(x^2+3x-10\right) = 3$.

206. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x^2-x-2) = 2$.

207. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3(x^2-4x+4) = 2$.

208. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(2x+5) = \log_2(x^2+3x+3)$.

209. Să se rezolve ecuaţia $\log_2\left(x^2-x-2\right) - \log_2(2x-4) = 1$.

210. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(2x^2-x-1) = \log_3(2x+1)$.

Scanned with OKEN Scanner

211. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x^2-4)=\log_2(x^2-3x+2)$.

212. Să se rezolve ecuaţia $\lg^2 x-4\lg x+3=0$.

213. Să se rezolve ecuaţia $2^{\log_2 x}=4$.

214. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(2^{x+1}-1)=0$.

1.4. Funcţii

215. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)$.

216. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$. Să se calculeze $f(-6)+f(0)+f(6)+f(12)$,.

217. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+3$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+\ldots+f(5)$.

218. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\ldots+f(6)$.

219. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\ldots+f(6)$.

220. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3-2x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(6)$.

221. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2+x$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\ldots+f(20)$.

222. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

223. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$

224. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+5$. Să se calculeze $f(2)+f(2^2)+\ldots+f(2^5)$.

225. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Să se calculeze $f(3)+f(3^2)+\ldots+f(3^5)$.

226. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$. Să se calculeze $f(2)+f(2^2)+\ldots+f(2^7)$.

227. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$. Să se determine $f(-4)\cdot f(-3)\cdot\ldots\cdot f(3)\cdot f(4)$.

Scanned with OKEN Scanner

228. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(6)$

229. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5-x$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)$.

230. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(7)$.

231. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

232. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, cu a şi b numere reale pentru care $f(1)+f(2)+f(3)=6a+2b$ şi $f(4)=8$.

233. Să se determine cea mai mică valoare a funcţiei $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+1$.

234. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2008x-2007$. Să se verifice dacă punctul $A\left(\frac{2009}{2008},2\right)$ aparţine graficului funcţiei f.

235. Să se determine punctul de intersecţie dintre graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$ şi axa Oy.

236. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $g(x)=bx+a$, unde a şi b sunt numere reale. Să se arate că dacă $f(-1)=g(-1)$, atunci $f=g$.

237. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5-x$. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.

238. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$. Să se determine punctul care aparţine graficului funcţiei f şi are abscisa egală cu ordonata.

239. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$. Să se determine numerele reale a şi b ştiind că $3f(x)+2=3x+5$, pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

240. Se consideră funcţiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x+1$, $g(x)=2x+2$, $h(x)=3x+3$. Să se verifice relaţia $f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h$.

241. Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$.

242. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$. Să se determine valorile lui x pentru care $f(x)+f(1)\le 1$.

243. Fie funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=-4x+3$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

244. Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f:\{-1,0,1,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+1$

245. Să se calculeze aria triunghiului determinat de graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ şi axele de coordonate

Scanned with OKEN Scanner

246. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-4x+1$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve ecuaţia $f(x)+2g(x)=-1$.

247. Să se determine funcţia de gradul al II-lea al cărei grafic conţine punctele $A(1;3)$, $B(0;5)$ şi $C(-1;11)$.

248. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-25$. Să se calculeze $f(-5)\cdot f(-4)\cdot\ldots\cdot f(0)\cdot\ldots\cdot f(4)\cdot f(5)$.

249. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-11x+30$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(6)$.

250. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze produsul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$.

251. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2008)$.

252. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze $f(f(0))-f(2)$.

253. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $f^2(x)+2f(x)-3=0$.

254. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x+6$. Să se arate că $f(x)\le f(2)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

255. Să se determine punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ cu axele de coordonate.

256. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-5$.

257. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+2$. Să se arate că vârful parabolei asociate funcţiei are coordonatele egale.

258. Să se arate că vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$ se află pe dreapta de ecuaţie $3x+y+1=0$.

259. Să se demonstreze că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+4$ este tangentă axei Ox.

260. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x+1$ şi $g(x)=x+4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecţie ale graficelor funcţiilor f şi g.

261. Să se calculeze distanţa dintre punctele de intersecţie ale reprezentării grafice a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+2x+8$, cu axa Ox.

Scanned with OKEN Scanner

262. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-8x+7$. Să se calculeze distanţa dintre punctele determinate de intersecţia graficului funcţiei f cu axa Ox.

263. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-6x+5$: Să se determine punctul de intersecţie al dreptei de ecuaţie $y=-4$ cu reprezentarea grafică a funcţiei f.

264. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

265. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. Să se determine numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparţine graficului funcţiei f.

266. Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-x+1$ să conţină punctul $A(2,3)$.

267. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+4$. Să se determine valorile numărului real m pentru care punctul $A(m;4)$ aparţine graficului funcţiei f.

268. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(m+1)x+m$, cu $m\in\mathbb{R}$. Să se arate că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $f(x)=0$ verifică relaţia $x_1+x_2-x_1x_2=1$.

269. Să se determine valorile reale ale numărului m astfel încât reprezentarea grafică a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-(m-1)x-m$ să fie tangentă la axa Ox.

270. Să se determine valorile reale nenule ale lui m pentru care graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-(m+1)x+1$ este tangent axei Ox.

271. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, ştiind că reprezentarea grafică a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m-1$ este tangentă axei Ox.

272. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+5x+m+6$. Să se determine valorile numărului real m ştiind că $f(x)\geq 0$, pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

273. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-1)x+m+1$. Să se arate că $f(1)\geq -\frac{1}{4}$, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

274. Să se arate că, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$, parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox.

275. Să se demonstreze că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

276. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f(x)=mx^2-8x-3$, unde m este un număr real nenul. Să se determine m ştiind că valoarea maximă a funcţiei f este egală cu 5.

277. Să se determine numerele reale m ştiind că valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-m+3$ este egală cu 10.

Scanned with OKEN Scanner

278. Să se determine valorile reale ale numărului m știind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2mx+3m$ este egală cu 2.

279. Să se determine valorile reale ale lui m, știind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m-1$ este egală cu $-\frac{1}{4}$.

280. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx+2$. Să se determine numerele reale m pentru care minimul funcției f este egal cu $-\frac{1}{4}$.

281. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-mx+2$, $m\in\mathbb{R}^*$. Să se determine numărul real nenul m știind că valoarea minimă a funcției este egală cu 1.

282. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-ax+a$, unde $a\in\mathbb{R}$. Să se determine a astfel încât minimul funcției f să fie 1.

283. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+2$. Să se determine numărul real m astfel încât minimul funcției să fie egal cu -2.

284. Să se determine $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, știind că abscisa punctului de minim al graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x^2-(m+2)x+1$ este egală cu 2.

285. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^{-x}$. Să se calculeze $f(-1)+f(0)+5f(1)$.

286. Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^{x+1}-1$ cu axele de coordonate

287. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{x+3}-2$.

288. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+...+f(7)$.

289. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+....+f(4)$.

290. Să se determine domeniul maxim de definiție D al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg(2x-3)$.

291. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2 x$. Să se calculeze $f(1)+f(4)-f(2)$.

292. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+\log_3 x$. Să se calculeze $f(1)$.

293. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+\log_3 x$. Să se calculeze $f(1)+f(3)$.

Scanned with OKEN Scanner

1.5. Elemente de trigonometrie. Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Elemente de geometrie plană

294. Să se determine $\sin^2 100^\circ + \cos^2 80^\circ$.

295. Să se calculeze $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$.

296. Să se calculeze $\sin^2 150^\circ + \cos^2 30^\circ$.

297. Să se calculeze $\sin^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ$.

298. Să se calculeze $\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ$.

299. Să se verifice că $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$.

300. Să se calculeze $\sin^2 135^\circ + \cos^2 45^\circ$.

301. Să se calculeze $\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ$

302. Să se calculeze $\sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ$.

303. Să se calculeze $\text{tg}^2 30^\circ + \text{ctg}^2 45^\circ$.

304. Să se calculeze $\sin 120^\circ$.

305. Să se calculeze $\sin 135^\circ$.

306. Să se calculeze $2\sin^2 135^\circ$.

307. Să se calculeze $\sin 170^\circ - \cos 10^\circ$.

308. Să se calculeze $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$.

309. Să se calculeze $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ$.

310. Să se arate că $\sin 10^\circ - \cos 80^\circ = 0$

311. Să se calculeze $\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + \sin 60^\circ$.

312. Știind că $\sin 80^\circ - \cos 80^\circ = a$, să se calculeze $\sin 100^\circ + \cos 100^\circ - a$

313. Să se calculeze numărul $\sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$.

314. Să se calculeze $\sin 135^\circ + \text{tg} 45^\circ - \cos 45^\circ$.

315. Să se calculeze $\dfrac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ}$.

316. Să se calculeze $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ$.

317. Să se calculeze $\sin(-10^\circ) \cdot \sin(-9^\circ) \cdot \ldots \cdot \sin 9^\circ \cdot \sin 10^\circ$.

318. Să se calculeze $\cos 0^\circ + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \ldots + \cos 180^\circ$.

319. Să se calculeze produsul $(\cos 1^\circ - \cos 9^\circ) \cdot (\cos 2^\circ - \cos 8^\circ) \cdot \ldots \cdot (\cos 9^\circ - \cos 1^\circ)$.

320. Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = \dfrac{3}{5}$ și $x \in (0^\circ, 90^\circ)$.

321. Să se determine $\cos(180^\circ - x)$, știind că $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ și $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

322. Să se calculeze $\sin(180^\circ - x)$ știind că $\sin x = \dfrac{4}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

323. Să se calculeze $\cos(180^\circ - x)$, știind că $\cos x = \frac{1}{3}$.

324. Să se arate că pentru $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ este adevărată egalitatea $\sin x \cdot \cos(90^\circ - x) + \cos^2(180^\circ - x) = 1$.

325. Să se demonstreze că expresia $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cdot \cos x$ este constantă.

326. Să se calculeze $\sin A$, știind că în triunghiul ABC se cunosc $AB = 4, BC = 2$ și $m(\hat{C}) = 60^\circ$.

327. Să se calculeze $\sin A$ în triunghiul ABC, știind că $BC = 10$, iar lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 10.

328. Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC știind că $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ și că $AB = 10$.

329. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $\sin A = \frac{1}{2}$ și că lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 4.

330. Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC știind că $BC = \sqrt{2}$, $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$ și $m(\sphericalangle ABC) = 45^\circ$.

331. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC = 20$ și $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.

332. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC = 4$ și că măsura unghiului A este de 30°.

333. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB = 3$ și $m(\measuredangle C) = 30^\circ$.

334. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este $\frac{3}{2}$, iar $BC = 3$. Să se calculeze $\sin A$.

335. Să se determine măsura unghiului A din triunghiul ascuțitunghic ABC, știind că $BC = 6$ și raza cercului circumscris triunghiului este egală cu $2\sqrt{3}$.

336. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC știind că $BC = 8$ și $m(\measuredangle A) = 45^\circ$.

337. În triunghiul ABC se cunosc $AB = AC = 6$ și $BC = 6\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

338. Să se calculeze $\cos A$ în triunghiul ABC, știind că $AB = 2, BC = 3$ și $AC = 4$.

339. Să se calculeze $\cos B$, știind că lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $AB = 6$, $AC = 8$ și $BC = 10$.

340. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5, AC = 6$ și $BC = 7$. Să se calculeze $\cos A$.

341. Să se calculeze cosinusul unghiului A, în triunghiul ABC, știind că $AB = 3$, $AC = 5$ și $BC = 6$.

Scanned with OKEN Scanner

342. Triunghiului ABC are $AB = BC = 3$ şi $AC = 3\sqrt{2}$. Să se determine $\cos A$.

343. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4, AC = \sqrt{7}$ şi $BC = \sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

344. Să se determine lungimea segmentului BC în triunghiul ABC, ştiind că $AC = 6, AB = 4$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

345. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC ştiind că $AB = 6, AC = 10$ şi $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

346. În triunghiul MNP se cunosc $MN = 3, MP = 5$ şi $m(\sphericalangle M) = 60^\circ$. Să se calculeze lungimea laturii NP.

347. Să se calculeze cosinusul unghiului ascuţit format de diagonalele dreptunghiului $ABCD$ ştiind că $AB = 16$ şi $BC = 12$.

348. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB = 2, BC = 4$ şi $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$.

349. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $AB = 5, AC = 4$ şi $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

350. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB = \sqrt{3}, AC = 3$ şi $m(\hat{A}) = 120^\circ$.

351. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AC = 10$, $BC = 16$ şi $m(\sphericalangle C) = 60^\circ$.

352. Să se calculeze aria triunghiului MNP ştiind că $MN = 10$, $NP = 4$ şi $m(\sphericalangle MNP) = 60^\circ$.

353. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 8, AC = 4$ şi $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului.

354. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 8$, $AC = 8$ şi $m(A) = 30^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

355. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB = AC = 10$ şi $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.

356. Să se calculeze aria triunghiului MNP dacă $MN = NP = 6$ şi $m(\sphericalangle MNP) = 120^\circ$.

357. Să se calculeze lungimea laturii AB a triunghiului ABC ştiind că $BC = 6$, $AC = 3\sqrt{2}$ şi $m(\sphericalangle C) = 45^\circ$.

358. Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC ştiind că $AB = 10, BC = 15$ şi $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$.

359. Se consideră triunghiul ABC având aria egală cu 15. Să se calculeze $\sin A$ ştiind că $AB = 6$ şi $AC = 10$.

360. Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 6, cu $AB = 3$ şi $BC = 8$. Să se calculeze $\sin B$.

361. Să se determine aria unui triunghi ABC, ştiind că $AB = AC = 2$ şi $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.

362. Să se calculeze aria triunghiul MNP dacă $MN = 6, NP = 4$ şi $m(\sphericalangle MNP) = 30^\circ$.

Scanned with OKEN Scanner

363. Să se determine aria triunghiului ABC, în care $AB=4, AC=6$ şi $m(\sphericalangle BAC)=45^\circ$.

364. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AC=2, m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$ şi $AB=4$.

365. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=AC=\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=30^\circ$.

366. În triunghiul MNP se cunosc $MN=4, NP=6$ şi $m(\sphericalangle MNP)=45^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului MNP.

367. Să se determine aria unui triunghi ABC în care $AB=5$, $AC=6$ şi $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

368. Să se calculeze aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=AC=4$ şi $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

369. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=2\sqrt{3}, AC=\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

370. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de măsură 60° şi ipotenuza de lungime 8.

371. Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 7. Să se calculeze lungimea laturii AB ştiind că $AC=2$ şi că $m(\sphericalangle A)=30^\circ$.

372. Să se calculeze lungimea înălţimii din A în triunghiul ABC ştiind că $AB=3, AC=4$ şi $BC=5$.

373. Să se demonstreze că în orice triunghi dreptunghic ABC de arie S şi ipotenuză de lungime a este adevărată identitatea $a^2 \sin B \sin C = 2S$.

374. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=1, AC=2$ şi $BC=\sqrt{5}$. Să se calculeze $\cos B$.

375. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC ştiind că $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle B)=30^\circ$ şi $AB=4\sqrt{3}$.

376. Să se determine lungimile catetelor AB şi AC ale triunghiului dreptunghic ABC ştiind că $\sin B=\frac{3}{5}$ şi $BC=15$.

377. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ şi $\cos B=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin C$.

378. Ştiind că triunghiul ABC are $BC=10$, $AC=5$ şi $AB=5\sqrt{3}$, să se calculeze $\cos A$.

379. Să se verifice că într-un triunghi dreptunghic ABC $\left(m(\sphericalangle A)=90^\circ\right)$ are loc relaţia $\sin^2 B+\sin^2 C=1$.

380. Să se arate că într-un triunghi ABC dreptunghic în A are loc relaţia $\cos^2 B+\cos^2 C=1$.

Scanned with OKEN Scanner

381. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$, ştiind că $AB=8, BC=10$ şi $m(\sphericalangle BCD)=150^\circ$.

382. Să se calculeze aria dreptunghiului $ABCD$ ştiind că $AC=10$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$.

383. Triunghiul ABC este dreptunghic în C, iar raza cercului circumscris triunghiului este $R=10$. Să se calculeze lungimea laturii AB.

384. Să se demonstreze că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci are loc relaţia $\sin B+\cos B=\dfrac{AB+AC}{BC}$.

385. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, are loc relaţia $AD^2=AB\cdot AC\cdot\sin B\sin C$, unde D este piciorul înălţimii din A.

386. Să se determine $\sin(\sphericalangle ABC)$ în hexagonul regulat $ABCDEF$.

387. Fie triunghiul dreptunghic ABC şi D, mijlocul ipotenuzei BC. Să se calculeze lungimea laturii AB ştiind că $AC=6$ şi $AD=5$.

388. Să se determine lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic ştiind că suma acestora este 23 şi produsul lor este 120

389. Să se determine numărul real x pentru care $x, x+7$ şi $x+8$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

390. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=6, AC=8$ şi $BC=10$.

391. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are lungimea înalţimii egală cu $3\sqrt{3}$.

392. Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral care are aria egală cu $\sqrt{3}$.

393. Să se calculeze lungimile catetelor triunghiului ABC, ştiind că $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle B)=60^\circ$ şi că lungimea ipotenuzei este egală cu 8.

394. Să se calculeze lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic ştiind că aria acestuia este 18, iar măsura unui unghi este egală cu 45°.

395. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de lungime 6. Să se determine lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei.

396. Arătaţi că $tg\,3x-tg\,2x-tg\,x=tg\,x\cdot tg\,2x\cdot tg\,3x$.

397. Să se determine soluţiile ecuaţiei $\sin 2x=5\cos x$ situate în intervalul $[-5,5]$.

398. Să se calculeze $\sin 150^\circ-\cos 120^\circ$.

399. Să se calculeze $\sin 315^\circ$.

400. Fie $a\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $b\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin a=-\dfrac{12}{13}$ şi $\cos b=\dfrac{4}{5}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

401. Să se calculeze $\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}-\sin\dfrac{3\pi}{15}\sin\dfrac{2\pi}{15}$.

Scanned with OKEN Scanner

402. Să se calculeze $\sin\frac{7\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}$.

403. Fie $a\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, $b\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ pentru care $\cos a=\frac{12}{13}$ şi $\sin b=\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin(a+b)$.

404. Să se arate că $\sin\frac{\pi}{36}\cdot\cos\frac{7\pi}{36}\cdot\sin\frac{13\pi}{36}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}$.

405. Să se rezolve ecuaţia $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

406. Să se rezolve ecuaţia $tg\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

407. Să se arate că $arctg\,x+arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, pentru orice $x>0$.

408. Să se rezolve în $[0,2\pi)$ ecuaţia $\sin x=-\frac{1}{2}$.

1.6. Progresii

409. Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice ştiind că primul termen al progresiei este 7 şi al doilea termen este 9.

410. Să se determine al zecelea termen al şirului aflat in progresie aritmetica $1,7,13,19,\ldots.$

411. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3=5$ şi $a_6=11$. Să se calculeze a_9.

412. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=6$ şi $a_2=5$. Să se calculeze a_7.

413. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2=5$ şi $r=3$. Să se calculeze a_8.

414. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=1$ şi $a_5=13$. Să se calculeze a_{2008}.

415. Să se demonstreze că şirul cu termenul general $a_n=2n+3$, verifică relaţia $a_{n+1}-a_n=2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

416. Să se determine numărul real x, ştiind că şirul $1,2x+1,9,13,\ldots$ este progresie aritmetică.

417. Să se determine raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_{10}-a_2=16$.

418. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice de raţie 4 dacă suma primilor doi termeni este 10.

Scanned with OKEN Scanner

419. Să se determine termenul al patrulea al unei progresii aritmetice știind că primul termen este 2 și rația este 3.

420. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=2$ și $a_2=4$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

421. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=3$.

422. Să se determine suma primilor 6 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=2$ și $a_2=5$.

423. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=7$ și $a_7=37$. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai progresiei.

424. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=3$ și $a_3=7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

425. Să se calculeze suma $2+5+8+\cdots+26$.

426. Să se calculeze suma $1+5+9+13+\cdots+25$.

427. Să se calculeze suma $1+3+5+\cdots+21$.

428. Să se calculeze suma $2+12+22+\cdots+92$.

429. Să se calculeze suma $S=1+5+9+\cdots+2009$.

430. Să se calculeze suma $1+11+21+31+\cdots+111$.

431. Să se determine numerele reale x știind că $x-3,4,x+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

432. Să se determine numărul real x știind că numerele $x-1$, $2x-2$ și $x+3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

433. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, știind că numerele $x-1$, $x+1$ și $2x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

434. Să se determine numărul real x știind că numerele $x+1$, $2x-3$ și $x-3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

435. Să se determine rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $b_1=3$ și $b_2-b_1=3$.

436. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice în care primul termen este egal cu 16, iar rația este $\frac{1}{2}$.

437. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1=1$ și $b_2=3$. Să se calculeze b_4

438. Să se determine al nouălea termen al unei progresii geometrice, știind că rația este egală cu $\frac{1}{3}$ și primul termen este 243.

439. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1=2$ și $b_2=6$. Să se calculeze b_5.

Scanned with OKEN Scanner

440. Să se determine primul termen al unei progresii geometrice, știind că raportul dintre primul termen și al patrulea este $\frac{1}{8}$ și că $b_2 = 3$.

441. Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 4.

442. Să se calculeze produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, care are primul termen $\sqrt{2}$ și rația egală cu $-\sqrt{2}$.

443. Să se determine produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că primul termen este egal cu 1 și rația este $q = -2$.

444. Să se determine numărul real x știind că numerele $x-1$, $x+1$ și $2x+5$ sunt termeni consecutive ai unei progresii geometrice.

445. Să se determine numărul real pozitiv x, știind că șirul $1, x, x+2, 8, \ldots$ este progresie geometrică.

446. Să se determine valorile reale ale numărului x știind că numerele $5-x$; $x+7$ și $3x+11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice

447. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -2x+3$. Să se arate că numerele $f(1), f(0)$ și $f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

448. Să se calculeze suma $1+2+2^2+\cdots+2^6$.

449. Să se calculeze suma $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^7$.

450. Să se calculeze suma $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}$.

451. Să se determine numărul real x, știind că 2^x-1, 4^x și $2^{x+1}+3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

452. Să se determine numărul real a, știind că numerele 2^a, 4^a+1 și 2^{a+2} sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

453. Să se demonstreze că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ numerele 3^x-1, 3^{x+1} și $5\cdot 3^x+1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.

454. Să se arate că numerele $\log_2 2$, C_3^1 și 5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice

455. Să se arate că numerele 1, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi într-o progresie geometrică.

456. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului x, știind că $\lg\sqrt{x}, \frac{3}{2}$ și $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

457. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$. Să se demonstreze că numerele $f(1), f(2)$ și $f(4)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Scanned with OKEN Scanner

1.7. Mulţimi de numere. Probleme de numărare. Probabilităţi

458. Ştiind că dintre cei 28 de elevi ai unei clase, 18 preferă voleiul, iar 15 au ca pasiune baschetul, să se determine câţi elevi îndrăgesc ambele sporturi (fiecare elev îndrăgeşte cel puţin un sport).

459. După o reducere cu 10% un produs costă 99 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.

460. Firma F_1 are un capital iniţial de 10000 lei şi în anul 2007 a realizat un profit de 5000 lei. Exprimaţi în raport cu capitalul iniţial procentul pe care-l reprezintă profitul firmei.

461. Să se determine cât la sută din $a+b$ reprezintă numărul a, ştiind că a este egal cu 25% din b.

462. După două scumpiri succesive cu 10%, respectiv 20% preţul unui produs este de 660 lei. Să se determine preţul iniţial al produsului.

463. Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, ştiind că preţul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ului este de 19%).

464. Să se determine numărul elementelor mulţimii $A=\{1,4,7,...,40\}$.

465. Să se determine câte numere de trei cifre se pot scrie folosind doar elemente din mulţimea $\{1,2\}$.

466. Să se determine câte numere de două cifre se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4\}$.

467. Să se determine câte numere de câte 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4\}$.

468. Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot scrie cu ajutorul cifrelor din mulţimea $\{1,2,3\}$.

469. Să se determine în câte moduri se poate alcătui un cuvânt format din trei litere distincte ale unui alfabet de şapte litere.

470. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4\}$. Să se determine câte numere formate din 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii A.

471. Să se determine câte numere de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4\}$.

472. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Să se determine câte numere formate din 4 cifre distincte se pot forma cu elementele din mulţimea A.

473. Să se determine numărul tuturor segmentelor orientate nenule care se pot forma cu elementele unei mulţimi de 4 puncte din plan.

474. Să se determine în câte moduri pot fi alese două persoane dintr-un grup de 6 persoane.

475. Să se calculeze numărul submulţimilor mulţimii $\{1,2,3,4\}$ care au un număr par nenul de elemente.

476. Se consideră 10 puncte, oricare 3 necolinare. Câte drepte trec prin cel puţin 2 puncte din cele 10?

Scanned with OKEN Scanner

477. Să se calculeze numărul submulţimilor cu 3 elemente ale unei mulţimi cu 5 elemente.

478. Să se determine numărul tuturor submulţimilor de 2 elemente ce se pot forma cu elemente din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$.

479. Să se calculeze numărul submulţimilor cu 2 elemente ale unei mulţimi care are 6 elemente.

480. Câte submulţimi cu două elemente are mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$?

481. Să se determine numărul natural nenul n astfel încât numărul submulţimilor cu 2 elemente ale unei mulţimi cu n elemente să fie egal cu 6.

482. Să se calculeze în câte moduri se poate alcătui un cuvânt format din câte trei litere distincte ale unui alfabet care are 4 litere.

483. Să se calculeze $\frac{2!+3!}{C_8^1}$.

484. Să se calculeze $P_3-C_4^2$.

485. Să se calculeze $2C_3^1-A_3^2$.

486. Să se calculeze: $C_3^2+P_3$.

487. Să se calculeze $A_5^2-P_3$.

488. Să se calculeze $C_4^2+C_4^3$.

489. Să se calculeze numărul natural $C_6^2-C_6^4$.

490. Să se calculeze $C_{10}^9-C_9^8$.

491. Să se calculeze $C_4^2+C_4^3$.

492. Să se calculeze $C_8^5-C_8^3$.

493. Să se calculeze $C_8^3-C_8^5$.

494. Să se calculeze $C_{2008}^2-C_{2008}^{2006}$.

495. Să se calculeze $C_{1000}^2-C_{1000}^{998}$.

496. Să se calculeze $C_{2008}^2-C_{2007}^2-C_{2007}^1$.

497. Să se calculeze $C_5^4+A_5^4$.

498. Să se calculeze $\frac{P_2+C_4^1}{A_3^1}$.

499. Să se calculeze $C_7^5-C_6^5-C_6^4$.

500. Să se calculeze $C_4^0-C_4^1+C_4^2-C_4^3+C_4^4$.

501. Să se calculeze $C_5^2-A_4^2+6$.

502. Să se arate că $C_5^1+1=3!$

503. Să se verifice că $C_5^1+C_5^3+C_5^5=2^4$.

504. Să se compare numerele $a=C_4^1+C_4^3$ şi $b=C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3$.

Scanned with OKEN Scanner

505. Să se verifice egalitatea $C_{n+1}^{n}-C_{n+1}^{1}=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

506. Să se demonstreze că numărul $\frac{8!}{3!\cdot 5!}-\frac{9!}{2!\cdot 7!}$ este natural.

507. Să se rezolve ecuaţia $\frac{n!}{12}=(n-2)!$.

508. Să se determine numărul natural n, ştiind că $\frac{(n-3)!}{(n-5)!}=6$.

509. Să se rezolve ecuaţia $\frac{(n+2)!}{n!}=56, n\in\mathbb{N}$.

510. Să se rezolve ecuaţia $A_n^2=12$, $n\in\mathbb{N}$.

511. Să se rezolve ecuaţia $C_n^2=28, n\in\mathbb{N}$.

512. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $C_n^2=6$.

513. Să se rezolve ecuaţia $C_{n+2}^{n+1}=2, n\in\mathbb{N}$.

514. Să se rezolve ecuaţia $C_x^2=21, x\in\mathbb{N}$.

515. Să se rezolve ecuaţia $C_n^2=C_n^1+2$, $n\in\mathbb{N}$.

516. Să se determine valorile naturale ale numărului n astfel încât $C_n^0+C_n^1=8$.

517. Să se determine numărul natural n ştiind că $A_n^1+C_n^1=10$.

518. Să se rezolve inecuaţia $2C_n^2\le n+8$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

519. Să se rezolve inecuaţia $C_{17}^{x}\le C_{17}^{x-2}$, $x\in\mathbb{N}$, $x\ge 2$.

520. Să se compare numerele $a=C_6^2-C_6^4$ şi $b=\log_2\left(2^{-1}\cdot\sqrt{4}\right)$.

521. Să considerăm toate numerele naturale de câte trei cifre scrise cu elemente din mulţimea $\{1,2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, aceasta să fie divizibil cu 3.

522. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $\{11,12,...,20\}$ acesta să fie număr prim.

523. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre acesta să fie cub perfect.

524. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr de două cifre format cu elementele mulţimii A, aceasta să aibă cifrele egale.

525. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},...,\sqrt{10}\right\}$, acesta să fie raţional.

526. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},...,\sqrt{11}\right\}$ acesta să fie iraţional.

Scanned with OKEN Scanner

527. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\left\{\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},\ldots,\sqrt[3]{30}\right\}$, acesta să fie număr raţional.

528. Să se determine probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $A=\left\{\sin 30^{\circ},\sin 45^{\circ},\sin 60^{\circ}\right\}$, acesta să fie număr raţional.

529. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\{2,3,4,5\}$, acesta să verifice egalitatea $2^n=n^2$.

530. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $\{3,4,5,6\}$, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)\geq 20$.

531. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $A=\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n!<5$.

532. Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulţimii $\{0,1,2,3,4,5\}$ să verifice inegalitatea $n!<50$.

533. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element n al mulţimii $\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n!\geq n^2$.

534. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $\{2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2+n>n!$.

535. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2\leq 2^n$.

536. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n<n!$.

537. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $3^n>n^3$.

538. Să se determine probabilitatea ca alegând unul din numerele P_3, A_3^1 şi C_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.

539. Să se calculeze probabilitatea ca alegând unul dintre numerele C_4^2, C_5^2 şi C_4^3 acesta să fie divizibil cu 3.

540. Să se scrie termenul al treilea din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$.

541. Să se determine numărul termenilor iraţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{12}+3\right)^{19}$.

542. Să se dezvolte $\left(x^2+a\right)^5$.

543. Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6$.

544. Suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $\left(x^2-y\right)^n$ este egală cu 64. Să se determine termenul de rang trei.

Scanned with OKEN Scanner

545. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{100}$.

1.8. Elemente de geometrie și calcul vectorial

546. Fie punctele $A(2,-1)$ și $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.

547. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-8)$ și $B(6,3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

548. În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u}+3\vec{v}$.

549. Să se determine numărul real a știind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.

550. Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{w}=-\vec{i}+m\vec{j}$ sunt coliniari.

551. Se consideră reperul cartezian xOy și punctele $A(1;-1)$ și $B(3;5)$. Să se determine coordonatele punctului C din plan astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

552. Se consideră punctele distincte A,B și C. Să se demonstreze că dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, atunci M este mijlocul segmentului BC.

553. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, știind că A,B și C sunt vârfurile unui triunghi.

554. Dacă $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.

555. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}$.

556. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

557. Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

558. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

559. Fie punctele distincte A,B,C,D nu toate coliniare. Știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$, să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

560. Se consideră pătratul $ABCD$, de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

561. Să se demonstreze că, în hexagonul regulat $ABCDEF$, are loc relația $\overrightarrow{AD}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

562. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$ de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$.

563. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-3)$ şi $\overrightarrow{OB}(1,-2)$. Să se determine numerele reale α şi β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α,β).

564. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-1)$ şi $\overrightarrow{OB}(1,2)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde M este mijlocul segmentului AB.

565. Se consideră triunghiul echilateral ABC de centru O. Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC, să se determine numărul real a astfel încât $\overrightarrow{AO}=a\cdot\overrightarrow{AM}$.

566. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$, atunci punctul C este mijlocul segmentului AB.

567. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(-1,2)$: Să se determine coordonatele punctului $C\in(AB)$ astfel încât $\frac{CA}{CB}=2$.

568. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(m^2;m)$ şi dreapta de ecuaţie $d:x+y+m=0$. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care punctul A se află pe dreapta d.

569. Se consideră punctul $A(2,3)$. Să se determine numărul real m pentru care punctul A se află pe dreapta $d:2x-y+m=0$.

570. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, ştiind că punctele $A(a,b)$ şi $B(a-1,4)$ aparţin dreptei de ecuaţie $x+y-5=0$.

571. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-1)$ şi $B(1,1)$. Să se determine numerele reale m şi n pentru care punctele A şi B se află pe dreapta de ecuaţie $x+my+n=0$.

572. Să se calculeze distanţa de la punctul $A(-6,8)$ la originea reperului cartezian xOy.

573. Să se calculeze lungimea segmentului AB, determinat de punctele $A(2,3)$ şi $B(5,-1)$, în reperul cartezian xOy.

574. Să se determine numărul real a, ştiind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ şi $B(4,a,4+a)$ este egală cu 5.

575. Să se determine distanţa dintre punctele $A(3,-1)$ şi $B(-1,2)$.

576. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1),B(-2,2)$. Să se determine distanţa dintre punctele A şi B.

577. Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât distanţa dintre punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,a)$ să fie egală cu 5.

578. Să se determine valorile reale ale numărului a ştiind că distanţa dintre punctele $A(2;1)$ şi $B(7,a)$ este egală cu 13.

Scanned with OKEN Scanner

579. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care distanţa dintre punctele $A(2,m)$ şi $B(-m,-2)$ este egală cu $4\sqrt{2}$.

580. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2,m)$, unde m este un număr real. Să se determine numerele reale m pentru care $OM = \sqrt{5}$.

581. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,2)$ şi $C(3,-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

582. Să se determine perimetrul triunghiului ABC ale cărui vârfuri sunt punctele $A(-1,3), B(-2,0)$ şi $C(0,3)$ în reperul cartezian xOy.

583. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB, ştiind că $A(5,-4)$ şi $B(-3,6)$.

584. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(4,-3)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB.

585. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$ şi $B(4,4)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB.

586. Să se determine coordonatele punctului B, ştiind că $C(3,5)$ este mijlocul segmentului AB şi că $A(2,4)$.

587. Să se determine coordonatele punctului M care aparţine dreptei AB şi care este egal depărtat de punctele $A(1;-1)$ şi $B(5;-3)$.

588. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(3,0)$, $B(x,y)$, $C(5,-2)$. Să se determine numerele reale x şi y astfel încât punctul B să fie mijlocul segmentului AC.

589. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$ şi $B(m^2-1,0)$ cu $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctul $C(5,0)$ să fie mijlocul segmentului AB.

590. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Să se calculeze distanţa de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

591. Să se calculeze lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC ştiind că $A(2,3)$, $B(2,0)$ şi $C(0,2)$.

592. Să se determine lungimea medianei din A a triunghiului ABC, ştiind că vârfurile acestuia sunt $A(0;4)$, $B(-2;0)$ şi $C(8;0)$.

593. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(1,5)$ şi $C(4,2)$. Să se calculeze distanţa de la punctul A la mijlocul segmentului BC.

594. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4), B(1,1), C(3,-1)$. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC.

595. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;1)$, $B(-1;0)$ şi $C(3;-4)$. Să se determine lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul lui (BC).

Scanned with OKEN Scanner

596. Se consideră în reperul cartezian xOy punctele $A(3;2)$, $B(2;3)$ şi M mijlocul segmentului AB. Să se determine lungimea segmentului OM.

597. În reperul cartezian xOy se dau punctele $A(5,-4)$ şi $B(0,8)$. Să se calculeze lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul segmentului AB.

598. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0;a)$, $B(-1;2)$ şi $C(4;5)$, unde a este un număr real. Să se determine valorile lui a pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A.

599. Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC ştiind că $A(-1,1)$ şi $B(3,-2)$.

600. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,1)$ şi $B(1,-2)$.

601. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$ şi $N(2,1)$. Să se determine ecuaţia dreptei MN.

602. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,-3)$ şi $B(-3,2)$.

603. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3;0)$ şi intersectează axa Oy în punctul de ordonată 4.

604. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2), B(5,6)$ şi $C(-1,1)$. Să se determine ecuaţia medianei duse din vârful C în triunghiul ABC.

605. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(2,-1)$ şi $B(1,-2)$.

606. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctele $A(2,3)$ şi $B(-3,-2)$.

607. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(4,0)$ şi $B(0,2)$.

608. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ şi $B(-2,a)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine numărul real a astfel încât dreapta AB să treacă prin punctul $O(0,0)$.

609. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,3)$. Ştiind că punctele B şi C sunt simetricele punctului A faţă de axele Ox, respectiv Oy, să se calculeze lungimea segmentului BC.

610. Să se determine simetricul punctului $A(2,-4)$ faţă de punctul $B(1,-2)$.

611. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-1)$ şi $B(3,1)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A faţă de punctul B.

612. Să se determine coordonatele punctului C ştiind că el este simetricul punctului $A(5,4)$ faţă de punctul $B(-2,1)$.

613. Să se determine coordonatele simetricului punctului A faţă de mijlocul segmentului BC ştiind că $A(3;0)$, $B(0;2)$ şi $C(3;2)$.

614. În reperul cartezian xOy se consideră punctul N, simetricul punctului $M(-2,3)$ faţă de punctul O. Să se calculeze lungimea segmentului MN.

615. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ şi are panta egală cu 1.

616. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,-2)$ şi are panta egală cu 2.

Scanned with OKEN Scanner

617. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ şi $C(0,-2)$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

618. Să se determine lungimea înălţimii din O în triunghiul MON unde $M(4,0)$, $N(0,3)$ şi $O(0,0)$.

619. Să se determine aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2,0), B(0,4)$ şi $C(1,6)$.

620. Să se calculeze aria triunghiului ABC determinat de punctele $A(1,2), B(-1,1)$, $C(3,5)$ în reperul cartezian xOy.

621. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1), B(2,3)$ şi $C(3,m)$. Să se determine numărul real m pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare.

622. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,4), B(3,3)$ şi $C(m,5)$ sunt coliniare.

623. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctele $A(1;3)$, $B(2;5)$ şi $C(3;m)$ să fie coliniare.

624. Se consideră punctele $A(1,a), B(2,-1), C(3,2)$ şi $D(1-,2)$. Să se determine numărul real a ştiind că dreptele AB şi CD sunt paralele.

625. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(2,5)$ şi este paralelă cu dreapta $x+y-2=0$.

626. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(2,-3)$ şi este paralelă cu dreapta $x+2y+5=0$.

627. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(1,1)$ şi este paralelă cu dreapta $4x+2y+5=0$.

628. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,-1)$ şi este paralelă cu dreapta $y=x$.

629. Să se determine numărul real a ştiind că dreptele $2x-y+3=0$ şi $ax+2y+5=0$ sunt paralele.

630. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$ şi $D(2,3)$. Să se arate că dreptele AB şi CD sunt paralele.

631. Se consideră dreptele distincte $d_1 : ax+2y=2$ şi $d_2 : 8x+ay=4$. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât dreptele d_1 şi d_2 să fie paralele.

632. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : -2x-my+3=0$ şi $d_2 : mx+y-5=0$. Să se determine numerele reale m pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele.

633. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1), B(2,3)$ şi $C(3,1)$. Să se determine coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABDC$ să fie paralelogram.

Scanned with OKEN Scanner

634. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ cu vârfurile $M(2;0)$, $N(6;4)$, $P(4;6)$ şi $Q(0;2)$ este dreptunghi.

635. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1: 2x-y-2=0$ şi $d_2: x+3y-8=0$. Să se calculeze distanţa de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecţie a celor 2 drepte.

636. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor de ecuaţii $2x+y-4=0$ şi $x+y-3=0$.

637. Să se determine punctul de intersecţie a dreptelor de ecuaţii $4x-6y-2=0$ şi $2x+3y-7=0$.

638. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a dreptele de ecuaţii $x+3y-1=0$ şi $3x+2y+4=0$.

639. Să se determine punctul de intersecţie a dreptei de ecuaţie $2x+y-4=0$ cu axa Ox.

640. Fie triunghiul echilateral ABC cu $AB=8$. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

641. Fie ABC un triunghi, cu $AB=c$, $BC=a$ şi $AC=b$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

642. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu laturile de lungime 6. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

643. Calculaţi $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ştiind că $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$ şi unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

644. Fie pătratul $ABCD$ cu laturile de lungime 6. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.1. MATRICE

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^3, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

b) Să se verifice că dacă $X(a)\cdot(b)=X(a+b+ab)$, oricare ar fi numerele $a,b\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze suma $X(1)+X(2)+X(3)+\cdots+X(2008)$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $AB=BA$.

b) Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2=A\cdot A$ şi $B^2=B\cdot B$.

c) Să se arate că $C^4=5^4\cdot I_2$ unde $C=A+B$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

3. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$

b) Să se verifice că $A^2=aI_2+bA$, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Ştiind că $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu $AX=XA$, să se arate că există $m,n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $X=mI_2+nA$.

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$

b) Să se verifice că $AB-2B=O_2$.

c) Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $AXB=O_2$.

5. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $I_2+I_2^t$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $m\in\mathbb{R}$ are loc relaţia $(mA)^t=mA^t$.

c) Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A+A^t=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

6. Se consideră mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix}2a & -a\\ 2a & -a\end{pmatrix}\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$. Pentru $A\in M$ se notează $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $A^2=aA$.

b) Să se arate că dacă $A,B\in M$, atunci $AB\in M$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A + A^2 + A^3 = 3A$.

7. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze AB.

b) Să se demonstreze că dacă $A, B \in M$ atunci $AB \in M$.

c) Să se demonstreze că dacă $X \in M$ şi $AX = XA$ pentru orice $A \in M$, atunci există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Fie funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin $f(A) = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $f(I_2)$.

b) Să se demonstreze că $(A+B)^t = A^t + B^t$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $f(A) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Se consideră mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ şi matricele $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $B^2 = 3B$, unde $B^2 = B \cdot B$.

b) Să se arate că $mI_3 + nB \in G$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că dacă $A \in G$ şi $A^2 = O_3$, atunci $A = O_3$, unde $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^2 = A \cdot A$.

10. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $f(0) + f(1)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se arate că $f(1)\cdot f(-1)=I_3$ unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) Să se demonstreze că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

11. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^2=A\cdot A$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se verifice că $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I_2$.

c) Ştiind că $a+d\neq 0$ şi $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2M=MA^2$, să se demonstreze că $AM=MA$.

12. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

$C(A)=\{X\in M_2(\mathbb{C})\,|\,XA=AX\}$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}=I_2$.

b) Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-2I_2$ şi $A^2=A\cdot A$.

c) Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}$.

13. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&4\\3&1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $A\cdot B$.

b) Să se rezolve ecuaţia matricială $A\cdot X=B$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-4A+5I_2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

14. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea de matrice

$G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,X^2=-I_2\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

a) Să se verifice că $A\in G$.

b) Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\frac{1}{2}X$, oricare ar fi $X\in G$.

c) Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea cu elemente numere reale pentru care avem $AX=XA$ este de forma $X=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

15. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A\cdot B$.

b) Să se calculeze A^2+A^3, unde $A^2=A\cdot A$ și $A^3=A^2\cdot A$.

c) Să se demonstreze că dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a,b,c astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$.

16. În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$ și $C=A+B$.

a) Să se calculeze $A\cdot B$.

b) Să se demonstreze că $A^2=6A$ și $B^2=-6B$, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Să se demonstreze că $C^3=6^2(A+B)$, unde $C^3=C\cdot C\cdot C$.

17. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x&y\\0&6\end{pmatrix}$ cu $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real x astfel încât $A\cdot B=B\cdot A$.

b) Să se verifice că $A^2=4(A-I_2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Să se determine numărul real a astfel încât $A^3-aA^2+4A=O_2$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2.2. DETERMINANȚI. INVERSA UNEI MATRICE

18. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul d.

b) Să se arate că $d=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $8^x+27^x+125^x-3\cdot(2\cdot3\cdot5)^x=0$.

19. Se consideră determinatul $D(a)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&9\\1&a&a^2\end{vmatrix}$, unde a este număr real.

a) Să se calculeze valoarea determinantului $D(9)$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(3^x)=0$.

20. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$. Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}, n\in\mathbb{N}^*$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine x știind că $\det(A)=0$.

b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=2A$.

21. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se demonstreze că $A^3=7A$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

c) Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-6I_2$ și $A^2=A\cdot A$.

22. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notăm $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se arate că $A^2+A^3=O_2$.

c) Să se calculeze suma $A+2\cdot A^2+\cdots+10\cdot A^{10}$.

23. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2+A, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Știind că $A^n=\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ și $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$ să se rezolve ecuația $\det(A^n)=2\cdot 5^n-125$.

c) Să se determine matricea $B=A+A^2+\cdots+A^{2008}$

24. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2=2I_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A-xI_2)=0$.

c) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $AX=XA$.

Scanned with OKEN Scanner

25. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ cu $x\in\mathbb{R}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Notăm $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se determine x știind că $\det A=0$.

b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=2A$.

26. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,X^2=X\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

a) Să se verifice că $A\in G$.

b) Să se calculeze $\det\left(A^3-2A^2+A\right)$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

c) Să se demonstreze că $(2X-I_2)^2=I_2$, oricare ar fi $X\in G$.

27. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și submulțimea $G=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,|\,AX=XA\}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se demonstreze că $A^2X=XA^2$, oricare ar fi $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci matricea $aI_3+bA\in G$.

28. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se demonstreze că $A^3=2^3\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-8A+12I_2=O_2$.

29. Pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ se consideră matricele $A_x=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine valorile lui x pentru care $\det A_x=0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $A_x^2 = I_2$, unde $A_x^2 = A_x \cdot A_x$.

c) Să se demonstreze că $A_x^2 = 2xA_x + (1-x^2)\cdot I_2$.

30. a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2008}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2008}+1 \end{vmatrix}$.

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 2 = 0$.

c) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 + A^2 + A = O_3$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $A^3 = A^2 \cdot A$.

31. În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că $A^2 = 8A$.

b) Să se calculeze $\det X(a)$.

c) Să se demonstreze că $X(a)\cdot X(b) = X(a+b+8ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

32. Se consideră matricele $H(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a > 0$.

a) Să se calculeze $\det\big(H(a)\big), \forall a > 0$.

b) Să se arate că $H(a)\cdot H(b) = H(a\cdot b)$, $\forall a, b > 0$.

c) Să se calculeze determinantul matricei $H(1) + H(2) + H(3) + \ldots + H(2008)$.

33. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $O_3 \in M$.

b) Să se demonstreze că produsul a două matrice din M este o matrice din M.

c) Știind că $A \in M$ cu $\det(A) = 0$, să se demonstreze că $A^3 = O_3$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

34. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, unde $X^2 = X \cdot X$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

b) Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

c) Să se arate că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

35. Se consideră matricea $A(k)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x_k & x_k^2\\ -2 & x_k^2 & x_k\end{pmatrix}$, cu $k\in\{0,1,2\}$. $x_0=1$ și x_1,x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+x-2=0$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(0)$.

b) Să se determine matricea $A(1)+A(2)$.

c) Să se calculeze suma elementelor matricei $A(k)$, pentru fiecare $k\in\{0,1,2\}$.

36. Se consideră mulțimea $M=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1,1)$.

b) Să se demonstreze că dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$.

c) Să se arate că $\det(I_2-A(0,b))\neq 0$, oricare ar fi $b\in\mathbb{R}$.

37. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}^*\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$. Se notează cu X^t transpusa matricei X.

a) Să se calculeze $A^t\cdot A$.

b) Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ din M, are loc egalitatea $\det(X\cdot X^t)=(ad-bc)^2$.

c) Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in M$ cu $\det(X\cdot X^t)=0$, are loc relația $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

38. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $I_2\in M$.

b) Știind că $A,B\in M$, să se arate că $A+B\in M$.

c) Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\geq 0$, oricare ar fi $A,B\in M$.

Scanned with OKEN Scanner

39. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu A' transpusa matricei A.

a) Știind că $ad=4$ și $bc=3$, să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se calculeze $A\cdot A'$.

c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A\cdot A'$ este egală cu 0, atunci $\det(A)=0$.

40. Se consideră matricele de forma $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det(M_1+M_2)$.

b) Să se calculeze M_a^2, unde $M_a^2=M_a\cdot M_a$.

c) Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M_aX=XM_a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

41. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $I_2\in M$.

b) Știind că $A,B\in M$, să se arate că $A+B\in M$.

c) Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\le 0$, oricare ar fi $A,B\in M$.

42. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$. Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\,n\,ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $A+A^2=2A$.

b) Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X+A)=2$.

c) Știind că $A^n=A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A+2A^2+\cdots+nA^n=\dfrac{n(n+1)}{2}A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

43. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a & a & a\\ a & 0 & 0\\ a & 0 & 0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$, să se calculeze matricea A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se calculeze $\det(A^2)$, $a\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că $A^2\neq I_3$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

44. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a,b,c \in \mathbb{R}$.

a) Ştiind că $a=-1$, $b=0$ şi $c=1$, să se calculeze determinantul Δ.

b) Să se arate că $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

45. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $XA = AX$, atunci există $a,b \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Să se arate că dacă $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci ecuaţia $Y^2 = A$ nu are nicio soluţie în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

46. În mulţimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră submulţimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

a) Dacă $A,B \in G$, să se demonstreze că $A+B \in G$.

b) Să se arate că matricea $C \in G$, obţinută pentru $a=5$ şi $b=3$, verifică relaţia $C^2 = 10C - 16I_2$, unde $C^2 = C \cdot C$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pentru $a,b \in \mathbb{N}$ să se determine o matrice $D \in G$ care are proprietatea că $\det D = 2008$.

47. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a=-1$.

b) Să se demonstreze că $D(a) = -(a-1)^2(a+2)$, pentru orice a număr real.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(a) = -4$.

48. Se consideră determinantul $D(a,b,x) = \begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 1 & a & bx \\ 1 & b & ax \end{vmatrix}$, unde a,b şi x sunt numere reale.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $D(1,1,0)$.

b) Să se demonstreze că $D(a,a,x)$ nu depinde de numărul real x.

c) Să se rezolve ecuaţia $D(a,b,x)=0$, unde a,b sunt numere reale distincte.

49. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ cu $a,x,y\in\mathbb{R}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că dacă $X\cdot A=B$, atunci $(a^2-9)x=0$.

b) Să se determine valorile reale ale numărului a pentru care determinantul matricei A este nenul.

c) Să se determine trei soluţii distincte ale sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 9x+3y=0 \end{cases}$.

50. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2=B\cdot B$

b) Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Să se arate că $C^4=6^4\cdot I_2$, unde $C=B^2+A^{-1}$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

51. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim matricele $A=X\cdot Y'$ şi $B(a)=aA+I_3$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi Y' este transpusa matricei Y.

a) Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

b) Să se calculeze determinantul matricei A.

c) Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

52. Se consideră matricile $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru orice $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează $X\cdot X=X^2$.

a) Să se verifice că $A=I_3+B$.

b) Să se calculeze suma A^2+B^2.

c) Să se calculeze inversa matricei A^2.

53. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Z}, a^2-3b^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\notin G$.

b) Să se arate că pentru orice două matrice $A,B\in G$ are loc egalitatea $A\cdot B=B\cdot A$.

c) Să se demonsteze că inversa oricărei matrice din G aparţine mulţimii G.

54. Se consideră mulţimea $G=\left\{A=\begin{pmatrix}a+b & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Z}, a^2=1\right\}$.

a) Să se verifice dacă matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi respectiv $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ aparţin mulţimii G.

b) Să se determine matricea $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încat

$\begin{pmatrix}a+b & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}=aI_2+bB, \forall a,b\in\mathbb{Z}$.

c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G.

55. Se consideră mulţimea $M=\{aI_2+bV\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $V=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $I_2\in M$.

b) Să se determine matricele inversabile din mulţimea M în raport cu operaţia de înmulţire din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Ştiind că $A,B\in M$, să se arate că $AB\in M$.

56. În mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine numerele a,b şi c astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

b) Să se arate că pentru $a=c=0$ şi $b=-1$ matricea A este inversa matricei F.

c) Să se rezolve ecuaţia $F\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

57. În mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi submulţimea $G=\left\{X^n\middle| n\in\{1,2,3\}\right\}$, unde $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{\text{de }n\text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice că $X^3=I_3$.

b) Să se calculeze $\det(I_3+X+X^2)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se demonstreze că, dacă $Y \in G$, atunci $Y^{-1} \in G$.

58. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$G = \{M(x,y) \mid M(x,y) = xI_2 + yA,\ x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $A^2 = O_2$, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Să se determine inversa matricei $M(1,1)$.

c) Să se determine matricele inversabile din mulțimea G.

59. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea A^2, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Să se demonstreze că $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$, unde $A^3 = A^2 \cdot A$.

c) Să se determine numerele reale m, n, p astfel încât $A^{-1} = mA^2 + nA + pI_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

60. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Se notează

$X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \ldots \cdot X}_{\text{de } n \text{ ori}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze X^2.

b) Să se determine inversa matricei X.

c) Să se determine numărul real r astfel încât $X^3 = 3X^2 + rX + I_3$.

61. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze că $A^2 = 3A$.

b) Să se calculeze $\det(A^{10})$.

c) Să se determine inversa matricei $B = A + I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

62. În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

a) Să se calculeze $A(1) \cdot A(-1)$.

b) Să se verifice dacă $(A(x))^2 = A\left((x+1)^2 - 1\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine inversa matricei $A(1)$.

Scanned with OKEN Scanner

63. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se calculeze A^2 ştiind că $A^2=A\cdot A$.

c) Să se calculeze inversa matricei I_3+A.

64. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi submulţimea

$G=\{X(a)\,|\,a\in\mathbb{R}$ şi $X(a)=I_2+aA\}$.

a) Să se verifice dacă I_2 aparţine mulţimii G.

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că pentru $a\neq-\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.

65. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=A-I_3$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se calculeze A^2-B^2, unde $A^2=A\cdot A$ şi $B^2=B\cdot B$.

c) Să se arate că inversa matricei B este $B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$.

66. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=I_2+A$.

Se notează $A^2=A\cdot A$ şi $B^n=\underbrace{B\cdot B\cdot\ldots\cdot B}_{\text{de } n \text{ ori}}$

a) Să se verifice că $A^2=O_2$.

b) Să se calculeze inversa matricei B.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $B^3-B^2=xA$.

67. În mulţimea matricelor pătratice $M_2(\mathbb{Q})$ se consideră $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$,

$x,y,z,t\in\mathbb{Q}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A^2)$, ştiind că $A^2=A\cdot A$.

b) Să se determine $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$ ştiind că $A\cdot B=I_2$.

c) Dacă $A\cdot B=I_2$ să se calculeze $S=\left(B^{-1}-A\right)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

68. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x,y\in\mathbb{R}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A)=0$.

b) Pentru $a=3$ să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Pentru $a=3$ să se rezolve ecuaţia matricială $A\cdot X=B$.

69. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se demonstreze că $(A+I_2)^{-1}=A-I_2$.

c) Să se arate că ecuaţia $X^2=A$ nu are soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

70. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A=B+I_3$.

b) Să se demonstreze că matricea A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

c) Să se determine numărul real a astfel încât $\det X(a)=(2a-1)^3$, unde $X(a)=I_3+aA$

71. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Pentru $a\in\mathbb{R}$ fixat, definim $B=aA+I_3$.

a) Să se calculeze $\det(B)$ pentru $a=1$.

b) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$ şi să se determine B^{-1}.

72. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se notează $X^2=X\cdot X$.

a) Să se calculeze AB.

b) Să se demonstreze că $(A+B)^2=(A-B)^2=A^2+B^2$.

c) Să se calculeze inversa matricei $(A-B)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

73. Pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}.$$

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(a), a \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul dat poate fi rezolvat prin metoda Cramer.

c) Pentru $a = 0$, să se rezolve sistemul.

74. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z = m^2 - 3 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ (m+1)x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluția $(1, 2, -3)$.

c) Pentru $m = -1$ să se rezolve sistemul de ecuații.

75. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât soluția sistemului să fie $(2, 1, -1)$.

b) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2 - 3m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

c) Pentru $m = -5$ să se rezolve sistemul de ecuații.

76. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ x + 4y + a^2 z = 1 \end{cases}$ și matricea

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Să se calculeze $\det(A(4))$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ să se rezolve sistemul.

Scanned with OKEN Scanner

77. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, sunt distincte două câte două.

a) Să se rezolve sistemul pentru $a=0, b=1$ şi $c=2$.

b) Să se verifice că $\det A=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.

c) Să se demonstreze că soluţia sistemului nu depinde de numerele reale a,b şi c.

78. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=5 \\ x+y+4z=4 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

b) Pentru $a=-1$ şi $b=2$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine numărul real b, ştiind că (x_0,y_0,z_0) este soluţie a sistemului şi că $x_0+y_0+z_0=4$.

79. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22 \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

b) Să se arate că tripletul $(7,1,1)$ nu poate fi soluţie a sistemului, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

c) Să se determine soluţia (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $y_0+z_0=3$.

80. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

b) Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât soluţia sistemului să verifice relaţia $x=y+z$.

81. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde m este un parametru real şi A matricea sistemului.

a) Să se arate că pentru orice m număr real tripletul $(0,3,1)$ este soluţie a sistemului.

b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluţie unică.

c) Pentru $m\neq 3$, să se rezolve sistemul.

Scanned with OKEN Scanner

82. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1 \\ 2x-z=a \end{cases}$, $a\in\mathbb{Z}$ şi notăm cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Pentru $a=1$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine cea mai mică valoare a lui $a\in\mathbb{Z}$ pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere naturale.

83. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x-y+mz=0 \\ 4x+y+5z=0 \end{cases}$, cu m parametru real şi A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A pentru $m=1$.

b) Să se determine parametrul real m ştiind că determinantul matricei sistemului este nul.

c) Pentru $m\neq -1$ să se rezolve sistemul.

84. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+2y=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ şi $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A\in M_2(\mathbb{R})$ matricea sistemului. Notăm $A^2=A\cdot A$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Pentru $a=-1$ să se rezolve sistemul de ecuaţii.

b) Să se verifice egalitatea $A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=O_2$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că matricea A verifică egalitatea $A^2=9I_2$.

85. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x-3y+4z=-5 \\ x+2y+\alpha z=0 \\ 5x-4y+7z=\beta \end{cases}$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, A este matricea sistemului şi $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 5 & -4 & 7 & \beta \end{pmatrix}$. Notăm cu $S(\alpha,\beta)$ suma elementelor matricei B.

a) Să se calculeze $S(0,0)$.

b) Să se determine parametrii reali α şi β astfel încât determinantul matricei A să fie nul şi $S(\alpha,\beta)=-2$.

c) Pentru $\alpha=0$ şi $\beta=0$ să se rezolve sistemul.

Scanned with OKEN Scanner

86. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16 \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului

$A=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

b) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Să se rezolve sistemul pentru $a=1$.

87. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ x+ay+(a-3)z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $\det(A)=a^2-6a+5$.

b) Să se rezolve ecuaţia $\det(A)=0$.

c) Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul de ecuaţii.

88. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

a) Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine mulţimea valorilor reale ale numărului a pentru care $\det(A)\neq 0$.

c) Să se rezolve sistemul pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$.

89. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Să se scrie sistemul asociat ecuaţiei matriciale $AX=B$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{2,6\}$ și (x_0, y_0, z_0) este soluția sistemului $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+ay+z=1 \\ 2y+3z=1 \end{cases}$, să se demonstreze că $\frac{x_0}{z_0}$ nu depinde de a.

2.4. APLICAȚIILE DETERMINANȚILOR ÎN GEOMETRIE

90. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2^n), n \in \mathbb{N}$.

a) Să se verifice dacă punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

b) Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, n \in \mathbb{N}$.

91. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2n+1), n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

b) Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.

c) Să se arate că toate punctele $A_n(n,2n+1), n \in \mathbb{N}$ sunt coliniare.

92. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \log_3 9^n\right)$ și $B_n(-n,2n), n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B_1 și B_2.

b) Să se arate că $A_n = B_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2.

93. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n+2,3n-2), n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctele A_1 și A_2.

b) Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, punctele A_1, A_2 și A_n sunt coliniare.

94. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,4), B(a,a)$ și $C(3,-2)$ unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a=0$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

b) Pentru $a=-2$ să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B și C.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care orice punct $M(x,-2)$, cu $x \in \mathbb{R}$ este coliniar cu punctele B și C.

95. Se consideră punctele $A_n\left(n,n^2\right)$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se calculeze aria triunghiului $A_0A_1A_2$.

c) Să se arate că pentru orice $m,n,p\in\mathbb{N}$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este un număr natural.

96. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,n+2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se arate că punctele A_0,A_1,A_2 sunt coliniare.

c) Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n.

97. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele: $AB:x+2y-4=0$ şi $BC:3x+y-2=0$.

a) Să se determine coordonatele punctului B.

b) Pentru $A(4;0)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$ să se scrie ecuaţia medianei triunghiului ABC, duse din vârful C.

c) Pentru $A(4;0)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

98. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}x & y & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $x,y\in\mathbb{R}$. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(0,3)$, $O(0,0)$ şi $C_n(n+1,2-n)$ cu $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze determinantul matricei M.

b) Să se arate că punctele A,B,C_2 sunt coliniare.

c) Să se determine numărul natural nenul n astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă.

99. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(1,2)$ şi $C_n(n,-n)$, cu $n\in\mathbb{Z}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei C_4C_2.

b) Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}^*$ punctele O, C_n, C_{n+1}, sunt coliniare.

c) Să se calculeze aria triunghiului ABC_3.

100. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuaţii $AB:x+2y-4=0$ şi $CA:x-3y-4=0$.

a) Să se determine coordonatele punctului A.

b) Să se calculeze aria triunghiului ABC, dacă $A(4,0)$, $B(0,2)$ şi $C(1,-1)$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(4,0)$, $B(0,2)$ şi $D(2,a)$ să fie coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

2.5. LEGI DE COMPOZIŢIE. GRUPURI. INELE ŞI CORPURI

101. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $x \circ (-4)$.

c) Ştiind că operaţia este asociativă, să se calculeze $(-2008) \circ (-2007) \circ \ldots \circ 2007 \circ 2008$.

102. În mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se verifice dacă $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $x \circ x = 11$

c) Ştiind că operaţia "$\circ$" este asociativă să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2008}$

103. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E = (-2008) \circ (-2007) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2008$.

104. Se consideră mulţimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, unde $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G, \cdot)$

c) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(x) = A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ şi $(G, \cdot)$.

105. Fie mulţimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se verifice dacă $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$ oricare ar fi numerele reale a şi b.

b) Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru faţă de operaţia de înmulţire a matricelor pe M.

c) Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor pe mulţimea M.

106. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + 7(x+y) + 42$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $\sqrt{2}\circ\left(-\sqrt{2}\right)$.

b) Să se verifice că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă, să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x=x$.

107. Se consideră mulţimea $M=[k,\infty)\subset\mathbb{R}, k\in\mathbb{R}$ şi legea de compoziţie $x*y=xy-k(x+y)+k^2+k$, oricare ar fi $x,y\in M$.

a) Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $2*3=2$.

b) Pentru $k=2$, să se rezolve ecuaţia $x*x=6$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in M$ rezultă că $x*y\in M$.

108. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\right\}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$, $x\in\mathbb{Z}_6$

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\ x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

109. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x\circ x=x*x$.

b) Să se determine numărul întreg a cu proprietatea că $x\circ a=3$, oricare a fi numărul întreg x.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x*(y+1)=4\\ (x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

110. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=xy-5(x+y)+30$.

a) Să se demonstreze că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie "$*$".

c) Ştiind că legea de compoziţie "$*$" este asociativă să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $x*x*x=x$.

111. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $x*x=x$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziţie "$*$" este asociativă.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie "$*$".

112. Se consideră legea de compoziţie pe $\mathbb{R}$ definită prin $x\circ y=xy-x-y+2$.

a) Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă.

b) Să se arate că dacă $x,y\in(1,+\infty)$,atunci $x\circ y\in(1,+\infty)$,.

c) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x\circ a=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

113. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=2xy-x-y+1$.

a) Să se arate că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziţie "$*$" este asociativă.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x*(1-x)=0$.

114. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy+2x+2y-2$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x*4=10$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*a=a*x=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea "$*$" este asociativă, să se calculeze $\frac{2008}{1}*\frac{2008}{2}*\ldots*\frac{2008}{2008}$.

115. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziţie $x\perp y=x+y+1, x\circ y=ax+by-1$, cu $a,b\in\mathbb{Z}$ şi funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definită prin $f(x)=x+2$.

a) Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.

c) Dacă $a=b=1$ să se arate că funcţia f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},\perp)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$.

116. Se consideră mulţimea $G=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}, a^2-2b^2=1\right\}$.

a) Să se verifice că $3+2\sqrt{2}\in G$.

b) Să se demonstreze că $x\cdot y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că orice element din mulţimea G are invers în G în raport cu înmulţirea numerelor reale.

117. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2^{x+y}$.

a) Să se calculeze $2008\circ(-2008)$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\circ x^2=64$.

c) Să se demonstreze că nu există $x,y,z\in\mathbb{R}$ pentru care $(x\circ y)\circ z=2^z$.

118. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

a) Să se calculeze $x*0$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

c) Ştiind că $x_0\in\mathbb{Q}$ şi $x_n=x_0*x_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, să se arate că $x_7\in\mathbb{Q}$.

119. Se consideră mulţimea $G=(2,\infty)$ şi operaţia $x\circ y=xy-2(x+y)+6$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, $\forall x,y\in G$.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se afle elementele simetrizabile ale mulţimii G în raport cu legea "$\circ$".

120. Se consideră mulţimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ şi operaţia $x\circ y=x^{3\ln y}$, $\forall x,y\in G$

a) Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x\circ e=1$, unde e este baza logaritmului natural.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că operaţia „$\circ$" este asociativă pe mulţimea G.

Scanned with OKEN Scanner

121. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5^x*5^x=11$.

c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "$*$".

122. Fie $G=\left\{a+b\sqrt{3}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},a^2-3b^2=1\right\}$.

a) Să se verifice dacă 0 şi 1 aparţin mulţimii G.

b) Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in G$ avem $x\cdot y\in G$

c) Să se arate că dacă $x\in G$, atunci $\frac{1}{x}\in G$.

123. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă $x\circ y=x+y+1$.

a) Să se calculeze $2007\circ 2008$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x\circ x^2\le 3$.

c) Fie mulţimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\,n\ge 2 \text{ şi } C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2=n+6\right\}$. Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

124. Se consideră mulţimea $G=(-1,1)$ şi legea de compoziţie $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se rezolve în G ecuaţia: $x*x=\frac{4}{5}$.

b) Să se verifice egalitatea $x*y=\frac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}$, $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$ rezultă că $x*y\in G$.

125. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie $x\circ y=xy+3x+3y+6$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru, ştiind că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă şi comutativă.

c) Să se determine $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ astfel încât $C_n^2\circ C_n^2=13$.

126. Se consideră $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

a) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ suma $S=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}$.

b) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ produsul elementelor inversabile ale inelului.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

127. Pe mulţimea numerelor întregi definim legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

Scanned with OKEN Scanner

Enunţuri

a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x \circ x = 12$.
b) Să se arate că $1 \circ (2 * 3) = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$.
c) Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sistemul $\begin{cases} (x-3) * y = 2 \\ (x-y) \circ 4 = 10 \end{cases}$.

128. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x + y + 11$.
a) Să se arate că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.
b) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 6 ori } x} = 1$
c) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}, \circ)$ este grup comutativ.

129. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.
a) Să se verifice că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
c) Ştiind că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă, să se calculeze expresia:
$E = (-2008) \circ (-2007) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ (2) \circ \ldots \circ (2008)$.

130. Pe mulţimea $G = (-1,1)$ se consideră legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ Fie funcţia

$f : (-1,1) \to (0,\infty)$ $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

a) Să se calculeze $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{2}$.
b) Să se verifice că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G$.
c) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

131. Pe mulţimea numerelor reale definim legile de compoziţie $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ şi $x \circ y = xy - 3(x+y) + 12$.
a) Să se verifice că $(x * 2) - (3 \circ x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.
b) Ştiind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „$*$” şi e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „$\circ$”, să se calculeze $e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2$.
c) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ „ $f(x) = ax + 1$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

132. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = (x-3)(y-3) + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
a) Să se arate că $(x+3) \perp \left(\dfrac{1}{x} + 3\right) = 4$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.
b) Să se arate că legea „$\perp$” are element neutru.
c) Să se determine elementele simetrizabile ale mulţimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\perp$”.

Scanned with OKEN Scanner

133. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulţimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)\left|\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x}\end{pmatrix}\right.\right\}$ şi matricele $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $I_2\in G$ şi $O_2\in G$.

b) Să se arate că dacă $A,B\in G$, atunci $A+B\in G$.

c) Să se verifice că mulţimea G împreună cu operaţia de adunare a matricelor este grup comutativ.

134. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

a) Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulţirea din inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

b) Se consideră S suma soluţiilor ecuaţiei $\hat{2}x+\hat{1}=\hat{5}$ şi P produsul soluţiilor ecuaţiei $x^2=x$, unde $x\in\mathbb{Z}_6$. Să se calculeze $S+P$.

c) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^3=\hat{0}$.

135. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=xy+3x+ay+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$” să fie comutativă.

b) Să se arate că pentru $a=3$ şi $b=6$ legea „$*$” admite element neutru.

c) Să se determine a şi b astfel încât $(-3)*x=-3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

136. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+4x+4y+12$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x\circ(-4)\circ y=-4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $1\circ(-2)\circ 3\circ(-4)\circ\ldots\circ 2007\circ(-2008)$.

137. Se consideră matricea $A_x=\begin{pmatrix}2008^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}$, pentru $x\in\mathbb{R}$ şi mulţimea $G=\{A_x\mid x\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $I_3\in G$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $G=\{A_x\mid x\in\mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

Scanned with OKEN Scanner

138. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x \circ y = x + y - 14$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $x \circ x = 2$.

b) Să se demonstreze că legea "$\circ$" este asociativă.

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup comutativ.

139. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - 10(x+y) + 110$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x-10)(y-10) + 10$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $C_{10}^1 \circ C_{20}^1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $x \circ (x-1) = 10$, unde $x \in \mathbb{R}$.

140. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimile $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$ şi $G = \{X \mid X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AX = XA\}$.

a) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}$ atunci $\det X \neq 0$.

b) Să se arate că dacă $X \in G$ atunci există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

c) Să se arate că G este grup comutativ în raport cu adunarea matricelor.

141. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}, x \in \mathbb{Z}_6$.

b) Să calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.

142. Se consideră mulţimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G, \cdot)$.

c) Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(x) = A_x$ este morfism de grupuri.

143. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie definită astfel $x * y = xy - x - y + 2$.

a) Să se demonstreze că $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

c) Să se calculeze $\frac{\sqrt{1}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \ldots * \frac{\sqrt{2008}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

144. Se defineşte pe mulţimea numerelor reale legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x*y=(x-6)(y-6)+6$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x*x*x*x=x$.

c) Să se calculeze $1*2*3*...*2008$.

145. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-\sqrt{2008}(x+y)+2008+\sqrt{2008}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x*y=(x-\sqrt{2008})(y-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$" pe mulţimea $\mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie „$*$" este asociativă, să se calculeze $(-\sqrt{2008})*(-\sqrt{2007})*...*0*...*(\sqrt{2007})*(\sqrt{2008})$.

146. În mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_8)$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{3}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{5}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{2}&\hat{3}&\hat{0}\\\hat{3}&\hat{7}&\hat{5}\end{pmatrix}$,

$I_3=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$. Se notează $X^2=X\cdot X$, pentru $\forall X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_8)$.

a) Să se arate că $A^2=I_3$.

b) Să se rezolve ecuaţia matricială $A\cdot X=I_3$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_8)$.

c) Să se calculeze $(B-A)^2$.

147. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3xy+7x+7y+14$.

a) Să se determine elementul neutru al legii „$*$".

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x*x\le-\frac{7}{3}$

c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea „$*$".

148. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

a) Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine perechile $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pentru care $(x^2-5)\circ(y^2-10)=-1$.

c) Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$, astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

149. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+2$ şi respectiv $x\circ y=xy+2x+2y+2$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se demonstreze că $x \circ y = (x+2)(y+2)-2$.

b) Să se determine elementele neutre ale fiecăreia dintre cele două legi de compoziţie.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 * y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$.

150. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = 2xy - 8x - 8y + 36$.

a) Să se demonstreze că $x \circ y = 2(x-4)(y-4)+4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $x \circ x = 36$.

c) Ştiind că operaţia "$\circ$" este asociativă să se calculeze $\sqrt{1} \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2008}$.

151. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie prin $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

a) Să se demonstreze că $x * y = 3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine perechile $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $(x^2-2) * (y^2-5) = -1$.

c) Ştiind că legea de compoziţie este asociativă să se calculeze $(-2008) * (-2007) * \ldots * (-1) * 0 * 1 * \ldots * 2007 * 2008$.

152. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziţie $x \circ y = x + y + 3$ şi $x * y = xy - 3(x+y) + 12$

a) Să se verifice că $x * y = (x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x \circ (x+1)) + (x * (x+1)) = 11$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x \circ (y-1) = 0 \\ (x+1) * y = x * (y+1) \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2.6. POLINOAME

153. Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$ şi $g = X^2 + 2X - 24$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f şi $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$ să fie egale.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.

154. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(X) = (X+1)^{2008} - (X-1)^{2008}$ care are forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + a_{2007}X^{2007} + \cdots + a_1 X + a_0$.

a) Să se determine a_0.

b) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr întreg par.

c) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

Scanned with OKEN Scanner

155. Se consideră polinomul $f=(1+X+X^2)^{1004}$, cu forma algebrică $f=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_{2008}X^{2008}$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se arate că $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2008}$ este un număr întreg impar.

c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2-1.

156. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^3\right)^{669}\in\mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică $f=a_{2007}X^{2007}+\ldots+a_1X+a_0$.

a) Să se calculeze $f(1)+f(-1)$.

b) Să se arate că suma $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$ este un număr divizibil cu 3.

c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la X^2-1.

157.a) Să se determine gradul polinomului $f\in\mathbb{Z}_6[x], f=\left(a^3+\hat{5}a\right)X^2+\hat{2}aX+\hat{4}$, în funcţie de valorile lui $a\in\mathbb{Z}_6$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{1}$ prin polinomul $g\in\mathbb{Z}_3[X], g=X+\hat{1}$.

c) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_3$, ştiind că polinomul $f\in\mathbb{Z}_3[X]$ $f=X^2+aX+b$ are rădăcinile $\hat{1}$ şi $\hat{2}$.

158. Se consideră polinomul $f=(X+1)^{2008}+(X-1)^{2008}$ având forma algebrică $f=a_{2008}X^{2008}+\cdots+a_1X+a_0$, unde $a_0,a_1,\ldots,a_{2008}$ sunt numere reale.

a) Să se calculeze $f(-1)+f(1)$.

b) Să se determine suma coeficienţilor polinomului f.

c) Să se determine restul împărţirii lui f la X^2-1.

159. Se consideră mulţimea $H=\left\{a+bX+cX^2\middle|a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$ şi polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_2[X], f=X^2+\hat{1}$ şi $g=X+\hat{1}$.

a) Să se verifice că $g^2=f$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f+g$ la polinomul f.

c) Să se determine numărul elementelor mulţimii H.

160. Fie polinoamele $f=X^3+aX^2+X+\hat{1}$ şi $g=X+\hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

c) Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuaţia $f(x)=\hat{0}$.

Scanned with OKEN Scanner

161. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X], f = (3\hat{a}+3\hat{b})X^2 + \hat{2}X + \hat{2}a + \hat{3}b$ şi $g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}a + \hat{2}b$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$, astfel încât cele două polinoame să fie egale.

b) Pentru $a = b = \hat{2}$, să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$.

c) Pentru $a = b = \hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

162. Se consideră polinoamele $f = (X+1)^{2008} + (X-1)^{2008}$ şi $g = X+1$. Polinomul f are forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + a_{2007}X^{2007} + \cdots + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, \ldots, a_{2008} \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a_0.

b) Să se calculeze restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

163. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X], f = (X-1)^{10} + (X-2)^{10}$ şi $g = X^2 - 3X + 2$.

a) Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

164. Se consideră polinoamele $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$ şi $g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

b) Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{Z}_5$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

c) Să se determine câtul împărţirii polinomului f la polinomul g.

165. Se consideră inelul polinoamelor $\mathbb{Z}_3[X]$.

a) Pentru $g \in \mathbb{Z}_3[X], g = (X+\hat{2})^2(X+\hat{1})$, să se calculeze $g(\hat{0})$.

b) Dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 + \hat{2}X$, să se arate că $f(x) = \hat{0}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}_3$.

c) Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 şi pentru care $h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2})$.

166. Se consideră mulţimea $M = \{f \in \mathbb{Z}_3[x] \mid f = x^2 + ax + b\}$

a) Să se calculeze $f(\hat{1})$ pentru $a = b = \hat{1}$.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$ pentru care $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$.

c) Să se determine numărul elementelor mulţimii M.

167. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$, $g = X^2 + \hat{2}X$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0})$.

b) Să se verifice că $f = (\hat{3}X + \hat{3}) \cdot g + \hat{2}X + \hat{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

168. În mulţimea polinoamelor $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^3 + mX^2 + nX + 6$ şi $g(X) = X^2 - X - 2$.

a) Să se rezolve ecuaţia $x^2 - x - 2 = 0$.

b) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g.

c) Pentru $m = -4$ şi $n = 1$ să se calculeze produsul $P = f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(2007) \cdot f(2008)$.

169. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se demonstreze că $f = X \cdot g + 1$.

b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g.

c) Să se calculeze $f(a)$, ştiind că a este o rădăcină a polinomului g

170. Se consideră polinoamele cu coeficienţi raţionali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ şi $g = X^3 + X - 2$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a = -3$ şi $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.

171. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $c = 501$, să se demonstreze că $f(1) + f(-1) = 1004$.

b) Pentru $a = -2$, $b = 2$ şi $c = -1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienţilor a, b, c astfel ca f să se dividă cu polinomul $g = X^3 - X$.

172. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 1$.

b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(3^x) = 0$.

173. Se consideră polinomul cu coeficienţi raţionali $f = X^3 + aX^2 - 5X + 14$ şi suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \in \mathbb{N}^*$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

a) Să se determine numărul raţional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = 2$.

b) Pentru $a = -4$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$

c) Pentru $a = -4$ să se demonstreze egalitatea $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$.

Scanned with OKEN Scanner

174. În mulţimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - X - 1$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $y^3 = 2y + 1$.

c) Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $f(y)$ nu este număr raţional.

175. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$ care are coeficienţi reali.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1$.

b) Pentru $m = -9$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

c) Pentru $m = -9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

176. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + (a+3)X^2 + 6X - 4$ care are coeficienţii reali şi rădăcinile lui $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X - \sqrt{2}$.

c) Pentru $a = -3$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

177. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+1)X^2 - 3X + 3$, $f \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

b) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$.

c) Pentru $m = 0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

178. Fie polinomul $f_a = X^3 + aX^2 - aX - 4$ care are coeficienţii numere reale.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f_a.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f_a să fie divizibil cu polinomul $(X^2 - 2)$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f_a are o rădăcină raţională pozitivă.

179. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine a ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

180. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

Scanned with OKEN Scanner

c) Pentru $m=-5$ să se rezolve ecuaţia $f(x)=0$.

181. Se consideră polinomul $f=(X^2-2X+1)^2-a^2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Ştiind că $a=0$ să se determine soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$.

b) Să se verifice că $f=(X^2-2X+1+a)(X^2-2X+1-a)$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

182. Se consideră ecuaţia $x^4-ax^3-ax+1=0$ cu soluţiile x_1,x_2,x_3,x_4, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=5$.

b) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei, pentru $a=1$.

c) Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuaţia admite cel puţin o soluţie număr întreg.

183. Se consideră polinomul $f=X^4-12X^2+35\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se arate că $f=\left(X^2-6\right)^2-1$.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

184. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+n$, unde $m,n\in\mathbb{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1,x_2,x_3,x_4.

a) Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite rădăcinile $x_1=0$ şi $x_2=1$.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relaţia $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2$.

c) Pentru $m=1$ şi $n=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

185. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=c=1$ şi $b=-1$ să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2+1.

b) Să se determine numerele a,b,c ştiind că restul împărţirii polinomului f la X^2+1 este X, iar restul împărţirii polinomului f la $X-1$ este -1.

c) Să se demonstreze că dacă $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

186. Se consideră polinomul $f=X^4+2X^3+aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4.

a) Să se calculeze suma $x_1+x_2+x_3+x_4$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că $a=-1$, $b=-2$ şi $c=0$.

c) Ştiind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b=a-1$.

Scanned with OKEN Scanner

187. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-3x+2=0$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

b) Să se arate că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

188. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-2x=0$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

b) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

189. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+aX+b$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, unde $a,b \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$ şi $b=0$ să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, să se arate că $a=1$.

c) Ştiind că $f=(X-x_1^2)(X-x_2^2)(X-x_3^2)$, să se determine numerele reale a şi b.

190. În mulţimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+pX^2+1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi $p \in \mathbb{R}$.

a) Să calculeze $f(-p)$.

b) Să se determine $p \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $x-1$.

c) Să se calculeze în funcţie de $p \in \mathbb{R}$ suma $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

191. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2 \end{cases}$.

a) Să calculeze $x_1x_2x_3$.

b) Să se determine $a,b,c \in \mathbb{R}$, ştiind că ecuaţia $x^3+ax^2+bx+c=0$ are soluţiile x_1, x_2, x_3.

c) Să se determine soluţiile sistemului.

192. În inelul $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=x^3-x-5$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care restul împărţirii polinomului f la $X-a$ să fie -5.

c) Să se arate că valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr întreg.

193. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + 1$, $m \in \mathbb{R}$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Se defineşte $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine numărul real m astfel încât $x_1 = 2$.

b) Să se arate că $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

c) Să se arate că pentru orice număr par $m \in \mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raţionale.

194. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - pX^2 + qX - r$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(0) - f(1)$.

b) Să se calculeze expresia $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ în funcţie de p, q, r.

c) Să se arate că polinomul $g = X^3 + X^2 + X - 1$ nu are toate rădăcinile reale.

195. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze diferenţa $S - S'$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ şi $S' = y_1 + y_2$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la g.

c) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

196. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g = X^2 - 1$.

b) Să se calculeze produsul $S \cdot P$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.

c) Să se calculeze suma $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

197. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 3X + a$ şi $g(x) = X^2 - 3X + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 2$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = g(x)$.

b) Să se determine rădăcinile lui f, ştiind că are o rădăcină dublă pozitivă.

c) Pentru $a = 2$ să se rezolve inecuaţia $e^{f(x)} \leq g\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

198. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine numărul real c ştiind că $f(1)+f(-1)=2a+1$.

b) Ştiind că $a=-3$, $b=1$, $c=1$, să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se exprime în funcţie de numerele reale a,b,c determinantul $D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

199. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real c ştiind că $f(1)+f(-1)=2008$.

b) Să se determine numerele reale a,b,c ştiind că $f(0)=f(1)=-2$ şi că una dintre rădăcinile polinomului este $x=2$.

c) Pentru $a=-2$, $b=1$ şi $c=-2$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

200. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_6[X], f=X^3+\left(\hat{2}a+\hat{1}\right)X+a+\hat{4}$.

a) Să se demonstreze că $b^3=b$, oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}_6$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_6$, ştiind că $f\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$.

c) Pentru $a=\hat{2}$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Z}_6[X]$.

Scanned with OKEN Scanner

3.1. LIMITE DE FUNCȚII

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{+x}-e^{-x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+\cdots+g(2008)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f'(x)-f''(x)$ și f'' reprezintă derivata a doua a funcției f.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

c) Să se determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^x\right)+f\left(e^{x^2}\right)+\cdots+f\left(e^{x^{2008}}\right)}{x^{2008}}$.

4. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+18x+12$.

c) Să se determine semnul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x^2-1)\ln x$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x-1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f''(x)}$.

c) Utilizând faptul că $e^x\ge x+1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ să se demonstreze inegalitatea $\frac{e^{n+1}-e}{e-1}\ge\frac{n\cdot(n+3)}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

6. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+4$ și $g(x)=x^3-5x^2+8x-4$.

a) Să se calculeze $f'(x)-g'(x), x\in\mathbb{R}$

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0;+\infty)$.

7. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

8. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+\dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

9. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcţiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=\ln x$ şi $f_n(x)=f_{n-1}'(x)$.

a) Să se determine funcţia f_1.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f_2.

c) Să se arate că $f_0(x)\leq\dfrac{1}{f_1(x)}-1$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x)\leq 1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

11. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2007})\leq f(\sqrt[3]{2008})$.

12. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(2007)>f(2008)$.

3.2. FUNCŢII CONTINUE. FUNCŢII DERIVABILE

13. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

14. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$.

15. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$

b) Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi crescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

16. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2008}-2008(x-1)-1$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se arate că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

17. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

c) Să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2$ pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

18. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\setminus\{e\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

a) Să se calculeze $f(1)+f\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$, $\forall x\in(0,\infty)\setminus\{e\}$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

19. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=e^x(ax^2+bx+c)$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ pentru $a=1, b=c=0$.

b) Să se verifice că $f'(0)-f(0)=b$.

c) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(0)=0, f'(0)=1$ şi $f''(0)=4$.

20. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\geq 1\\ -x^2+x, & x<1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze $f'(0)+f'(2)$.

c) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$.

21. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 f'(x)$.

22. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x-2\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq \ln\dfrac{e^2}{4}$, $x\in(0,+\infty)$.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x>-1$

24. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=e^x-x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $f(x)\geq 1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

25. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $f'(e)$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $x^e \le e^x$ pentru orice $x > 0$.

26. Se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin $f_0(x) = e^{-x} - 1$ şi $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $f_1(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcţiei f_0.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_2(x)+x-1}{x^2}$.

27. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este descrescătoare pe $(0,2]$.

c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \le 3e^{\sqrt{2}}$.

28. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \ge 0 \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă -1.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)+1}{x^2+x}$.

29. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$.

a) Să se verifice că $f'(x) = 4x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

c) Să se demonstreze că $f'(x) \le e^{4x} - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

30. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + x^2$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Să se demonstreze că funcţia f nu are asimptotă către $+\infty$.

c) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$

31. Se consideră funcţia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Să se demonstreze $0 < f(x) \le \dfrac{1}{2e}$ pentru orice $x \in \left[\sqrt{e}, +\infty\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

32. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se demonstreze că funcţia f admite două puncte de extrem.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

33. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-e\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

34. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in[0,1]$.

b) Să se verifice că $f(0)+f'(0)=\dfrac{3}{4}$.

c) Să se demonstreze că $\dfrac{3}{e}\le\dfrac{1}{f(x)}\le 2, \forall x\in[0,1]$.

35. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcţiei f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$.

36. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $\ln\sqrt{x}\le\dfrac{x^2-1}{4}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

37. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=e^x-x-1$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se arate că $e^{2008}-1\ge 1004\cdot 2009\cdot(e-1)$.

38. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se studieze monotonia funcţiei f.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei f.

39. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}\cdot e^x-1, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$

b) Să se determine ecuaţia asimpotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că funcţia f este concavă pe $(1,+\infty)$.

40. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln x$.

a) Să se arate că $f(1)-f'(1)=1$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

41. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+e^x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$.

42. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x$.

a) Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x\ln x}$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\ge -\dfrac{1}{2e}$, pentru orice $x>0$.

43. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

b) Să determine $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că funcţia f' este crescătoare pe $(0;+\infty)$.

44. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

a) Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$, $\forall x>0$.

b) Să se arate că $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

45. Se consideră funcţia $f:[1;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

a) Să calculeze $f'(x), x\in[1,\infty)$.

b) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe $[1;2]$.

c) Folosind faptul că $1\le x\le x^2\le 2$, oricare ar fi $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2-x\le 2\ln x$, pentru orice $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]$.

46. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.

a) Să se arate că $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\neq 1$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că pentru orice $a<1$ şi $b>1$ are loc inegalitatea $f(a)-f(b)\le -8$

47. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$ şi $g(x)=xe^x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=g(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei g.

c) Dacă $I\subset\mathbb{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcţia g este crescătoare pe I dacă şi numai dacă funcţia f este convexă pe I.

48. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$.

a) Să se verifice că $f'(0)=1$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{e^x}$.

49. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Să se arate că $f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ avem $\frac{2}{3}\le f(x)+f(x^2)\le 4$.

50. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2008}+2008^x$.

a) Să se determine $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$.

51. Fie funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(1,\infty)$.

b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

c) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

52. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-x+1$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

c) Să se rezolve în $(0,+\infty)$ ecuaţia $f(x^{2008})+f\left(\dfrac{1}{x^{2008}}\right)=0$.

53. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Ştiind că $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ este funcţia definită prin $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+g(x^2)+g(x^3)\ldots+g(x^{2008})+x^{2010}}{x^{2009}}$.

54. Se consideră funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}$.

a) Să se verifice că $f(1)+f(e)=\dfrac{2e}{1+e}$.

b) Să se arate că $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=\dfrac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}$.

55. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=(x^2-3x-3)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că tangenta la graficul funcţiei f, dusă în punctul de coordonate $(x_0,f(x_0))$, unde $x_0=-2$, este paralelă cu axa Ox.

Scanned with OKEN Scanner

56. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x\in(0,2]$ este adevărată inegalitatea $\sqrt{x}\cdot f'(x)\le f(x)$.

57. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\left(x^2+2x+3\right)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

58. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\dfrac{1}{e^x}$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

b) Să se arate că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că panta tangentei în orice punct la graficul funcției f este mai mare decât 1.

59. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1-\dfrac{2e^x}{x+e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $-1\le f(x)\le\dfrac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

60. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, & x\ge 0\\ e^x, & x<0\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(0;+\infty)$.

61. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax-6, x<4\\ \sqrt{x}, x\ge 4\end{cases}$, unde a este parametru real.

a) Să se determine valoarea reală a lui a, astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=4$.

b) Să se calculeze $f'(9)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(9,3)$.

62. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $(0,\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

63. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x\le 1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$.

a) Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((f(x)-1)\cdot x\right)$.

64. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ex-1$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine coordonatele punctului de intersecţie dintre tangenta la graficul funcţiei f în punctul $O(0;0)$ şi dreapta de ecuaţie $x=1$.

65. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $\sqrt{x}\ge 1+\ln\sqrt{x}$, oricare ar fi $x\in(0;+\infty)$.

66. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

c) Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

67. a) Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-x+1, x<1\\ 2x-1, x\ge 1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze derivata funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-15x^2+24x-1$.

c) Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=32$.

68. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x-x\ln 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Enunţuri

a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

c) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

69. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

70. Se consideră funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in[1,+\infty)$.

b) Să se studieze monotonia funcţiei f pe $[1,+\infty)$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,e)$.

71. Se consideră funcţiile $f,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ şi $h(x)=f^2(x)$.

a) Să se verifice că $h'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\geq 0$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că funcţia h este crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

72. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $f(x)+f(x^3)\geq -2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

73. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+2}, & x\geq 0\\ x+\dfrac{3}{2}, & x<0\end{cases}$

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f punctul $x_0=0$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2},2\right)$, oricare ar fi $x\in[0,\infty)$.

74. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0,+\infty)$.

b) Să se arate că funcţia f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Să se determine coordonatele punctului, care aparţine graficului funcţiei f, în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{2}$.

75. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

76. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3}{x^2+1}, x\le 1\\ \frac{2x+a}{x^2+2}, x>1\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real a astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se determine numărul real a astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $x_0=2$ să fie egală cu 1.

77. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)(x-2)$ şi $h(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

a) Să se demonstreze că $h(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $h'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

c) Să se demonstreze că $\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{h'(x)}{h(x)}+\frac{f'(x)}{f(x)}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1,\frac{3}{2},2\right\}$.

78. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}, & x\le 0\\ -2x+1, & x>0\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=0$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este crescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$.

c) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

79. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)\ln x$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

80. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+3^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

81. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ avem $f\left(e^x+1\right)\geq 4$.

82. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se arate că $f(x)\geq -1$, pentru orice $x>0$.

83. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se demonstreze că $x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\geq 3$, pentru orice $x>0$.

84. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

85. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{e}$ pentru orice $x \leq 2$.

86. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

b) Să determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $(0,+\infty)$.

87. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = e$.

c) Să se arate că $\ln x \leq \frac{x}{e}$, pentru orice $x > 0$.

88. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x\ln x - x$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \ln x$ pentru orice $x > 0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

c) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe $(0,+\infty)$.

89. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x) \leq 3$, pentru orice $x \leq 2$.

90. Fie funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se determine intervalele de concavitate şi de convexitate ale funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \geq -\frac{1}{2}$.

91. Fie funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

c) Să se arate că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$, pentru orice $x > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

92. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ pentru orice $x>0$.

b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $e^x\geq ex$ pentru orice $x>0$.

93. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+1)e^x-1$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$.

c) Să se arate că $x\cdot f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

94. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=(x+1)\cdot e^x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

95. Se consideră funcţia $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2}\right)\geq f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

96. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2007}\right)\leq f\left(\sqrt[3]{2008}\right)$.

97. Se consideră funcţia $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=2$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq e^2$, pentru orice $x>1$.

Scanned with OKEN Scanner

98. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se arate că $\frac{x+2}{3}\geq\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x>0$.

99. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $(0;+\infty)$.

3.3. PRIMITIVE. INTEGRALE DEFINITE

100. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f_0(x)=e^x$ şi $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $f_1(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf_0(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $f_2'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

101. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$.

a) Să se calculeze $\int_1^e\left(f(x)-\frac{\ln x}{x}\right)dx$.

b) Să se verifice că $\int_1^e f(x)dx=\frac{e^2}{2}$.

c) Să se determine raţia progresiei aritmetice având termenul general

$I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-x)dx, n\geq 1$.

102. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=e^x$ şi $g(x)=\frac{1}{x}$.

a) Să se calculeze primitivele funcţiei $f+g$.

b) Să se arate $\int_1^2(f^2(x)+g^2(x))dx=\frac{e^4-e^2+1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Folosind eventual faptul că $2ab \le a^2+b^2$, pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x}dx \le \frac{e^4-e^2+1}{4}$.

103. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite prin $f_m(x) = m^2x^2 + (m^2-m+1)x+1$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\int f_1(x)dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x)dx$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x)dx = \frac{3}{2}$.

104. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e x\left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$.

b) Să se arate că primitivele funcţiei f sunt funcţii crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Să se verifice că $\int_1^2 f'(x)f(x)dx = -\frac{22}{81}$.

105. Se consideră integralele $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se determine I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

106. Se consideră funcţiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = e^{-x}$ şi $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Să se arate că $F(x) = -f(x)+1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = F(x) - f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t^2)dt$.

107. Se consideră funcţiile $f, F : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, date prin $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ şi $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f, care se anulează în $x=1$.

b) Să se calculeze $\int_1^2 f(e^x)dx$.

c) Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt = f(1)$.

Scanned with OKEN Scanner

108. Se consideră integralele $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se determine I_1.

c) Să se arate că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e\left(2^{n+1}e - 1\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

109. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ unde $m, n, p \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $m = 0, n = -3, p = 2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ ştiind că $f'(-1) = f'(1) = 0$ şi că $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t)dt$.

110. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = xe^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x)dx = 2e - 1$, unde f'' este derivata a doua a funcţiei f.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx$.

111. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{1004} + 2008^x$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este o funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x^2)dx$.

112. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 \left(x^2 + 1\right) f(x)dx$.

b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx = \ln(2e)$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)}dx = e(e-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

113. Se consideră integralele $I=\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx$ şi $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{x+1}dx$.

a) Să se verifice că $I+J=e-1$.

b) Utilizând inegalitatea $e^x \geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $J\geq\frac{1}{2}$.

c) Folosind eventual, metoda integrării prin părţi să se demonstreze că

$I=\frac{e-2}{2}+\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$.

114. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin

$f(x)=e^x+3x^2+2$ şi $F(x)=e^x+x^3+2x-1$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 \left(xf(x)+F(x)\right)dx=F(1)$.

115. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ e^x+1, & x\geq 0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 xf(x^2)dx=\frac{e}{2}$.

116. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=\ln(x^2+1)$ şi $g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

a) Să se arate că $\int_0^1 f'(x)dx=\ln 2$.

b) Să se demonstreze că $\int g(x)dx=f(x)+C$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)}dx$.

117. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{x}$ şi $g(x)=\frac{1}{4}\cdot\ln x$.

a) Să se arate că $\int_1^4 f(x)dx=\ln 4+2$.

b) Utilizând metoda integrării prin părţi să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)dx=\ln 4-\frac{3}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se arate că există un punct $x_0 \in (1,4)$ astfel încât $g(x_0) < f(x_0)$.

118. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx = e-\frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

c) Să se arate că dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f, atunci

$$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x}dx = F(2)-F(1).$$

119. Se consideră funcţiile $f,g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ şi $g(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

a) Să se arate că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)dx$.

c) Să se rezolve în $[1,+\infty)$ ecuaţia $\int_1^a f(x)dx = 2$.

120. Se consideră funcţia $f:\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

a) Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

b) Să se calculeze $\int_1^5 \sqrt{2x-1}dx$.

c) Ştiind că $F:\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=\frac{2x-1}{3}\sqrt{2x-1}$

este o primitivă a lui f, să se arate că $\int_1^5 f(x)\cdot F^{2008}(x)dx = \frac{3^{6027}-1}{2009\cdot 3^{2009}}$

121. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n=\int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx$.

a) Să arate că $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

122. Se consideră integralele $I_n=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n(x^2+1)}dx$, unde $n\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se verifice că $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

b) Utilizând identitatea $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, adevărată pentru orice $x \neq 0$, să se determine I_1.

c) Să se arate că $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}}\right)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

123. Se consideră funcţiile f, $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ şi $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2}{2x}$.

a) Să se arate că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Să se calculeze $\int_1^4 f(x)\cdot g(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)dx = -1$,

unde f'' este derivata a doua a funcţiei f.

124. Se consideră funcţiile f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ şi $g(x)=x$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx = e-1$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f\left(x^n\right)\cdot g^{2n-1}(x)dx = \frac{e-1}{2n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

125. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ \frac{1}{x+1}-\sqrt{x}, & x\geq 0 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-xf\left(x^2\right)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.

126. Se consideră funcţia $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

a) Să se determine funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât funcţia F să fie o primitivă pentru funcţia f.

b) Să se demonstreze că funcţia F este descrescătoare pe $[0,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se demonstreze că $\frac{1}{6} \le \int_0^1 F(x)dx \le \frac{1}{2}$.

127. Se consideră funcţiile $f, g:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x+1}, g(x) = f''(x)$.

a) Să se calculeze $\int_0^2 (x+1) f(x)\,dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x)\,dx$.

c) Să se determine primitiva funcţiei g a cărei asimptotă spre $+\infty$ este dreapta de ecuaţie $y = 2x$.

128. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx$, unde a, b, c sunt numere reale şi funcţia $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f, atunci numerele $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

129. Pentru orice număr natural nenul n se consideră funcţiile $f_n:[0;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^x$ şi integralele $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 e^{-x} f_1(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_n + nI_{n-1} = e$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

130. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1 \\ 3x^2 + 1, & x \ge -1 \end{cases}$

a) Să se demonstreze că funcţia f admite primitive.

b) Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$.

c) Să se determine valoarea minimă a ariei suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = m$ şi $x = m+1$ cu $m > -1$.

Scanned with OKEN Scanner

Enunţuri

131. a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx$.

b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx \le 1$.

c) Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ şi numerele reale pozitive a,b şi c. Să se demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x)dx$, $\int_1^b f(x)dx$, $\int_1^c f(x)dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

132. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-2}, & x\in(-\infty;1]\\ \ln x-2, & x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 (x-2)f(x)dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x (f(t)+2)dt$.

133. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)^n, n\in\mathbb{Z}^*$.

a) Pentru $n=2$ să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

b) Pentru $n=-1$ să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^a f(x)dx=0$.

c) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f'(x)f(x)dx$.

134. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)dx$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx>\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

135. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

a) Să se verifice că $\int_1^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=e-1$

b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $1\le\int_0^1 f(x)dx\le e$.

136. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$.

a) Să se verifice că $\int_1^e f_1\left(\sqrt{x-1}\right)dx=1$.

b) Să se determine primitiva G a funcţiei $g(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$, pentru orice x real, care verifică relaţia $G(1)=\dfrac{13}{15}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_n(x)dx$, unde $n>1$.

137. Se consideră funcţia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=ax+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+1$ să fie o primitivă a funcţiei f_a.

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a^2(x)dx\ge\dfrac{1}{4}$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

138. Se consideră funcţiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ şi $F(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

a) Să se verifice că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot\ln x dx$.

Scanned with OKEN Scanner

3.4. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

139. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$.

a) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

b) Folosind faptul că $x+e^{-x^2}\geq 1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2}dx\geq\frac{2}{3}$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f(-x)$.

140. Se consideră funcțiile $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ de forma $f_n(x)=e^{-x}x^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x)dx$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f_1(t)\,dt=1$.

c) Să se demonstreze că $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N},n\geq 2$.

141. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^{x+1}, & x\leq -1\\ 2+x, & x>-1\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x),x\in[0,2]$.

c) Să se calculeze $\int_{-2}^0 xf(x)dx$.

142. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $I_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $I_0(x)=1$ și $I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)dt$.

a) Să se calculeze $I_1(x)$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției I_2, axa Ox.

c) Să se demonstreze că $I_0(x)+I_1(x)+I_2(x)\leq e^x$ pentru oricare $x\in[0,+\infty)$.

143. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=xe^x$ și $F(x)=(x-1)e^x$

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^x\frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$ pentru orice $x>1$.

Scanned with OKEN Scanner

144 Se consideră funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x g(t-1)dt}{x^4}$.

c) Să se calculeze $\int_{-1}^1 g^5(x)dx$.

145 a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

c) Să se determine numărul real $a\in(1,e^2)$ astfel încât aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox, dreptele de ecuaţii $x=a$ şi $x=e^2$ să fie egală cu $\ln\dfrac{3}{2}$.

146. Se consideră integralele $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n+1}{x+1}dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Folosind eventual faptul că $0\le x^2\le x$, pentru orice $x\in[0,1]$, să se demonstreze că $I_2\le I_1$.

c) Să se demonstreze că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}+2\ln 2$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

147. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln^n x}{x}dx$.

a) Să se verifice că $I_0=1$.

b) Să se determine I_1.

c) Folosind eventual faptul că $1\le\ln x\le 2, \forall x\in\left[e,e^2\right]$, să se demonstreze că

$$1\le\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\le 2^n, \forall n\in\mathbb{N}.$$

148. Se consideră funcţia $f:[-4,4]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x)dx$.

b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\dfrac{x}{f(x)}dx=0$.

c) Utilizând eventual inegalitatea $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$, cu $a,b\in(0,+\infty)$, să se demonstreze că

Scanned with OKEN Scanner

$0 \le \int_0^m f(x)dx \le 8$, oricare $m \in [0,2]$.

149. Se consideră funcţia $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^x \sqrt{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} dx = e-1$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{-x} f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f.

150. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \ln x - x$

a) Să se calculeze $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcţiei f este concavă pe intervalul $(1,+\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $h:[1,e] \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) + x$, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=e$.

151. Se consideră funcţiile $I_n:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $I_0(x) = e^x$ şi $I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t)dt$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $I_1(1)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{I_2(x)}{x+1}$.

c) Să se demonstreze că $I_2(x) \ge 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

152. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3^x + 3^{-x}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = 3^{-x}$.

c) Să se arate că orice primitivă F a funcţiei f este concavă pe $(-\infty,0]$ şi convexă pe $[0,+\infty)$.

153. Se consideră funcţia $f:[2,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_2^x f(t)dt$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se determine $a>2$ astfel încât aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=2$ şi $x=a$ să fie egală cu $\ln 3$.

154. Pentru orice număr natural n se consideră integralele $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n\,dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Utilizând faptul că $(1+x)^n\le(1+x)^{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in[0,1]$, să se arate că $I_{2008}\ge I_{2007}$.

c) Folosind eventual identitatea $x(1+x)^n=(1+x)^{n+1}-(1+x)^n$, adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $I_n=\dfrac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

155. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=1+\ln x$ şi $g(x)=x\ln x$.

a) Să se arate că g este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

156. Se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ definite prin $f_1(x)=1-x$, $f_{n+1}(x)=f_n(x)+(-1)^{n+1}x^{n+1}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x)dx$.

b) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f_1.

c) Să se arate că $\int_0^1(x+1)f_{2008}(x)dx=\dfrac{2011}{2010}$.

157. Pentru orice număr natural nenul n se consideră integralele $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x+1}dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Utilizând eventual inegalitatea $\dfrac{x^n}{2}\le\dfrac{x^n}{x+1}\le x^n$, adevărată pentru orice $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}\le 2009\cdot I_{2008}\le 1$.

Scanned with OKEN Scanner

158. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=x^2+x\ln x$ şi $g(x)=2x+\ln x+1$.

a) Să se arate că f este o primitivă a funcţiei g.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

159. Se consideră integralele $I_n=\int_e^{e^2} x\ln^n x\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_n\le I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

c) Utilizând metoda integrării prin părţi să se demonstreze că are loc relaţia

$$I_n=\frac{e^2(e^2\cdot 2^n-1)}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1},\text{ pentru orice } n\in\mathbb{N}^*.$$

160. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\ge 1\\ -x+1, & x<1\end{cases}$.

a) Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{2}$.

b) Să se determine $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)dx=1$

c) Utilizând faptul că $e^x\ge 1$ pentru orice $x\ge 0$ să se calculeze $\int_0^1 xf(e^x)dx$.

161. Se consideră funcţiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{x}$ şi $F(x)=x-\ln x$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei F, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

162. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}$ şi $g(x)=\frac{1}{x}$.

a) Să se verifice că $\int_1^e g(x)dx=1$.

b) Folosind identitatea $f(x)=g(x)-\frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x>0$,

Scanned with OKEN Scanner

să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

c) Utilizând inegalitatea $f(x) \le \frac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x \in [1,e]$, să se arate că $\ln\frac{e^2+1}{2} \ge \frac{e+1}{e}$.

163. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obţinute prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficelor funcţiilor $g,h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ şi $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt egale.

164. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2+2x$ şi $F(x)=e^x+\frac{x^3}{3}+x^2+1$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

165. Pentru oricare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcţiile $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ şi $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $f_1(x)$, unde $x\in[0,\infty)$.

b) Să se demonstreze că $f_0(x)+f_1(2x)\le e^{2x}$, pentru oricare $x\in[0,\infty)$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f_2(x), x\in[0,1]$.

166. Se consideră funcţiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m^2x^2+mx+1$, unde $m\in\mathbb{R}^*$.

a) Să se demonstreze că primitivele funcţiilor f_m sunt funcţii crescătoare, pentru orice $m\in\mathbb{R}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se calculeze $\int_0^1 (f_1(x) - x^2 - 1)e^x dx$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_m, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 1$ are valoare minimă.

167. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\int_0^x \left(t^2 + t + 1\right) dt}{x^3 + 1}$.

b) Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Să se determine primitiva $F : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ a funcției f, care verifică relația $F(1) = 0$.

c) Să se determine numărul real pozitiv a știind că volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ este egal cu 5π.

168. Se consideră funcțiile $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \cdots + \dfrac{1}{x+n}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 f_0(x) dx$.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n, axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = 2$.

c) Știind că F este o primitivă a funcției f_1, să se arate că funcția $G : [1,2] \to \mathbb{R}$, definită prin $G(x) = F(x) - \dfrac{5}{6}x$ este crescătoare.

169. a) Să se determine primitivele funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g : [1,e] \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$.

c) Să se calculeze $\int_1^3 \dfrac{1}{x \cdot (x+2)} dx$.

170. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $h : [0,2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se verifice că dacă $a>0$, atunci $\frac{1}{a+2}\le\int_a^{a+1} f(x)dx\le\frac{1}{a+1}$.

171. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+3}$.

a) Să se demonstreze că $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+1$ pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se determine numărul real pozitiv k astfel încât aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=k$ să fie egală cu $k+\ln k$.

172. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f(x)dx$.

c) Să se determine numărul real p astfel încât volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $h:[0;1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(px)$, pentru orice $x\in[0;1]$ să fie minim.

173. Se consideră funcţiile $f,F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$ şi $F(x)=e^x+x-\ln x$.

a) Să se demonstreze că funcţia F este o primitivă pentru funcţia f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 x(F(x)-x+\ln x)dx$.

c) Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$ să fie egală cu e^m-2.

174. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$.

a) Să se demonstreze că $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$, $\forall x\in[0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-f(x+1)-\frac{1}{x+1}$.

175. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$.

176. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2007}+x+1$.

a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[1,3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-x^{2007}-1$.

b) Să se determine primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f care verifică condiția $F(0)=1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2008}}$.

177. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{x^n+4}$.

a) Să se calculeze $\int (x+4)^2\cdot f_1(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf_2(x)dx$.

c) Să se arate că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_{2008}, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$ este un număr din intervalul $\left[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.

178. Se consideră funcțiile $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\cdot e^x$ și $f(x)=(x+1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 \dfrac{F(x)-f(x)}{e^x+1}dx$.

179. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$ și $g(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se calculeze $\int f(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$.

180. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int (x+1)f_2(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_1, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x)dx\le \ln 2$.

181. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{e^x}{e^{nx}+1}$.

a) Să se calculeze $\int f_0(x)dx$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_1, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx\le\int_0^1 f_n(x)dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

182. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^{x^n}$.

a) Să se determine $\int f_1(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_1(x)dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f_3(x)$.

183. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$, unde $x>0$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=f(x)$, $x\in[1,2]$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\ln x\,dx$.

184. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}$.

a) Să se calculeze $\int f^2(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Folosind eventual faptul că $\sqrt{x+2}\le\sqrt{3}$ pentru $x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2008}f(x)dx\le\frac{\sqrt{3}}{2009}$.

185. Se consideră funcţiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^x+e^{-x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$, $x\in[0,1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin $h(x)=xf(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei g.

186. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=1-\sqrt{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f.

c) Folosind eventual faptul că $\sqrt{x}\ge x$ pentru orice $x\in[0,1]$ să se arate că $\int_0^1 f^{2008}(x)dx\le\frac{1}{2009}$.

187. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+1$.

a) Să se determine $\int f_1(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{f_1(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1\sqrt{f_n(x)}dx\le\sqrt{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

188. Se consideră funcţiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^{1-x}$.

a) Să se calculeze $\int f(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=x\cdot f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}}(g(x)-f(x))dx\ge 0$.

189. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+(1-x)^n$.

a) Să se determine $\int f_2(x)dx$, $x\in[0,1]$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f_2(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_n(x)dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

190. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(2-x)^n$.

a) Să se determine $\int f_1(x)dx$, unde $x\in[0,2]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:[0,2]\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=f_1(x)\cdot e^x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=2$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f_5.

191. Fie funcţia $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{2}{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$, unde $x\in[1,2]$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f.

c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\cdot\ln x dx$.

192. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

a) Să se determine $\int(x+\sqrt{x})dx$, $x>0$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f_1.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_{2008}(x)dx\leq\frac{1}{2009}$.

193. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n+x+2}{x+1}$.

a) Să se determine $\int\left(\frac{1}{x}-3\sqrt{x}\right)dx$, $x>0$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)dx$.

c) Să se arate că aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_{2008} şi axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0, x=1$, este un număr din intervalul $[1+\ln 2;2]$.

194. Se consideră funcţiile $f,g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ şi $g(x)=\sqrt{1-x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$, unde $x\in[0;1]$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\cdot \ln x dx$.

195. Se consideră funcţia $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$, unde $x\in[0;1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=\frac{f^2(x)}{x^2+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $h:[0;1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot f(x)$, unde $x\in[0;1]$.

196. Fie funcţia $f:[1;e]\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\ln x$.

a) Să se determine $\int f'(x)dx$, pentru $x\in[1;e]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

c) Să se arate că $\int_{1}^{e} e^x f(x)dx \le e^e - e$.

197. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[1;4]\to\mathbb{R}$ definite prin $f_n(x)=\sqrt{x^n+4x}$.

a) Să se verifice dacă $\int_{1}^{4} f_1(x)dx=\frac{14\sqrt{5}}{3}$.

b) Să se calculeze $\int_{1}^{4}\frac{x+2}{f_2^2(x)}dx$.

c) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[1,4]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f_2(x)}$.

198. Se consideră funcţia $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int(x+1)\cdot f(x)dx$, unde $x\in[0;1]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Folosind faptul că $1 \le (x+1)^2 \le 4$ pentru orice $x \in [0;1]$, să se arate că volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f, este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}\right]$.

199. Se consideră funcţiile $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(x^{n+1} + 1\right) \cdot e^x$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine $\int f_0(x) \cdot e^{-x} dx$, unde $x \in [0;1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_1, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2007}(x)dx + \int_0^1 f_{2009}(x)dx \ge 2\int_0^1 f_{2008}(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

1.1. Mulţimea numerelor reale

1. Restul lui 2008 la 6 este 4. A 4-a cifră este 7.

2. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$, deci răspunsul e 0.

3. $\sqrt[3]{9}-\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{3}}=0.$

4. $\sqrt[3]{8}=2<\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16<64$.

5. $\sqrt{2}>1>\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, deci b < a.

6. Prin înlocuire directă se obţine $E\left(2+\sqrt{5}\right)=\left(2+\sqrt{5}\right)^2-4\left(2+\sqrt{5}\right)-1=0$.

7. Deoarece 1,3,5,...,21 sunt 11 termeni consecutivi în progresie aritmetică cu raţia egală cu 2, avem: $E=\sqrt{\frac{(1+21)\cdot 11}{2}}=\sqrt{\frac{22\cdot 11}{2}}=\sqrt{11^2}=11\in N.$

8. $\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2=6\in\mathbb{N}$

9. $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\in\mathbf{N}$.

10. $10-3n\geq 0\Rightarrow 3n\leq 10\Rightarrow \left.\begin{matrix} n\leq\frac{10}{3}\\ n\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}\Rightarrow n\in\{0,1,2,3\}$.

11. $(a-3)^2+(b+2)^2=0\Leftrightarrow a-3=0,b+2=0\Rightarrow a=3,b=-2$

12. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=16-6=10$.

13. $0!+1!+2!+3!=1+1+2+6=10$.

14. Ambii logaritmi sunt 3, deci diferenţa lor e 0.

15. $\log_6 24-\log_6 4=\log_6\frac{24}{4}=\log_6 6=1.$

16. $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4=\log_3\frac{6\cdot 2}{4}=\log_3 3=1.$

17. $2\log_3 4-4\log_3 2=4\log_3 2-4\log_3 2=0$

18. $\lg 20+\lg 3-\lg 6=1+\lg 2+\lg 3-\lg 2-\lg 3=1$.

19. $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6=\log_5 10\cdot 3-\log_5 6=\log_5\frac{30}{6}=\log_5 5=1$

20. $\log_5 25-\log_3 9=2-2=0$.

21. $\log_2 3-\log_2\frac{3}{2}=\log_2\frac{3}{\frac{3}{2}}=\log_2 2=1$.

Scanned with OKEN Scanner

22. $\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 9=\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 3^2=\log_2 3-\log_2 3=0$

23. $\log_3 5+\log_3 6-\log_3 10=\log_3\frac{5\cdot 6}{10}=\log_3 3=1$

24. Folosind proprietăţile logaritmilor:

$\log_6 3+\log_6 10-\log_6 5=\log_6\frac{3\cdot 10}{5}=\log_6 6=1$

25. $\log_2 4+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{8}=2+2-2=2$

26. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\log_5 25=8-2=6$

27. $\log_2\frac{1}{4}=-2=\sqrt[3]{-8}.$

28. Membrul stâng se mai scrie $\log_2\cdot\frac{14\cdot 3}{6}=\log_2 7.$

29. $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=\log_2(5\cdot 12)-\log_2 30=\log_2\frac{60}{30}=\log_2 2=1.$

30. $\frac{\log_5 18-\log_5 2}{\log_5 3}=\frac{\log_5 9}{\log_5 3}=\frac{2\log_5 3}{\log_5 3}=2.$

31. $\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\ldots+\log_3\frac{9}{8}=$

$=\log_3 2-\log_3 1+\log_3 3-\log_3 2+\ldots+\log_3 9-\log_3 8=\log_3 9=2$

32. Cele două numere date pot fi scrise $\log_2 2^4$ şi $\log_2 2^5$ .Dar $\log_2 2^4<\log_2 2^5$, deci $2^2<\log_2 32$.

33. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_2 8}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_2 8}=2^{\frac{1}{3}\log_2 2^3}=2^{\frac{1}{3}\cdot 3}=2.$

34. $\log_2 4+\log_3 9=2+2=4<\sqrt{36}=6$

35. $\log_3 24=\log_3\left(3\cdot 2^3\right)=\log_3 3+\log_3 2^3=1+3\cdot\log_3 2=1+3a.$

36. $\log_2 18=\log_2 3^2\cdot 2=\log_2 3^2+\log_2 2=2\log_2 3+1=2a+1.$

37. $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+\ldots+\lg\frac{9}{10}=\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}\right)=\lg\frac{1}{10}=-1$

38. Avem $\operatorname{tg}(45°)=1$, deci $\lg(\operatorname{tg}(45°))=0$. În consecinţă, produsul cerut este 0.

39. $\log_2 x+\log_2 y=\log_2(xy)$ Cum $tg45\cdot ctg45=1$ avem că suma din enunţ e $\log_2 1=0$.

40. Notăm cu $P(n)$ enunţul dat. Pentru $n=1$ obţinem propoziţia $P(1):1=1^2$ care este o propoziţie adevărată. Să demonstrăm acum implicaţia $P(k)\Rightarrow P(k+1),\ k\geq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

Presupunem că propoziţia $P(k): 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ este adevărată şi demonstrăm că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

Avem $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$, adică $P(k+1)$ este adevărată. Conform metodei inducţiei matematice, rezultă că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

În concluzie, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

41. Notăm cu $P(n)$ enunţul dat. Pentru $n=1$ obţinem propoziţia $P(1): \frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}$ care este o propoziţie adevărată. Să demonstrăm acum implicaţia $P(k)\Rightarrow P(k+1), k\geq 1$.

Presupunem că propoziţia $P(k): \frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$ este adevărată şi demonstrăm că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

Avem

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{k}{2}+\frac{k+1}{2k+3}\right)=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$, adică $P(k+1)$ este adevărată. Conform metodei inducţiei matematice, rezultă că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

În concluzie, $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

42. Notăm cu $P(n)$ enunţul dat. Pentru $n=1$ obţinem propoziţia $P(1): \frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ care este o propoziţie adevărată. Să demonstrăm acum implicaţia $P(k)\Rightarrow P(k+1), k\geq 1$.

Presupunem că propoziţia $P(k): \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ este adevărată şi demonstrăm că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

Avem $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$.

Dacă arătăm că $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+2}}, \forall k\geq 1$, atunci am obţine propoziţia $P(k+1)$ adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

Inegalitatea $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+2}}, \forall k \geq 1$ revine la a arăta că $\sqrt{2k+1} < \sqrt{2k+2}, \forall k \geq 1$, care este adevărată. Conform metodei inducţiei matematice, rezultă că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. În concluzie, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

43. Notăm cu $P(n)$ enunţul dat. Pentru $n=1$ obţinem propoziţia $P(1): \frac{1}{1} \geq \sqrt{1}$ care este o propoziţie adevărată. Să demonstrăm acum implicaţia $P(k) \Rightarrow P(k+1), k \geq 1$.

Presupunem că propoziţia $P(k): \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$ este adevărată şi demonstrăm că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

Avem $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Dacă arătăm că $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}, \forall k \geq 1$, atunci am obţine propoziţia $P(k+1)$ adevărată.

Inegalitatea $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}, \forall k \geq 1$ revine la a arăta că $\sqrt{k(k+1)} \geq k, \forall k \geq 1$, care este adevărată. Conform metodei inducţiei matematice, rezultă că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. În concluzie, $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

44. Notăm cu $P(n)$ enunţul dat. Pentru $n=0$ obţinem propoziţia $P(0): 6 \mid 0^3 + 5 \cdot 0$ care este o propoziţie adevărată. Să demonstrăm acum implicaţia $P(k) \Rightarrow P(k+1), k \geq 1$.

Presupunem că propoziţia $P(k): 6 \mid k^3 + 5k$ este adevărată şi demonstrăm că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată. Notăm $E(k) = k^3 + 5k$

Avem $E(k+1) = (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 = E(k) + 3k(k+1) + 6$, care este o sumă de trei termini care se divid cu 6. Prin urmare, propoziţia $P(k+1)$ este adevărată. Conform metodei inducţiei matematice, rezultă că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. În concluzie, $6 \mid n^3 + 5n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.2. Mulţimea numerelor complexe

45. $3(2i+1)-i(4-5i)=6i+3-4i-5=2i-2$.

46. $(1+2i)^2-3(1-i)=1+4i-4-3+3i=-6+7i$.

47. $z=\dfrac{i(2-3i)+(i-1)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{2i+3+2i-3-2-3i}{4+9}=\dfrac{i-2}{13}$. Prin urmare, $13z=i-2$.

48. $z=\dfrac{3-5i}{1+2i}=\dfrac{(3-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\dfrac{7}{5}-\dfrac{11}{5}i$, de unde rezultă că $\mathrm{Re}(z)=-\dfrac{7}{5}$.

49. Avem $|z|=\left|\dfrac{2i+1}{3i-2}\right|=\dfrac{|2i+1|}{|3i-2|}=\dfrac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{9+4}}=\dfrac{\sqrt{65}}{13}$.

50. Avem $z^2=(2+3i)^2=4+12i-9=-5+12i$ şi $\overline{z}=2-3i$. Atunci $z^2+3\overline{z}=1+3i$.

51. Discriminantul ecuaţiei este $\Delta=9-12=-3$. Obţinem soluţiile $x_1=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$ şi $x_2=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

52. Cum $(2-i)^2-4(2-i)+5=4-4i-1-8+4i+5=0$, rezultă că $2-i$ este rădăcină a ecuaţiei $z^2-4z+5=0$.

53. Soluţiile sunt $z_1=4i$ şi $z_2=-4i$.

54. Avem $|z|=\left|(1+i)^6\right|=|1+i|^6=\sqrt{2}^6=2^3=8$.

55. Deoarece $|3+4i|=|3-4i|=\sqrt{9+16}=5$, obţinem $|3+4i|-|3-4i|=0$.

56. Ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $\left(x^2-1\right)^2=9$. Avem astfel de rezolvat ecuaţiile $x^2=4$ şi $x^2=-2$. Obţinem soluţiile $x_1=-2, x_2=2, x_3=-i\sqrt{2}, x_4=i\sqrt{2}$.

57. Relaţia din enunţ se scrie astfel: $x+2y+(-x+3y)i=8+7i$. Ţinând cont de definiţia egalităţii a două numere complexe, obţinem sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+2y=8\\-x+3y=7\end{cases}$. De aici se deduce că $x=2$ şi $y=3$.

58. Avem $z_1+z_2+\overline{z}_1+\overline{z}_2=7-5i+4+3i+7+5i+4-3i=22$.

59. $\dfrac{1}{1+5i}+\dfrac{1}{1-5i}=\dfrac{1-5i+1+5i}{1+25}=\dfrac{2}{26}=\dfrac{1}{13}$.

60. Cum $1+i+i^2+i^3=0$, rezultă că

$$1+i+i^2+\cdots+i^{20}=(1+i+i^2+i^3)+i^4(1+i+i^2+i^3)+\cdots+i^{16}(1+i+i^2+i^3)+i^{20}=\left(i^4\right)^5=1$$

61. Avem $(1+i\sqrt{5})^2+(1-i\sqrt{5})^2=1+2i\sqrt{5}-5+1-2i\sqrt{5}-5=-8$.

62. Avem $(1+i)^3+(1-i)^3=1+3i+3i^2+i^3+1-3i+3i^2-i^3=2-6=-4$.

Scanned with OKEN Scanner

63. $z=\dfrac{1+3i}{1-i}=\dfrac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i+3i+3i^2}{2}=\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i$, iar de aici rezultă $\text{Im}(z)=2$.

64. Avem $\dfrac{2i}{1-i}+\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{2i(1+i)+1-i}{(i+1)(i-1)}=\dfrac{-1+i}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

65. Deoarece $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5=1+i-1-i+1+i=1+i$, rezultă că $\left|1+i+i^2+i^3+i^4+i^5\right|=|1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

1.3. Ecuații, inecuații. Sisteme de ecuații

66. Din relaţiile lui Viète, $x_1+x_2=2, x_1x_2=-2$ deci expresia din enunţ este 0.

67. Din relaţiile lui Viète avem: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\dfrac{1}{2}$.

68. Evident $x_1\neq 0$ şi $x_1^2-2008x_1+1=0\Rightarrow x_1^2+1=2008x_1\Rightarrow x_1+\dfrac{1}{x_1}=2008$.

69. $x_1^2+x_2^2=S^2-2P=9+10=19$.

70. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei

$x^2-x-1=0\Rightarrow S=1, P=-1\Rightarrow x_1^2+x_2^2=S^2-2P=3$.

Dar $x_1+x_2+2=S+2=1+2=3$.

71. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=2008$.

72. $S=x_1+x_2=5,\ P=x_1\cdot x_2=6$.

Ecuaţia este $x^2-S\cdot x+P=0$, adică $x^2-5x+6=0$.

73. Căutăm o ecuaţie de forma $ax^2+bx+c=0$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, care se mai scrie $x^2-sx+p=0$, unde $s=x_1+x_2$ şi $p=x_1x_2$. O ecuaţie de această formă este $x^2-x-2=0$.

74. $S=2, P=-3\Rightarrow x^2-2x-3=0$.

75. $x_1+x_2-x_1x_2=-p+p=0$.

76. Cum $x_1+x_2=-m,\ x_1x_2=2$, relaţia dată devine $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-m)^2-2\cdot 2=5$, cu soluţiile $m_1=-3, m_2=3$.

77. Din relaţiile lui Viète avem: $S=x_1+x_2=-\dfrac{-(m-1)}{1}=m-1; P=x_1x_2\dfrac{-m}{1}=-m$.

Obţinem ecuaţia $m-1=2(-m+4)\Leftrightarrow 3m=9\Leftrightarrow m=3$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

78. $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m+2 \\ 2x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow m = -4$

79. Din relaţiile lui Viete avem $s = x_1 + x_2 = 1, p = x_1 x_2 = m$.

Atunci $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{s+2}{p+s+1} = \frac{3}{m+2} = -\frac{3}{4}$. Atunci $m = -6$.

80. x = 5 este soluţie <=> $m^2 \cdot 4 = 5 - 3 \cdot m + 2 <=> 4m^2 + 3m - 7 = 0$ <=>

$m_1 = 1, m_2 = -\frac{7}{4}$.

81. Cum $x_1 + x_2 = -(m^2+3)$, $x_1 x_2 = 3$, relaţia dată devine $-(m^2+3)+3 = 7$. Ecuaţia nu admite soluţii reale.

82. Din relaţiile lui Viète $S = x_1 + x_2 = 2m - 3$ si $P = x_1 x_2 = m - 1$.

Atunci $S - 2P = 2m - 3 - 2m + 2 = -1$.

83. Formăm sistemul

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 + x_2 = -m + 1 \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$$

obţinut din relaţiile lui Viète şi relaţia dată în enunt.

Din prima şi a treia ecuaţie rezultă $x_2^2 = 1$ cu soluţiile -1 şi 1. Pentru $x_2 = -1, x_1 = -3$ şi din ecuaţia (2) $m = 5$. Pentru $x_2 = 1, x_1 = 3$ şi din ecuaţia (2) $m = -3$.

84. Din relaţiile lui Viete avem $x_1 + x_2 = m$ şi $x_1 \cdot x_2 = -m - 6$ deci relaţie din enunţ devine $4m - m - 6 = 0$ cu soluţia m=2.

85. Din relaţiile lui Viete avem $x_1 + x_2 = -2, x_1 \cdot x_2 = 6m - 1$, iar relaţia din enunţ devine $-2=6m-1$ cu soluţia $m = -\frac{1}{6}$.

86. După formulele lui Viète, produsul rădăcinilor este $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m}{m} = -1$.

87. Ecuaţia $x^2 + mx + 9 = 0$ are $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 6$.

88. $x^2 - x + m = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4m > 0$ şi $x_1 x_2 = -m < 0$, deci obţinem $m \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

89. $\Delta = m^2 + 4m^2 + 4 = 5m^2 + 4 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$.

Obţinem că ecuaţia are două soluţii reale distincte.

90. Soluţiile ecuaţiei sunt numere reale dacă $\Delta \geq 0$ şi sunt opuse $(x_1 = -x_2)$ dacă $S = 0$. $\Delta = m^2 + 1 \geq 0$, adevărat $(\forall)\ m \in \mathbb{R}$. $S = m \Rightarrow m = 0$.

91. Două numere nenule a şi b sunt inverse $\Leftrightarrow ab = 1$; Obţinem condiţia $x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$;

Scanned with OKEN Scanner

92. $\begin{cases}\Delta>0\\ x_1x_2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-4m>0\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{9}{4}\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0)$.

93. $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1.\ \Delta>0\Rightarrow x_1,x_2\in\mathbb{R},\ x_1\neq x_2\Rightarrow cardM=2$.

94. Avem că $\Delta=4-4(1+a^2)=-4a^2$ şi din faptul că $a\neq 0$ rezultă $\Delta<0$,aşadar ecuaţia noastră nu are soluţii.

95. $\Delta=(2a+1)^2-4a(a+1)=1>0\Rightarrow x_1,x_2\in R;x_1\neq x_2$.

96. Avem $x_1=x_2=1$ de unde $x_1+x_2=2, x_1x_2=1$ .Conform relaţiilor lui Viète $x_1+x_2=m+2, x_1x_2=m+1$ de unde $m=0$.

97. Impunem $(x^2=1 \text{şi } y^2=0)$ sau $(x^2=0 \text{şi } y^2=1)\Rightarrow$

$A=\{(-1,0),(1,0),(0,-1),(0,1)\}$.

98. $2x+1\geq 3x-1\Leftrightarrow 2\geq x$ de unde A = { 0 , 1, 2 }

99. $(1+\cos a)\cdot x^2-(2\sin a)\cdot x+1-\cos a=0$, ecuaţie de gradul al doilea

$\Rightarrow 1+\cos a\neq 0\Rightarrow x\neq\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Avem ecuaţia $2\cos^2\frac{a}{2}x^2-4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}x+2\sin\frac{2a}{c}=0\Leftrightarrow\left(\cos\frac{a}{2}x-\sin\frac{a}{2}\right)^2=0$

Şi din $x\neq\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\cos\frac{a}{2}\neq 0\Rightarrow x=tg\frac{a}{2}$ soluţie a ecuaţiei,

$(\forall)x\in\mathbb{R}-\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

100. $x^2-(m-3)x+m-3>0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow m^2-6m+9-4m+12<0$

$\Leftrightarrow m^2-10m+21<0$.

Din tabel

m	3	7
$m^2-10m+21$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	

avem că $m\in(3,7)$

101. $-4\leq 3x+2\leq 4\Leftrightarrow -6\leq 3x\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow x\in[-2,\frac{2}{3}]$.

102. $-4<3x+2<4\Leftrightarrow -2<x<\frac{2}{3}\Leftrightarrow x\in\left(-2;\frac{2}{3}\right)$.

103. $3\leq\frac{2x-1}{2}\leq 4\Leftrightarrow 6\leq 2x-1\leq 8\Leftrightarrow 7\leq 2x\leq 9\Leftrightarrow\frac{7}{2}\leq x\leq\frac{9}{2}$

Cum $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=4$.

104. $x\in[-3,3]$.

105. $x\in[2,3]$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

106. Avem $x^2-5x+5\le 1 \Leftrightarrow x^2-5x+4\le 0 \Leftrightarrow x\in[1;4]$.

Soluţiile întregi sunt $\{1,2,3,4\}$ şi suma lor este 10.

107. $(2x-1)^2\le 9 \Rightarrow (2x-1-3)(2x-1+3)\le 0 \Rightarrow (2x-4)(2x+2)\le 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)\le 0 \Rightarrow x\in[-1,2]$.

108. $(x-1)(x-2)>x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+5>0 \Leftrightarrow (x-2)^2+1>0$ care este adevărată pentru orice x număr real ,fiind suma dintre un pătrat perfect şi un număr strict mai mare decât zero.

109. După efectuarea calculelor, inecuaţia devine:

$x^2-4x-5\le 0$.

Cum ecuaţia ataşată, $x^2-4x-5=0$, are rădăcinile $x_1=-1, x_2=5$, ţinând seama de semnul funcţiei de gradul al doilea, soluţia inecuaţiei este: $x\in[-1,5]$.

110. $x^2-x\le x+15 \Leftrightarrow x^2-2x-15\le 0 \Leftrightarrow x\in[-3,5]$.

111. Inegalitatea revine la $x^2+x-6\le 0$, adică $-3\le x\le 2$.

112. $(x-1)^2+x-7<0 \Rightarrow x^2-x-6<0 \Rightarrow x\in(-2,3)\cap\mathbb{Z}=\{-1,0,1,2\}$.

113. Există două abordări. În prima, se poate folosi tabelul de semn pentru produsul funcţiilor date. La a doua, observăm că putem scrie

$$(x^2-1)\cdot(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+1)^2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1 \text{ sau } x=-1.$$

Deci $S=\{-1\}\cup[1,\infty)$.

114. Avem $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall x\in\mathbb{R}$, deci inecuaţia este echivalentă cu:

$x^2+x+1\le 2x+3$, adică $x^2-x-2\le 0$ cu soluţia $x\in[-1,2]$.

115. $\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow 2x=4\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ $S=\{(2,1)\}$.

116. $x^2-11x+30=0$.

117. Ecuaţia ataşată este $x^2+6x+8=0$

$\Rightarrow (x+2)(x+4)=0$ $x_1=-2$, $x_2=-4$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\y_1=-4\end{cases}$ sau $\begin{cases}x_2=-4\\y_2=-2\end{cases}$.

118. Se consideră ecuaţia rezolventă $T^2-5T+6=0$, cu două soluţii, $T_1=2$ şi $T_2=3$. În consecinţă, soluţia sistemului este $S=\{(2,3);(3,2)\}$.

119. Împărţim prima ecuaţie prin 2 şi notăm $S=x+y=8$, P = xy = 12, deci x, y sunt soluţii ale ecuaţiei: $t^2-St+P=0\Rightarrow t^2-8t+12=0\Rightarrow$ soluţiile 2 si 6, deci sistemul are soluţiile (2, 6), (6, 2).

120. Sistemul este echivalent cu $\begin{cases}y=3-x\\x^2+x=3-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\x^2+2x-3=0\end{cases}$.

Mulţimea soluţiilor este $S'=\{(1,2);(-3,6)\}$.

121. $x^2-3x+5=2x-1 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow S=\{(2,3),(3,5)\}$.

122. Substituind $y=2x-3$ în a doua ecuaţie, obţinem:

$x^2+2x-7=2x-3$, sau $x^2=4$.

Deci soluţii sunt $(2,1),(-2,-7)$

123. $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2-2x+y=0 \end{cases}$.

Scoatem y din prima ecuaţie şi înlocuim în a 2-a:

$y=2-x \Rightarrow x^2-2x+2-x=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1, y_1=1$ sau $x_2=2, y_2=0$.

124. $f(x)=x+3, g(x)=2x-1$,

$2f(x)+3g(x)=-5$

$2(x+3)+3(2x-1)=-5 \Rightarrow 8x+3=-5. \Rightarrow 8x=-8 \Rightarrow x=-1$.

125. $f(x)=-g(x) \Rightarrow 3x^2-3x+1=1-x \Rightarrow 3x^2-2x=0 \Rightarrow x(3x-2)=0 \Rightarrow x\in\{0,2/3\}$.

126. $f(x)-1\geq 4x$ devine $3-4x-1\geq 4x$, sau $x\leq\frac{1}{4}$, adică $x\in(-\infty,\frac{1}{4}]$.

127. $f(x)=x^2+3$, $f(x)\leq 12 \Leftrightarrow x^2=3\leq 12 \Rightarrow x^2-9\leq 0 \Rightarrow x\in[-3,3] \Rightarrow S=[-3,3]$.

128. Cerinţa este echivalentă cu

$x^2-4x+3\geq -1 \Rightarrow x^2-4x+4\geq 0 \Rightarrow (x-2)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

129. $|2x-1|\leq 1 \Leftrightarrow 2x-1\in[-1,1] \Leftrightarrow 2x\in[0,2] \Leftrightarrow x\in[0,1]$. Dar, $x\in\mathbb{N} \Rightarrow x\in\{0,1\} \Rightarrow$

$A=\{0;1\}$.

130. Condiţia de existenţă: $x-5\geq 0$, adică $x\geq 5 \Rightarrow x\in[5;\infty)$. Ecuaţia este echivalentă cu $x-5=4 \Leftrightarrow x=9\in[5;\infty)$. Se verifică ecuaţia pentru x=9.

131. $\begin{cases} 2+x\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[0,\infty)$, $2+x=x^2 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{matrix} \Rightarrow x=2$.

132. Punem condiţiile de existenţă $\begin{cases} 7-x\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 7 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1,7]$. Ridicăm la pătrat în ambii membri ai ecuaţiei şi obţinem: $7-x=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-x-6=0$ cu soluţiile $x_1=-2$ şi $x_2=3$.

Cum $x\in[1,7]$, dintre cele două rădăcini ale ecuaţiei convine $x=3$.

133. $x+1\geq 0$; $5-x\geq 0$, deci $x\in[-1,5]$

Ridicând ambii membri la pătrat, obţinem:

$x+1=(5-x)^2$, deci $x^2-11x+24=0$ cu $x=8$ nu convine si $x=3$. Deci $S=\{3\}$

134. Pentru ca ecuaţia să admită soluţii se impun condiţiile:

$2x+3\geq 0, x\geq 0$ adică $x\geq 0$.

Prin ridicare la pătrat obţinem ecuaţia:

$x^2-2x-3=0$, care are soluţiile $x_1=3$ şi $x_2=-1$, care nu convine.

Singura soluţie este $x=3$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

135. Cu $x+2\geq 0$, ridicând la pătrat, obţinem: $x+2=9\Rightarrow x=7$

136. Avem $\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x-1=4\Leftrightarrow x=5$

137. Se impune condiţia $x\geq 1$.

Prin ridicare la pătrat se obţine ecuaţia $x^2-3x=0$.

Soluţia este x=3.

138. Condiţii de existenţă $\begin{matrix}2x+3\geq 0\\ x+2\geq 0\end{matrix}\Rightarrow x\geq -\frac{3}{2}$.

Prin ridicare la pătrat $\Rightarrow 2x+3=x^2+4x+4$ deci $x^2+2x+1=0\Rightarrow (x+1)^2=0$ cu soluţia $x=-1$ (care verifică restricţiile).

139. $\sqrt{x^2-3}=1$. Condiţii: $x^2-3\geq 0\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},\infty\right)=I_c$.

Ecuaţia devine:

$x^2-3=1\Leftrightarrow x\in\{-2,2\}$,

ambele valori verifică intervalul de condiţii

140. Se impune condiţia de existenţă a radicalului:

$5-x^2\geq 0$; adică $x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$.

După ridicarea la pătrat se obţine: $5-x^2=4\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$.

141. Condiţia de existenţă a radicalului este $x^2+1\geq 0$, de unde $x\in\mathbb{R}$. Egalitatea dată este echivalentă cu $x^2+1=4\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$.

142. $x^2-x-2\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$.

Avem $x^2-x-2=4\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow x\in\{-2;3\}$.

143. Din condiţiile de existenţă avem:

$$\begin{cases}x^2-x-2\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-2)(x+1)\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-1,\infty)$$

Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem:

$$\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2=(x-2)^2\Rightarrow x^2-x-2=x^2-4x+4$$

de unde avem $3x=6\Rightarrow x=2\in[-1,\infty)$.

144. Condiţie de existenţă: $4x^2+6x+3\geq 0$

Ridicând la pătrat avem $4x^2+6x+3=x^2+4x+4 <=> 3x^2+2x-1=0 <=>$

$x_1=\frac{1}{3}$ (verifică condiţia şi ecuaţia), $x_2=-1$ (verifică condiţia şi ecuaţia)

Deci S = $\{-1,\frac{1}{3}\}$

145. $x^2+2x-3\geq 0$; $x^2+2x-3=12$, $x^2+2x-15=0\Rightarrow x_1=3$ şi $x_2=-5$ (verifică condiţia şi ecuaţia)

146. Condiţii:. $3x+4\geq 0$, $x\geq 0$. $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}\Leftrightarrow 3x+4=4x\Rightarrow x=4$ (verifică condiţia şi ecuaţia)

Scanned with OKEN Scanner

147. Avem $x \geq 2$ şi $\sqrt{x-2}(1+\sqrt{x+2})=0$ cu unica soluţie $x=2$.

148. Condiţiile de existenţă sunt

x-1 ≥ 0 şi $x^2-x-2 \geq 0$,

deci x ≥ 1 si x $\in (-\infty,-1]\cup[2,\infty)$, de unde x $\in [2,\infty)$.

Prin ridicare la pătrat rezultă

x-1 $= x^2-x-2$ sau $x^2-2x-1=0$,

adică $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$, $x \geq 2$, deci $x=1+\sqrt{2}$.

149. $\sqrt[3]{1-x}=-2 <=> 1-x=-8 <=> x=9$

150. Prin ridicare la cub, obţinem $x=-1$.

151. $(5^3)^x=5^{-1} <=> 3x=-1 <=> x=-\frac{1}{3}$.

152. $\frac{1}{2^x}=4 \Rightarrow 2^{-x}=2^2$ din injectivitate rezultă $x=-2$.

153. $\frac{1}{3^x}=9 <=> 3^x=\frac{1}{9} <=> x=-2$

154. Avem $2^{x^2}=16 \Rightarrow 2^{x^2}=2^4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow S=\{-2,2\}$

155. Ecuaţia este echivalentă cu $x^2-4x=-3$ cu soluţiile 1 şi 3.

156. Avem $3^{x-2}=3^{-\sqrt{x}}$, de unde

$x-2=-\sqrt{x}, 2>x>0, x^2-4x+4=x, x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$

Deci unica soluţie e $x=1$.

157. Deoarece $\frac{1}{2}=2^{-1}$, atunci ecuaţia devine: $\left(2^{-1}\right)^x=2^{x-2} \Leftrightarrow 2^{-x}=2^{x-2}$, funcţia exponenţială e injectivă $\Rightarrow -x=x-2 \Leftrightarrow x=1$.

158. $4^{x-1}=4^{-1}$. Din injectivitate, $x-1=-1 \Rightarrow x=0$.

159. Ecuaţia este echivalentă cu $2^x \cdot 4^x=8 \Leftrightarrow 8^x=8 \Rightarrow x=1$ soluţie unică.

160. Ecuaţia se scrie echivalent $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, adică soluţia unică este $x=-1$.

161. $(3\cdot 5)^x=15^x=15$, deci x $=1$.

162. $2^{x^2-x}=2^2$ ne conduce la $x^2-x-2=0$, de unde $x_1=2, x_2=-1$.

163. $3^{1-x}=9 \Leftrightarrow 1-x=2 \Leftrightarrow x=-1$.

164. $3^{x^2+x}=3^2 \Leftrightarrow x^2+x=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x \in \{-1;2\}$.

165. $3^{2x-1}=3^{5-x} \Rightarrow 2x-1=5-x \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$

166. $3^{2x-5}=3^{x^2-8} \Leftrightarrow 2x-5=x^2-8 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x \in \{-1,3\}$.

167. Condiţia de existenţă: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1,\infty)$;

$2^{\sqrt{x-1}}=2^2 \Rightarrow \sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5 \in [1,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

168. $4^{x+2}=2^{x^2+5} \Leftrightarrow 2^{2x+4}=2^{x^2+5} \Leftrightarrow 2x+4=x^2+5 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1;$

169. $5^{x^2-x}=5^{5x-5}$ rezultă $x^2-x=5x-5$ adică $x^2-6x+5=0$.
Rezolvând ecuaţia se obţine soluţia $\{1,5\}$

170. $2^{2x^2+3x-2}=8 \Leftrightarrow 2^{2x^2+3x-2}=2^3 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=3 \Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0$

$\Rightarrow x_1=1 ; x_2=-\frac{5}{2}$. $S=\left\{-\frac{5}{2},1\right\}$.

171. $x^2+x+1=3$, de unde $x=1$ şi $x=-2$

172. $x=2$ e soluţie. $f(x)=2^x+2^{x+3}$ fiind strict crescătoare în x aceasta e unica soluţie.

173. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $7\cdot 3^x=7$ de unde $x=0$.

174. $\frac{2^x}{2}+2^x=12 \Rightarrow 2^x(\frac{1}{2}+1)=12 \qquad 2^x\cdot\frac{3}{2}=12 \Rightarrow 2^x=2^3 \Rightarrow x=3$.

175. Dacă notăm $3^x=t$ obţinem ecuaţia $t^2-2t-3=0$ cu soluţiile $t_1=-1$ şi $t_2=3$. Dar $t>0$, deci $3^x=3$ şi $x=1$.

176. $3^x=t, t\geq 0 \Rightarrow t^2-4t+3=0$, ecuaţie de gradul II cu soluţiile $t_1=1, t_2=3$.
Dacă $t_1=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0$, dacă $t_2=3 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow x=1$. Deci $x\in\{0,1\}$.

177. $4^x-6*2^x+8=0$
Notăm $2^x=t$, $t>0$

$$t^2-6t+8=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=2>0 \\ t_2=4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2^x=4 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow S=\{1;2\}.$$

178. Notăm $2^x=a, a>0 \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a\in\{1,2\} \Rightarrow x\in\{0,1\}$.

179. $2^{x+3}-2^x=28 \Leftrightarrow 8\cdot 2^x-2^x=28 \Leftrightarrow 7\cdot 2^x=28 \Leftrightarrow 2^x=4 \Leftrightarrow x=2$.

180. Notăm $2^x=t, t>0$ şi avem $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} <=> 2t^2-5t+2=0$ de unde $t_1=2 => x_1=1$

şi $t_2=\frac{1}{2} => x_2=-1$.

181. Fie $t=2^x>0$. Atunci $t-\frac{14}{t}=-5$ care devine $t^2+5t-14=0$ cu soluţiile

$t=2,-7$ .Cum $t=2^x>0$ avem $x=1$.

182. Notăm $3^x=t, t>0$ şi avem $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3} <=> 3t^2-10t+3=0$

de unde $t_1=3 => x_1=1$ şi $t_2=\frac{1}{3} => x_2=-1$.

183. $2^x\cdot 3^x=36 \Leftrightarrow 6^x=36 \Leftrightarrow x=2$.

184. Calculăm $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$, deci ecuaţia este echivalentă cu

$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=3+2\sqrt{2}$, cu soluţia unică (injectivitatea funcţiei exponenţiale) $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

185. Condiţia de existenţă: x +5 > 0. Ecuaţia devine: $x+5=2^3$, de unde se obţine soluţia $x=3$.

186. Cond. de existenţă: x – 3 > 0 <=> x > 3

$\log_2(x-3)=0 <=> x-3=1 <=> x=4$ (verifică condiţia) S = { 4 }

187. $2x+1>0;\quad 2x+1=7^2 \Rightarrow x=12$.

188. Condiţia de existenţă a logaritmului impune $2x+1>0$, de unde $x\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.

Avem $\log_5(2x+1)=\log_5 5$, deci $2x+1=5 \Leftrightarrow x=2\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.

189. Condiţia de existenţă: 2x +3 > 0 . $\log_5(2x+3)=2 \Rightarrow 2x+3=25 \Rightarrow x=11$.

190. Impunem condiţia de existenţă $10-x>0 \Rightarrow x<10$.

Atunci avem implicaţiile: $\log_3(10-x)=2 \Rightarrow 10-x=3^2 \Rightarrow x=1$, care este soluţie unică.

191. Condiţia de existenţă: $3x+4>0$ rezultă $x\in\left(-\frac{4}{3},\infty\right)$. Ecuaţia devine: 3x+4=25, cu soluţia x=7.

192. Condiţia de existenţă: x > 0 . $\log_2\sqrt[3]{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=2 \Leftrightarrow x=8$.

193. Condiţia de existenţă: x+2 > 0, x > 0. Ecuaţia devine $\log_2(x^2+2x)=3 \Rightarrow$ x=2.

194. $\begin{cases}x+2>0\\x+1>0\end{cases}$ => $x\in(-1,+\infty)$; $\log_2(x+2)-\log_2(x+1)=1 \Rightarrow x=0$.

195. Condiţia de existenţă $\begin{cases}x+2>0\\2x-5>0\end{cases}$ => $x\in(\frac{5}{2},+\infty)$;

$\log_5(x+2)-\log_5(2x-5)=\log_5\frac{x+2}{2x-5}=1$, adică $x=3$.

196. Din condiţiile de existenţă deducem $x>1$.

Ecuaţia se reduce la

$\log_5(3x+1)=\log_5 5(x-1) \Leftrightarrow 3x+1=5x-5 \Leftrightarrow x=3$,

soluţie ce verifică condiţiile de existenţă.

197. Condiţia de existenţă $\begin{cases}x+2>0\\x-5>0\end{cases}$ => $x\in(5,+\infty)$;

$\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3 \Rightarrow \log_2\frac{x+2}{x-5}=\log_{2^3}\Rightarrow \frac{x+2}{x-5}=8 \Rightarrow x=6$.

198. $x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ cu soluţia x=2 în mulţimea numerelor reale pozitive.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

199. $\begin{cases} x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-4,\infty) \\ x\in\left(-\frac{3}{2},\infty\right) \\ x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$

$\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)\Leftrightarrow \lg(x+4)(2x+3)=$

$=\lg(1-2x)\Leftrightarrow (x+4)(2x+3)=1-2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+8x+12=1-2x\Leftrightarrow 2x^2+13x+11=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=-\frac{11}{2}\notin\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),\ x_2=-1\in\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$

200. Condiţia de existenţă $x+1>0\Rightarrow x>-1$.

$\sqrt{x+1}=2\Rightarrow x=3$

201. Trebuie să avem $x^2-1=3>0$, adică $x\in\{2,-2\}$

202. $\log_5(9-x^2)=1$. Avem condiţia $9-x^2>0\Rightarrow x\in(-3,3)$.

Ecuaţia $\Leftrightarrow 9-x^2=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x\in\{-2,2\}$.

203. Impunem condiţia de existenţă a logaritmului: $x^2+2x-3>0\Leftrightarrow (x+3)(x-1)>0$

$\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$. Ecuaţia data este echivalentă cu $x^2+2x-3=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow (x+4)(x-2)=0$. Această ecuaţie are soluţiile $x_1=-4$ şi $x_2=2$.

Cum $x_1,x_2\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$, rezultă că ecuaţia $\log_5(x^2+2x-3)=1$ are două soluţii, $x_1=-4$ şi $x_2=2$.

204. Impunem condiţiile $x^2-6>0, 2x-3>0$. Obţinem ecuaţia $x^2-6=2x-3$ cu soluţia ce verifică cele două condiţii iniţiale $x=3$.

205. Se pune condiţia $x^2+3x-10>0\Rightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(2,\infty)=D$.

Ecuaţia devine

$\log_2\left(x^2+3x-10\right)=3\Leftrightarrow x^2+3x-10=2^3\Leftrightarrow x^2+3x-18=0\Leftrightarrow x_1=-2\notin D$ şi $x_2=3\in D$.

206. $\log_2(x^2-x-2)=2\ x^2-x-2>0\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

207. Ecuaţia se scrie $\log_3(x-2)^2=2$. Impunem condiţia $(x-2)^2>0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Se obţine ecuaţia $(x-2)^2=9$, cu soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=5$.

208. Condiţii: $\begin{cases} 2x+5>0 \\ x^2+3x+3>0 \end{cases}\Rightarrow x>-\frac{5}{2}.\ 2x+5=x^2+3x+3.\ x\in\{-2,1\}.$

209. Condiţia de existenţă $\left(x^2-x-2\right)>0, 2x-4>0$

$\log_2(x^2-x-2)=log_2(2x-4)+1=log_2 4(x-2)\Rightarrow x^2-x-2=$

Scanned with OKEN Scanner

$=4(x-2)\Rightarrow(x+1)(x-2)=4(x-2)$ de unde $x=2$ şi $x=3$. Prin verificarea condiţiei $\Rightarrow$ x=3.

210. Impunem condiţiile de existenţă pentru cei doi logarimi

$2x^2-x-1>0\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,\infty)$ $2x+1>0\Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

Intersecţia cele două intervale detremină $x\in(1,\infty)$

$2x^2-x-1=2x+1\Rightarrow 2x^2-3x-2=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}\notin(1,\infty); x_2=2\in(1,\infty)$.

Soluţia $x=2$.

211. Condiţiile de existenţă ale ecuaţiei sunt

$$\begin{cases}x^2-4>0\\ x^2-3x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)\\ x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$$

$\log_2\left(x^2-4\right)=\log_2\left(x^2-3x+2\right)\Rightarrow x^2-4=x^2-3x+2\Rightarrow 3x=6\Rightarrow x=2$

Cum $2\notin(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, obţinem că ecuaţia nu are soluţii.

212. Condiţia de existenţă: x>0. Prin substituţia $t=\lg x$ obţinem ecuaţia: $t^2-4t+3=0$ cu soluţiile $t_1=1$ şi $t_2=3$ şi de aici $x=10$ şi $x=1000$.

213. Condiţie de existenţă: x > 0

$2^{\log_2 x}=4 <=> \log_2 x=2 <=> x=4$ (verifică condiţia)

214. Condiţie de existenţă : $2^{x+1}-1>0\Rightarrow x>-1$.

$\log_4\left(2^{x+1}-1\right)=\log_4 1\Leftrightarrow 2^{x+1}=2\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$.

1.4. Funcţii

215. $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)=0$.

216. Prin calcul direct se obţine 0.

217. $f(0)+...+f(5)=2(0+1+...+5)+6\cdot 3=48$

218. $f(1)+f(2)+...+f(6)=2(1+2+...+6)-6=42-6=36$.

219. Avem $f(1)=2\cdot 1+1, f(2)=2\cdot 2+1,...., f(6)=2\cdot 6+1$, de unde rezultă că

$f(1)+f(2)+...+f(6)=2(1+2+...+6)+6=2\frac{6\cdot 7}{2}+6=42+6=48$.

220. $f(0)+f(1)+f(2)+...+f(6)=(3-2\cdot 0)+(3-2\cdot 1)+...+(3-2\cdot 6)=-21$.

221. $\sum_{k=1}^{20} f(k)=40+\sum_{k=1}^{20} k=40+\frac{20\cdot 21}{2}=250;$

Scanned with OKEN Scanner

222. $f(0)+f(1)+f(2)+....+f(10)=1+2+3+....+11=\dfrac{11\cdot 12}{2}=66$

223. Avem relaţiile:

$f(1)+f(2)+...+f(10)=(3\cdot 1-4)+(3\cdot 2-4)+...+(3\cdot 10-4)=$

$=3\cdot(1+2+...+10)-4\cdot 10=3\cdot\dfrac{10\cdot(10+1)}{2}-40=125.$

224. f: $R\to R$ f(x)= x + 5

f(2)+f(2^2)+...+f(2^5)=(2+5)+(2^2+5)+...+(2^5+5)=(2^1+2^2+...+2^5)+(5+...+5)=

$2\dfrac{2^5-1}{2-1}+5\cdot 5=2(2^5-1)+25=2(32-1)+25=64-2+25=62+25=87$

225. Avem: $f(3)+f(3^2)+...+f(3^5)=(3+2)+(3^2+2)+...+(3^5+2)=(3^1+3^2+...+3^5)+2\cdot 5=$

$=\dfrac{3(3^5-1)}{3-1}+10=\dfrac{3\cdot 242}{2}+10=3\cdot 121+10=373.$

226. f(2)+f(2^2)+...+f(2^7)= $2\cdot\dfrac{2^7-1}{2-1}+3\cdot 7=275.$

227. Avem că $f(3)=0$ de unde rezultatul cerut este 0.

228. f(2) = 0 $\Rightarrow$ produsul este 0.

229. $f(0)f(1)....f(5)=(5-0)(5-1)...(5-5)=0.$

230. Cum f(7)= 0 $\Rightarrow$ f(1) · f(2) · ..... ·f(7)=0

231. Cum $f(2)=2-2=0$, obţinem $f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(10)=0.$

232. $\begin{cases}f(1)+f(2)+f(3)=6a+2b\\ f(4)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\cdot 1+b+a\cdot 2+b+a\cdot 3+b=6a+2b\\ a\cdot 4+b=8\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ 4a+0=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ a=2\end{cases}.$

233. a= -3 $\Rightarrow$ f este strict descrescătoare $\Rightarrow$ $\min f=f(1)=-2$

234. $f\left(\dfrac{2009}{2008}\right)=2008\cdot\dfrac{2009}{2008}-2007=2\Rightarrow A\in G_f.$

235. Graficul lui f intersectează axa Oy în punctul $A(0;f(0))$. Obţinem $A(0;-6)$.

236. $\left.\begin{matrix}f(-1)=-a+b,\ g(-1)=-b+a\\ f(-1)=g(-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=a\Rightarrow f(x)=ax+a=g(x),(\forall)x\in\mathbb{R}.$

Cum f şi g au acelaşi domeniu şi codomeniu $\Rightarrow\boxed{f=g}$.

237. $f(x)=g(x)$ echivalent cu $3x+1=5-x$, sau $x=1$

238. $x=2x+1$ echivalent cu $x=-1=f(x)$. Punctul cerut are coordonatele $(-1,-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

239. $3f(x)+2=3ax+3b+2$ .Obţinem relaţia $3ax+3b+2=3x+5$ iar prin identificarea coeficienţilor obţinem $a=1, b=1$.

240. $f(x)\big(g(x)+h(x)\big)=(x+1)(2x+2+3x+3)=5(x+1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot h(x)=(x+1)(2x+2)+(x+1)(3x+3)=$

$=2(x+1)^2+3(x+1)^2=5(x+1)^2, \forall x\in\mathbb{R}.$

241. Funcţia este strict descrescătoare şi pentru

$-1\le x\le 1\Rightarrow f(-1)\ge f(x)\ge f(1)\Rightarrow f_{\max}=f(-1)=5$.

242. $f(x)+f(1)\le 1\Leftrightarrow 3x-4-1\le 1\Leftrightarrow x\le 2\Leftrightarrow x\in(-\infty,2]$.

243. a= -4 $\Rightarrow$ f este strict descrescătoare , f(0)= 3, f(2)= -5, deci Imf=f([0,2])= [-5,3].

244. a= -2 $\Rightarrow$ f este strict descrescătoare ; max f(x) = f(-1)= 3.

245. Fie A şi B punctele de intersecţie cu axele:

$G_f\cap Ox=A(\alpha,0)\Rightarrow f(\alpha)=0\Rightarrow\alpha=\frac{5}{3}$, deci $A\left(\frac{5}{3},0\right)$.

$G_f\cap Oy=B(0,\beta)\Rightarrow f(0)=\beta\Rightarrow\beta=-5$, deci $B(0,-5)$.

Dacă O(0,0) este centrul sistemului de axe, atunci triunghiul OAB este dreptunghic în O iar aria lui este $\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{25}{6}$.

246. $f(x)+2g(x)=4x^2-1$, deci obţinem ecuaţia $x^2=0$ cu soluţiile $x_{1,2}=0$.

247. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$.

$$\begin{cases}A(1;3)\in G_f\\B(0;5)\in G_f\\C(-1;11)\in G_f\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x_A)=y_A\\f(x_B)=y_B\\f(x_C)=y_C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=3\\f(0)=5\\f(-1)=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=3\\c=5\\a-b+c=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\\c=5\end{cases}$$

248. $f(-5)=0, f(5)=0$ deci produsul este egal cu zero.

249. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-11x+30$ are zerourile

x=5 şi x=6 deci $f(5)=0$ şi $f(6)=0$.

Deoarece $f(5)$ şi $f(6)$ se găsesc în produsul

$P=f(0)\cdot f(1)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)\cdot f(6)\Rightarrow P=0$.

250. $f(1)=1^2-3\cdot 1+2=0\Rightarrow f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)=0$.

251. Deoarece $f(1)=0\Rightarrow$ valoarea produsului este 0.

252. Avem $f(0)=2$ deci $f(f(0))-f(2)=0$.

253. $f^2(x)+2f(x)-3=0\Leftrightarrow(2x-1)^2+2(2x-1)-3=0\Leftrightarrow 4x^2-4=0$

$\Rightarrow x=\pm 1$

254. Inegalitatea se reduce la

$-x^2+4x-4\le 0$, adică $(x-2)^2\ge 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

255. Avem următoarele puncte de intersecţie:
$Gf \cap Oy : x = 0 \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow A(0,-1)$
$Gf \cap Ox : y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow B(1,0), C(-1,0)$

256. Vârful unei parabole are coordonatele: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Se obţine prin calcule:

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36$, $x_V = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$, $y_V = \frac{-\Delta}{4 \cdot a} = \frac{-36}{4} = -9$.

Deci: $V(-2,-9)$.

257. Vârful parabolei are abscisa $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ şi ordonata

$y = f(x_0) = f(1) = 1 = x_0$.

258. Vârful parabolei este dat de $\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ adică (1,-4) şi mai avem de verificat 3-4+1=0 ceea ce este adevărat.

259.
$y_v = 0$, axa Ox intersectează parabola in $V(2,0)$, deci vârful parabolei se află pe Ox.

260. În punctele de intersecţie avem $f(x) = g(x)$ adică $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$.
Deci punctele de intersecţie sunt $(-1,3),(3,7)$.

261. Distanţa este egală cu $|x_1 - x_2|$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$.
Cum soluţiile sunt -2 si 4 obţinem $|-2-4| = 6$.

262. $\cap OX : Y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 1, x_2 = 7 \Rightarrow A(1,0)$ şi $B(7,0)$. $AB = |x_2 - x_1| = |7-1| = 6$ .s

263. Punctele de intersecţie se află rezolvând ecuaţia $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Punctul de intersecţie este A(3,-4).

264. Deoarece $f'(x) = -2x$ pentru $x \in [0;1]$ rezultă f strict descrescătoare şi $m = f(1) = -1$ si $M = f(0) = 0$ .Cum f este monotonă şi are proprietatea lui Darboux rezultă $f([0;1]) = [-1;0]$.

265. $f(m) = -1 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1$ şi $m = 2$.

266. Graficul funcţiei conţine punctul dat dacă şi numai dacă
f(2)=3 $\Leftrightarrow 4m - 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow 4m = 4 \Leftrightarrow m = 1$.

267. $f(m) = m^2 - 2m + 4 = 4$ are soluţiile $m = 0, m = 2$.

268. $x_1 + x_2 = m + 1$, $x_1 x_2 = m$ deci $x_1 + x_2 - x_1 x_2 = m + 1 - m = 1$.

269. Parabola este tangenta axei Ox $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = -1$.

270. $\Delta = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

271. Din condiţia $\Delta = 0$, obţinem $m^2 - 4m + 4 = 0$, şi deci $m = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

272. $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta\leq 0 \Leftrightarrow 25-4m-24\leq 0 \Leftrightarrow m\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

273. Inegalitatea $f(1)\geq -\frac{1}{4}$ se scrie echivalent $m^2-1+m+1\geq -\frac{1}{4}$ sau $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, adevărată pentru orice număr real m.

274. Deoarece $a=1>0\Rightarrow$ parabola asociată funcţiei are un punct de minim în vârf. $\Delta=m^2-4m^2-4=-3m^2-4<0\Rightarrow$ ecuaţia $f(x)=0$ nu are rădăcini reale, parabola asociată funcţiei nu taie axa Ox, deci este situată deasupra axei Ox.

275. $a>0\Rightarrow$ parabola este orientată cu ramurile în sus.

$V(x_V,y_V)=V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ $\Delta=b^2-4ac=4m^2-4\left(m^2+1\right)=-4$ deci

$y_V=\frac{4}{4}=1>0\Rightarrow$ vârful este situat

deasupra axei OX şi cum parabola este orientată cu ramurile în sus , rezultă că se află situată deasupra axei OX.

276. Valoarea maximă a funcţiei este $-\frac{\Delta}{4a}$, pentru a<0$\Rightarrow$

$\frac{-\Delta}{4a}=5\Leftrightarrow -16-3m=5m\Leftrightarrow m=-2<0$.

277. $\frac{-\Delta}{4a}=10\Leftrightarrow 4(m-4)=-40\Leftrightarrow m=-6$.

278. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2\Leftrightarrow -\frac{\Delta}{4a}=2\Leftrightarrow -\frac{4m^2-12m}{4}=2\Leftrightarrow m^2-3m+2=0\Leftrightarrow m\in\{1;2\}$.

279. Minimul funcţiei este $\frac{-\Delta}{4a}$ adica $\frac{m^2-4m+4}{-4}$ de unde rezultă că $m^2-4m+4=1$ cu rădăcinile 3 şi 1.

280. Minimul lui f este $\frac{-\Delta}{4a}=\frac{8-m^2}{4}=\frac{-1}{4}\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=\pm 3$.

281. Trebuie să avem $m>0$ .Minimul este $\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-m^2+8m}{4m}=1$ de unde $m=4$.

282. $\min f(x)=-\frac{\Delta}{4A}=-a^2+4a=1\Leftrightarrow a^2-4a+4=0\Leftrightarrow a_1=a_2=2$

283. $\min(f)=-\frac{\Delta}{4a}\Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=-2\Rightarrow -\frac{m^2-8}{4\cdot 1}=-2\Rightarrow m^2=16\Rightarrow m_1=-4;\ m_2=4$.

284. Condiţia de existenţă a minimului este $m-1>0\Leftrightarrow m\in(1;\infty)$.

Din $\frac{m+2}{2(m-1)}=2\Rightarrow m=2$.

285. Observăm că $f(-1)+f(0)+5f(1)=5^{-(-1)}+5^{-0}+5\cdot\frac{1}{5}=5+1+1=7$.

Scanned with OKEN Scanner

286. $G_f \cap Ox = A(x,0): f(x)=0, 3^{x+1}=1 \Rightarrow x=-1, A(-1,0)$.

$G_f \cap Oy = A(0,y): f(0)=y: f(0)=3^{0+1}-1=2 \Rightarrow Gf \cap Oy = \{(0,2)\}$.

287. Intersecţia cu axa Oy: $f(0)=2^{0+3}-2=6 \Rightarrow Gf \cap Oy = \{(0,6)\}$.

Intersecţia cu axa Ox: $f(x)=0 \Rightarrow 2^{x+3}-2=0 \Rightarrow 2^{x+3}=2 \overset{inj}{\Rightarrow} x+3=1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Gf \cap Ox = \{(-2,0)\}$.

288. $f(0)+f(1)+\ldots+f(7)=2^0+2^1+\ldots+2^7$.

Progresie geometrică cu 8 termeni şi $q=2 \Rightarrow f(0)+f(1)+\ldots+f(7)=\frac{1(2^8-1)}{2-1}=255$.

289. $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4=$

$=\frac{2^4+2^3+2^2+2^1+1}{2^4}=\frac{2^5-1}{16}=\frac{31}{16}$.

290. Condiţia $2x-3>0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2},\infty\right)$; $D=\left(\frac{3}{2},\infty\right)$.

291. $f(1)=0, f(4)=2, f(2)=1 \Rightarrow f(1)+f(4)-f(2)=1$

292. $f(1)=3+\log_3 1=3$.

293. $f(1)=2+0=2; f(3)=8+1=9 \Rightarrow f(1)+f(3)=11$.

1.5. Elemente de trigonometrie. Aplicaţii ale trigonometriei în geometrie. Elemente de geometrie plană

294. $\sin^2 100^\circ+\cos^2 80^\circ=\sin^2 80^\circ+\cos^2 80^\circ=1$.

295. $\sin^2 130+\cos^2 50=\sin^2 50+\cos^2 50=1$.

296. Avem $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-150^\circ)=\sin 30^\circ$ şi atunci $\sin^2 150^\circ+\cos^2 30^\circ=$

$=\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ=1$.

297. Cum $\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ$, relaţia devine $\sin^2 60^\circ+\cos^2 60^\circ=1$.

298. Cum $\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-135^\circ)=\sin 45^\circ$, relaţia devine $\cos^2 45^\circ+\sin^2 45^\circ=1$.

299. $\sin 30=\cos 60$, deci $\sin^2 30+\cos^2 60=\sin^2 60+\cos^2 60=1$

300. $\sin 135^\circ=\sin 45^\circ; \sin^2 45^\circ+\cos^2 45^\circ=1$.

301. $65^\circ+25^\circ=90^\circ$ de unde $\sin 65^\circ=\cos 25^\circ$, de unde $\sin^2 65^\circ+\sin^2 25^\circ=1$.

302. Cum $\sin 10^0=\cos(90^0-10^0)=\cos 80^0$ şi $\sin^2 x+\cos^2 x=1, (\forall)x \in \mathbb{R}$ obţinem

$\sin^2 80^0+\sin^2 10^0=\sin^2 80^0+\cos^2 80^0=1$.

303. $tg^2 30^o+ctg^2 45^o=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

304. $\sin 120 = \sin(180 - 120) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

305. $\sin 135^0 = \sin\left(90^0 + 45^0\right) = \sin 90^0 \cos 45^0 + \sin 45^0 \cos 90^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

306. Avem că $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ de unde $2\sin^2 135^\circ = 1$.

307. $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ = \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0$.

308. $\sin 60^0 - \cos 30^0 = 0$.

309. Transformând suma în produs, avem $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 2\cos 90^\circ \cdot \cos 10^\circ = 0$

310. $\sin(10^\circ) = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$ cu reducerea la primul cadran.

311. $\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

312. $\sin 80^\circ = \sin 100^\circ$ şi $\cos 80^\circ = -\cos 100^\circ$ asigură anularea expresiei din enunţ.

313. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 150^\circ = -\cos\left(180^\circ - 150^\circ\right) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

prin urmare, numărul cerut este $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

314. $\sin 135^0 = \sin\left(180^0 - 45^0\right) = \sin 45^\circ$, deci se obţine $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

315. $\frac{\sin 135^0}{\sin 45^0} = \frac{\sin\left(180^0 - 45^0\right)}{\sin 45^0} = \frac{\sin 45^0}{\sin 45^0} = 1.$

316. $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos(180^\circ - 20^\circ) +$

$+\cos(180^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ - \cos 10^\circ = 0$

317. Deoarece unul din factorii produsului este $\sin 0 = 0$, tot produsul este 0.

318. Din $\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha \Rightarrow \sum_{k=0}^{180} \cos k^o = \sum_{k=0}^{90} \cos k^\circ + \sum_{k=90}^{180} \cos k^\circ =$

$= \sum_{k=0}^{90} \cos k^o - \sum_{k=90}^{180} \cos(180^o - k^o) = \sum_{k=0}^{90} \cos k^a - \sum_{k=0}^{90} \cos k^o = 0$.

319. $P = 0$.

320. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\sin x = \frac{3}{5}$.

$x \in (0^0, 90^0) \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$.

$\cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

321. $\cos(180^\circ - x) = -\cos x = -\frac{1}{2}$.

322. Deoarece $\sin(180^\circ - x) = \sin x$ $\sin x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin(180^\circ - x) = \frac{4}{5}$.

323. Avem $\cos(180°- x) = \cos 180° \cdot \cos x + \sin 180° \cdot \sin x = - \cos x = -\frac{1}{3}$.

324. $\cos(90^\circ - x) = \sin x$

$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$

deci $\sin x \cdot \cos(90^\circ - x) + \cos^2(180^\circ - x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

325. $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$.

326. Utilizând teorema sinusurilor în triunghiul ABC avem:

$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{4}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

327. Din teorema sinusurilor: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow \sin A = \frac{BC}{2R} \Rightarrow \sin A = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

328. Conform teoremei sinusurilor avem: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AC = 10\sqrt{2}$.

329. Din teorema sinusurilor avem : $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin A = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

330. Aplicăm teorema sinusurilor în $\Delta ABC \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow$

$AC = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2$.

331. Cu teorema sinusurilor, rezultă $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow 2R = 40 \Rightarrow R = 20$

332. Din teorema sinusurilor $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin 30} = 2R \Rightarrow 8 = 2R \Rightarrow R = 4$.

333. Folosim teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c} = 2R$

Rezultă $\frac{3}{\sin 30^\circ} = 2R$, adică R=3.

334. Din teorema sinusurilor $\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R} = \frac{3}{2 \cdot \frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow \sin A = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

335. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul ABC, obţinem $\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, dar cum triunghiul ABC este ascuţitunghic avem $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

336. Aplicând teorema sinusului obţinem $\frac{\sin A}{BC}=\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin C}{AB}=2R$, deci

$$\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow\frac{8}{\sin 45}=2R\Rightarrow 8=2\frac{\sqrt{2}}{2}R\Rightarrow R=4\sqrt{2}.$$

337. Teorema cosinusului

$$\Rightarrow \cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{36+36\cdot 3-36}{2\cdot 6\cdot 6\sqrt{3}}=\frac{36\cdot 3}{2\cdot 36\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

338. Utilizând teorema cosinusului pentru unghiul A:

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{4+16-9}{16}=\frac{11}{16}.$$

339. În $\Delta ABC\xrightarrow{T\cos}\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{3}{5}$.

340. Din teorema cosinusurilor $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+36-49}{60}=\frac{1}{5}$.

341. Din teorema cosinusului $\Rightarrow \cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{3^2+5^2-6^2}{2\cdot 3\cdot 5}=-\frac{1}{15}$.

342. $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{9+18-9}{18\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

343. Din teorema cosinusului avem $\cos B=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC\cdot AB}=\frac{3+16-7}{2\sqrt{3}\cdot 4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

344. Se foloseşte teorema cosinusului $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=2\sqrt{7}$.

345. Din teorema cosinusurilor

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=36+100-60=76$. Deci $BC=2\sqrt{19}$.

346. Pentru a determina lungimea laturii NP folosim teorema cosinusului , adică

$$|NP|^2=|MN|^2+|MP|^2-2|MN|\cdot|MP|\cdot\cos\angle 60^\circ=$$

$$=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=34-15=19\Rightarrow|NP|=\sqrt{19}$$

347. Diagonala dreptunghiului, din Pitagora, este 20.

Avem $\cos a=\frac{10^2+10^2-12^2}{2\cdot 10\cdot 10}=\frac{56}{200}=\frac{7}{25}$

348. Din teorema cosinusului aplicata in $\triangle ABC$ avem

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos(\sphericalangle B)\Rightarrow AC^2=12$ şi $AC=2\sqrt{3}$.

Deci, perimetrul $\triangle ABC=2+4+2\sqrt{3}=2(3+\sqrt{3})$.

Scanned with OKEN Scanner

349. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 21 \Rightarrow BC = \sqrt{21}$

Perimetrul este $9 + \sqrt{21}$.

350. $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\left(\hat{A}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9}{4}$.

351. $Aria_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin C}{2} = 40\sqrt{3}$

352. Aria este egală cu $\frac{1}{2} MN \cdot NP \cdot \sin MNP = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

353. $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{8 \cdot 4 \cdot \sin 45^o}{2} = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}.$

354. $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot sinA}{2} = 16$.

355. $Aria = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 30^o = 25$

356. Aria este $\frac{1}{2} MN \cdot NP \cdot \sin(MNP) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

357. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$

358. Aplic Teorema Cosinusului

$\Delta ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B.$

$AC^2 = 100 + 225 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ = 175 \Leftrightarrow AC = 5\sqrt{7}\,cm$.

359. Avem formula ariei unui triunghi

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$.

Inlocuind valorile cunoscute obţinem $\sin A = \frac{1}{2}$.

360. Dacă S este aria triunghiului atunci

$S = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2}$, deci $6 = \frac{3 \cdot 8 \cdot \sin B}{2}$ şi $\sin B = \frac{1}{2}$.

361. Aria este $S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 1$.

362. $Aria = \frac{6 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 6$.

363. $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \sin\left(\widehat{BAC}\right)}{2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

Scanned with OKEN Scanner

364. $S_{[ABC]}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{2\cdot 4\cdot \sin 30^{\circ}}{2}=2$.

365. $S[ABC]=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin 30^{0}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

366. $S_{\triangle MNP}=\frac{MN\cdot NP\cdot \sin \sphericalangle MNP}{2}=\frac{4\cdot 6\cdot \sin 45^{\circ}}{2}=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

367. $S_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin \sphericalangle BAC}{2}=\frac{5\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

368. $A_{\Delta}=\frac{AB\cdot AC\sin A}{2}=\frac{4^{2}\sin 60^{0}}{2}=4\sqrt{3}$.

369. Aria este $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin BAC=\frac{1}{2}2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

370. Celălalt unghi ascuţit va avea 30°.

Cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.

O catetă este 4, ipotenuza 8, unghiul dintre ele are 60°.

Aria triunghiului este: $A=\frac{4\cdot 8\cdot \sin 60^{\circ}}{2}=16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$.

371. $S_{\triangle ABC}=bc\frac{\sin A}{2}\Rightarrow c=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b\sin A}=14$ AC=b, AB=c

$S_{\triangle ABC}=bc\frac{\sin A}{2}\Rightarrow c=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b\sin A}=14$.

372. Fie AD înălţimea din A. Utilizând formula lui Heron pentru calculul ariei triunghiului $\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde p este semiperimetrul triunghiului, obţinem $\mathcal{A}=6$. Utilizând formula de arie $\mathcal{A}=\frac{AD\cdot BC}{2}$ şi egalând ariile obţinem $AD=\frac{12}{5}$.

373. În ΔABC dreptunghic în A avem:

$a^{2}\cdot\sin B\cdot\sin C=a^{2}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=b\cdot c=2S$, deoarece $S=\frac{b\cdot c}{2}$.

374. Avem

$AB^{2}+AC^{2}=1+4=BC^{2}$.

Deci triunghiul e dreptunghic şi $\cos B=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

375. În ΔABC dreptunghic în A, $\cos B=\frac{AB}{BC}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{BC}\Rightarrow BC=8$.

Scanned with OKEN Scanner

376. $\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 15 \cdot \frac{3}{5} = 9$.

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow AB = 12$.

377. Deoarece ΔABC este dreptunghic, cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ suma măsurilor celor două unghiuri ascuţite este $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle C) = 90^\circ - m(\sphericalangle B)$

Atunci $\sin C = \sin\left(90^\circ - B\right) = \cos B = \frac{3}{5}$.

378. $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ, \cos A = 0$.

379. $\sin^2 B + \sin^2 C = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = 1$.

380. În $\Delta ABC, m\left(\hat{A}\right) = 90^0 \Rightarrow \begin{cases} \cos B = \frac{AB}{BC} \\ \cos C = \frac{AC}{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 B = \frac{AB^2}{BC^2} \\ \cos^2 C = \frac{AC^2}{BC^2} \end{cases} \Rightarrow \cos^2 B + \cos^2 C =$

$= \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$.

381. Aria paralelogramului este $S = BC \cdot BA \cdot \sin B = 8 \cdot 10 \cdot \sin(30^\circ) = 40$.

382. Avem $BC = AC \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 5$, $AB = AC \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 5\sqrt{3}$, rezultă .

Aria este $AB \cdot BC = 25\sqrt{3}$.

383. AB = 2R $\Rightarrow$ AB = 20.

384. Dacă triunghiul este dreptunghic în A, atunci avem

$\sin B = \frac{AC}{BC}$ şi $\cos B = \frac{AB}{BC}$, deci

$\sin B + \cos B = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{AB + AC}{BC}$

385. Din teorema înălţimii în triunghiul ABC avem $AD^2 = BD \cdot DC$, iar din triunghiurile dreptunghice ABD, ACD obţinem $BD = AB\cos B$ şi $CD = AC\cos C$. Cum $\cos B = \sin C$ şi $\cos C = \sin B$ se obţine relaţia din enunţ.

386. $\sin \hat{ABC} = \sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Elemente de geometrie plană.

387. AC=6, AD=5 $\Rightarrow$ AD=BD=CD=5 $\Rightarrow$ BC=10 $\Rightarrow$ AB=$\sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

388. $\Delta ABC, a$ – ipotenuză, b şi c catete $\Rightarrow \left.\begin{matrix} b + c = 23 \\ b \cdot c = 120 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 8,\ c = 15$.

389. Condiţie $x \in R_+$ şi x+8 este lungimea ipotenuzei (inegalitatea laturilor unui triunghi). Conform teoremei lui Pitagora:

Scanned with OKEN Scanner

$(x+8)^2 = x^2 + (x+7)^2$,

cu soluţiile: $x_1 = 5 \in R_+, x_2 = -4 \notin R_+$.

390. Observăm ca $AB^2 + AC^2 = BC^2$, deci triunghiul este dreptunghic cu catetele AB, AC. Aria sa este $\frac{AB \cdot AC}{2} = 24$.

391. Dacă a este lungimea laturii, atunci înălţimea este $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $a = 6$.

Astfel aria este $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

392. $A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow l = 2$. Finalizare: $P = 3l \Rightarrow P = 6$.

393. Se obţine imediat că măsura unghiului C este $30°$, şi aplicând teorema unghiului de $30°$ în triunghiul ABC $AB = 4$.

În triunghiul ABC, folosind teorema lui Pitagora obţinem că $AC = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

394. Triunghiul este dreptunghic isoscel şi notând cu a lungimea catetei sale avem că aria lui este $\frac{a^2}{2}$ de unde $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$.

395. Ipotenuza este 6. Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză, rezultă mediana este 3.

396. Avem $tg\,3x - tg\,x = \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x}$, iar de aici rezultă că

$$tg\,3x - tg\,2x - tg\,x = \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 4x + \cos 2x} = tg\,2x \cdot \frac{\sin x \sin 3x}{\cos x \cos 3x} = tg\,x \cdot tg\,2x \cdot tg\,3x.$$

397. Ecuaţia dată este echivalentă cu $\cos x(5 - 2\sin x) = 0$. Deoarece $\sin x \in [-1,1], \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $5 - 2\sin x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, obţinem ecuaţia $\cos x = 0$ care are ca mulţime de soluţii $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Deoarece trebuie ca $x \in [-5,5]$, deducem că ecuaţia $\sin 2x = 5\cos x$ are mulţimea de soluţii $x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

398. Avem $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; și

$\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\frac{1}{2}$. Așadar,

$\sin 150^\circ - \cos 120^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

399. Avem $\sin 315^\circ = -\sin(360^\circ - 315^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

400. Cum $a \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, va rezulta $\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -\frac{5}{13}$. Din faptul că $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $\sin b = -\sqrt{1-\cos^2 b} = \frac{3}{5}$. Atunci

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b = -\frac{56}{65}$.

401. $\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15} - \sin\frac{3\pi}{15}\sin\frac{2\pi}{15} = \cos\left(\frac{3\pi}{15} + \frac{2\pi}{15}\right) = \frac{1}{2}$.

402. $\sin\frac{7\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18} = \sin\left(\frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{18}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

403. Cum $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, va rezulta $\sin a = -\sqrt{1-\cos^2 a} = -\frac{5}{13}$. Din faptul că $b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ rezultă $\cos b = -\sqrt{1-\sin^2 b} = -\frac{12}{13}$. Atunci

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{120}{169}$.

404. Avem

$$\sin\frac{\pi}{36}\cos\frac{7\pi}{36}\sin\frac{13\pi}{36} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{8\pi}{36} - \sin\frac{6\pi}{36}\right)\sin\frac{13\pi}{36} = \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{36}\sin\frac{13\pi}{36} - \frac{1}{4}\sin\frac{13\pi}{36}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{36} - \cos\frac{21\pi}{36}\right) - \frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{36} = -\frac{1}{4}\cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}$$

405. $x \in \left\{(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

406. $x \in \left\{ \text{arc}tg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

407. Fie $x > 0$. Notăm cu $\alpha = arctg\, x$ şi cu $\beta = arctg\, \frac{1}{x}$. Cum $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem că $\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $tg\, \beta = \frac{1}{x}$, iar $tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\, \alpha = \frac{1}{tg\, \alpha} = \frac{1}{x}$.

Prin urmare, obţinem $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, de unde rezultă că $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, adică $arctg\, x + arctg\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \forall\, x > 0$.

408. $x \in \left\{ (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Cum $x \in [0, 2\pi)$, rezultă că ecuaţia $\sin x = -\frac{1}{2}$ are mulţimea soluţiilor $x \in \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$.

1.6. Progresii

409. $a_2 = a_1 + r \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 9 - 7 = 2$; $a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_5 = 7 + 4 \cdot 2 = 15$.

410. $r = 6 \Rightarrow a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot r = 55$.

411. $(a_n)_{n \geq 1}$ progresie aritmetică $\Rightarrow \exists r$ astfel încât $a_1 + 2r = 5$ şi $a_1 + 5r = 11 \Rightarrow r = 2$ si $a_1 = 1$ deci $a_9 = a_1 + 8r = 17$;

412. $a_1 = 6; a_2 = 5 \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 5 - 6 = -1$, $a_7 = a_1 + 6r = 6 + 6(-1) = 0$.

413. Avem $a_2 = a_1 + r$, unde r este raţia progresiei aritmetice.
Rezultă $a_1 = a_2 - r = 5 - 3 = 2$, iar $a_8 = a_1 + 7r = 2 + 7 \cdot 3 = 23$.

414. Din $a_5 = a_1 + 4r$, rezultă $13 = 1 + 4r$, deci $r = 3$, prin urmare $a_{2008} = a_1 + 2007r = 1 + 2007 \cdot 3 = 1 + 6021 = 6022$.

415. $a_{n+1} - a_n = 2n + 5 - 2n - 3 = 2, \forall\, n \in N^*$.

416. $r = 13 - 9 = 4$. Atunci $2x + 1 = 1 + 4 \Rightarrow x = 2$.

417. $a_{10} - a_2 = 8r \Rightarrow r = 2$

418. $a_1 = 3$.

419. Termenul general al unei progresii aritmetice este $a_0 + (k-1)r$, unde r este raţia şi a_0 primul termen, de unde al patrulea termen este 2+(4-1)3=11.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

420. Raţia progresiei este $r = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$, suma primilor 10 termeni este

$S_{10} = \frac{10(2\cdot 2 + 9\cdot 2)}{2} = 5\cdot 22 = 110$.

421. $a_1 = 1,\ \ a_2 = 3 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a_5 = 1 + 4\cdot 2 = 9\ \ S_5 = \frac{(1+9)\cdot 5}{2} = 25$.

422. $a_1 = 2,\ a_2 = 5 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_6 = a_1 + 5r = 2 + 15 = 17$,

atunci $S_6 = \frac{(a_1 + a_6)\cdot 6}{2} = 57$.

423. $a_7 = a_1 + 6r = 7 + 6r$

$7 + 6r = 37 \Rightarrow 6r = 30 \Rightarrow r = 5;$

$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} = (2a_1 + 9r)\cdot 5 = (14 + 45)\cdot 5 = 59\cdot 5 = 295$.

424. $a_3 - a_1 = 2r \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = 2$. $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 3 + 18 = 21$.

$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})\cdot 10}{2} = \frac{24\cdot 10}{2} = 120$.

425. $26 = 2 + 3\cdot 8$, de unde suma este $\frac{(2+26)\cdot 9}{2} = 126$.

426. $1+5+9+13+17+21+25 = 26\cdot 3 + 13 = 91$.

427. Se observă că este suma primilor 11 termeni ai progresiei aritmetice $1 + 2k, k \in \mathbf{N}$

aşadar suma noastră este $\frac{11(1+21)}{2} = 11^2 = 121$.

428. Este suma primilor 10 termeni ai progresiei $2 + 10k$ adică este $\frac{10(2+92)}{2} = 470$.

429. Termenii sumei sunt într-o progresie aritmetică cu raţia $r = 4$ şi

$S = 1+5+9+...+2009 = \frac{(1+2009)503}{2} = 1005\cdot 503 = 505515$.

430. $1+11+21+...+111 = 12+10+20+...+110 = 672$.

431. $4 = \frac{(x-3)+(x+3)}{2} \Leftrightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4.$

432. Dacă 3 numere *a, b, c* sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice

atunci $b = \frac{a + c}{2}$. Obţinem ecuaţia: $2x - 2 = \frac{(x - 1) + (x + 3)}{2} \Rightarrow$

$2x - 2 = \frac{2x + 2}{2} \Rightarrow 2x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = 3$.

433. $\div x-1, x+1, 2x-1 \Leftrightarrow (x+1) = \frac{(x-1)+(2x-1)}{2} \Leftrightarrow 2x+2 = 3x-2$ cu soluţia $x = 4$.

434. $x+1, 2x-3, x-3$ sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow 2x-3 = \frac{(x+1)+(x-3)}{2}$

$\Leftrightarrow 4x-6 = 2x-2 \Leftrightarrow x = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

435. $3 = b_2 - b_1 = b_1 r - b_1 = 3(r-1) \Rightarrow r = 2$.

436. $(b_n) = b_1 \cdot q^{n-1}$ este termenul general al progresiei geometrice $b_1 = 16$, $q = \frac{1}{2} \Rightarrow b_4 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{16}{8} = 2$.

progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_1 = 1$ şi $b_2 = 3$. Să se calculeze b_4

437. Raţia este 3. Deci $b_4 = 3^3 = 27$.

438. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b_9 = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1}{9}$.

439. $b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow 6 = 2q \Rightarrow q = 3$ .Deci $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 162$.

440. $\frac{b_1}{b_4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{b_1}{b_1 \cdot q^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow b_1 = \frac{3}{2}$.

441. Avem $a_1 + a_2 = 8$ şi $a_2 - a_1 = 4$. $2a_2 = 12 \Rightarrow a_2 = 6 \Rightarrow a_1 = 2$

$q = \frac{a_2}{a_1} = 3 \Rightarrow a_3 = 18 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 26$.

442. $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right)\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^2\right) = -8$.

443. $b_1 = 1$, $b_2 = -2$, $b_3 = 4 \Rightarrow b_1\, b_2\, b_3 = -8$.

444. a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei proporţii geometrice dacă şi numai dacă: $b^2 = ac$.

Obţinem ecuaţia $(x+1)^2 = (x-1)(2x+5) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, 2\}$.

445. 1, x, x + 2, 8, … este o progresie geometrică <=>

$$\begin{cases} x^2 = 1 \cdot (x+2) \\ (x+2)^2 = 8x \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

Prima ecuaţie are soluţiile $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ iar a doua $x_1 = x_2 = 2$. Soluţia problemei este x=2.

446. Condiţia ca *a, b, c* termenii consecutivi ai unei progresii geometrice, este:

$b^2 = a \cdot c \Rightarrow (x+7)^2 = (5-x) \cdot (3x+11) \Leftrightarrow x = -3, x = \frac{1}{2}$.

447. Echivalent cu a arăta că $f^2(0) = f(1) f(-3) \Leftrightarrow 3^2 = 1 \cdot 9$, adevărat.

448. Avem $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^6 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$.

449. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^7 = \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 255$.

450. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} = \frac{1 - \frac{1}{3^5}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{239}{162}$.

451. $2^x - 1, 4^x, 2^{x+1} + 3$ sunt în progresie aritmetică <=>

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

$\frac{2^x-1+2^{x+1}+3}{2}=4^x \Leftrightarrow 2\cdot 4^x=2^x+2^x\cdot 2+2$

Notând $t=2^x, t>0$ obţinem $2\cdot a^2-3\cdot a-2=0$

de unde $a=-\frac{1}{2}<0$ şi $a=2\Rightarrow x=1$.

452. Termenul din mijloc este media aritmetică a vecinilor săi

$\Rightarrow 4^a+1=\frac{2^a+2^{a+2}}{2}\Rightarrow 2\cdot 2^{2a}+2=2^a+2^a\cdot 2^2$.

Notăm $2^a=t>0\Rightarrow 2t^2-5t+2=0$ cu soluţiile $t_1=\frac{1}{2}$ şi $t_2=2$.

Deci $2^a=\frac{1}{2}\Rightarrow a_1=-1$ şi $2^a=2\Rightarrow a_2=1$.

453. Avem $2\cdot 3^{x+1}=6\cdot 3^x=(3^x-1)+(5\cdot 3^x+1)$ deci termenii formează o progresie aritmetică.

454. Avem numerele: $\log_2 2=1$, $C_3^1=3$, 5. Cum $3=\frac{1+5}{2}$ obţinem că cele trei numere sunt în progresie aritmetică.

455. $1\cdot\sqrt[3]{64}=4$; $\log_3 9=2\Rightarrow 2^2=4$.

456. Avem condiţia $\lg\sqrt{x}+\lg x=2\frac{3}{2}\Leftrightarrow \lg x\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x\sqrt{x}=10^3$ de unde $x=100$.

457. Condiţia enunţului se echivalează cu $2f(2)=f(1)+f(4)\Leftrightarrow 2\log_2 2=\log_2 1+\log_2 4$, relaţie evidentă.

1.7. Mulţimi de numere. Probleme de numărare. Probabilităţi

458. Dacă notăm cu V mulţimea elevilor cărora le place voleiul şi cu B mulţimea elevilor cărora le place baschetul, mulţimea celor care îndrăgesc ambele sporturi este $B\cap V$. Avem relaţia $|B\cup V|=|B|+|V|-|B\cap V|$ aşadar $|B\cap V|=18+15-28=5$.

459. Fie x preţul iniţial al produsului. $x-\frac{10}{100}x=99\Rightarrow\frac{9}{10}x=99\Rightarrow x=110$.

460. $\frac{5000}{10000}=50\%$.

461. $a=25\%b\Rightarrow 4a=b\Rightarrow 5a=(a+b)\Leftrightarrow a=20\%(a+b)$.

462. Fie x preţul produsului înainte de scumpiri.

După o scumpire de 10% preţul este $x+x\frac{10}{100}=x+x\frac{1}{10}$

După a doua scumpire preţul va fi $x+x\frac{1}{10}+\left(x+x\frac{1}{10}\right)\frac{2}{10}=660$.

Rezolvând ecuaţia obţinem $x=500$.

Scanned with OKEN Scanner

463. Preţul de vânzare este egal cu preţul produsului la care se adugă TVA-ul, adică 19% din acest preţ. În consecinţă, $P+19\%P=238 \Rightarrow P=200$ lei , iar TVA=38 lei.

464. $1=3\cdot 0+1;\quad 4=3\cdot 1+1;\quad \ldots 40=3\cdot 13+1.$

Mulţimea A are 14 elemente

465. Fie $N=\overline{szu}$. Fiecare cifră poate fi aleasă în 2 moduri, deci conform regulii produsului găsim $2^3=8$ numere. Altfel, se numără funcţiile $f:\{s,z,u\}\to\{1,2\}$, 2^3 funcţii.

466. Numărul numerelor de forma $\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,2,3,4\}$ este $4^2=16$.

467. $P_4=4!=24$ numere.

468. $3!=6$ numere.

469. $A_7^3=7\cdot 6\cdot 5=210$.

470. $A_4^3=24$.

471. Se pot forma $A_4^3=24$ numere de câte trei cifre distincte din mulţimea $\{1,2,3,4\}$.

472. Nr. de 4 cifre distincte $=A_5^4$.

473. $A_4^2=12$.

474. În $C_6^2=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}=\dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4!}=15$ moduri.

475. Numărul submulţimilor cu 2 elemente este $C_4^2=\dfrac{4!}{2!2!}=6$.

476. Deoarece oricare 3 puncte din cele 10 sunt necoliniare, numărul dreptelor care trec prin cel puţin două puncte din cele 10 este $C_{10}^2=45$.

477. $C_5^3=10$.

478. Numărul tuturor submulţimilor de 2 elemente ce se pot forma cu elemente din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$ este $C_5^2=10$.

479. Numărul submulţimilor cu 2 elemente ale unei mulţimi care are 6 elemente este $C_6^2=\dfrac{6\cdot 5}{2}=15.$

480. Evident, numărul căutat este $C_6^2=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}=\dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 1\cdot 2}=15$.

481. Numărul de submulţimi cu p elemente ale unei mulţimi cu n elemente ($n\geq p$) este C_n^p. Deci $C_n^2=6\Leftrightarrow\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=6\Leftrightarrow n^2-n-12=0, n\geq 2\Rightarrow n=4$.

482. Cele 3 litere distincte pot fi alese în $C_4^3=4$ moduri şi pot fi aranjate în $3!$ moduri. Deci avem $4!$ cuvinte.

483. $\dfrac{2!+3!}{C_8^1}=\dfrac{2+6}{8}=1.$

Scanned with OKEN Scanner

484. $P_3 - C_4^2 = 3! - \frac{4\cdot 3}{2} = 6 - 6 = 0$.

485. $2\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!} - \frac{3!}{1!} = 6 - 6 = 0$.

486. $C_2^3 + P_3 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} + 1\cdot 2\cdot 3 = 3 + 6 = 9$.

487. $A_5^2 - P_3 = \frac{5!}{3!} - 3! = 20 - 6 = 14$

488. $C_4^2 + C_4^3 = \frac{4(4-1)}{2} + 4 = 6 + 4 = 10$.

489. $C_6^2 - C_6^4 = C_6^4 - C_6^4 = 0$.

490. Deoarece $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avem $C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$.

Pentru $n = 10$ obţinem $C_{10}^9 = 10$, iar pentru $n = 9$ obţinem $C_9^8 = 9$.

Atunci $C_{10}^9 - C_9^8 = 10 - 9 = 1$.

491. $C_4^2 + C_4^3 = \frac{4\cdot 3}{2} + C_4^1 = 6 + 4 = 10$.

492. $C_8^5 - C_8^3 = C_8^5 - C_8^{8-3} = 0$.

493. Utilizând formula combinărilor complementare $C_n^k = C_n^{n-k}$ se obţine $C_8^3 - C_8^5 = 0$.

494. Folosind $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pentru n=2008 şi k=2 rezultatul cerut este 0.

495. $C_{1000}^2 - C_{1000}^{998} = \frac{1000!}{2!998!} - \frac{1000!}{998!2!} = 0$.

496. $\left(C_{2008}^2 - C_{2007}^2\right) - C_{2007}^1 = C_{2007}^1 - C_{2007}^1 = 0$.

497. $C_5^4 = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5$, $A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 5! = 120$ de unde obţinem $C_5^4 + A_5^4 = 125$.

498. $P_2 = 2!, A_3^1 = \frac{3!}{(3-1)!}, C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!}$, deci $\frac{P_2 + C_4^1}{A_3^1} = \frac{2+4}{3} = 2$.

499. $C_7^5 = C_6^5 + C_6^4$ (formula de recurenţă) $\Rightarrow C_7^5 - C_6^5 - C_6^4 = 0$ (sau prin calcul direct).

500. $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 2^{4-1} - 2^{4-1} = 0$.

501. $C_5^2 - A_4^2 + 6 = 10 - 12 + 6 = 4$.

502. $C_5^1 + 1 = \frac{5!}{4!\cdot 1!} + 1 = 5 + 1 = 6 = 3!$

503. $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 5 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{6} + 1 = 16 = 2^4$.

504. Din calcul direct $a = b = 8$.

Scanned with OKEN Scanner

505. $C_{n+1}^{n}-C_{n+1}^{1}=\dfrac{(n+1)!}{n!\cdot(n+1-n)!}-\dfrac{(n+1)!}{1!\cdot(n+1-1)!}=0$.

506. $\dfrac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{6\cdot 5!}-\dfrac{7!\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 7!}=56-36=20\in IN$

507. $\dfrac{n!}{12}=(n-2)!$, condiţii de existenţă: $\begin{cases}n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2\end{cases}$. Împărţind ecuaţia prin $(n-2)!$ se obţine $n(n-1)=12=3\cdot 4$, deci singura este n = 4.

508. Condiţii: $n-3\geq 0$ şi $n-5\geq 0$, de unde rezultă că $n\geq 5$, $n\in\mathbb{N}$.

$\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}=6\Rightarrow\dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}=6$.

Obţinem $(n-3)(n-4)=6$ de unde $n^2-7n+6=0$ ecuaţie ce are soluţiile:

$n_1=1$ şi $n_2=6$. Dintre acestea cea care verifică condiţia $n\geq 5$ este $n_2=6$.

509. După simplificare ecuaţia devine $(n+1)(n+2)=56$, $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=6$.

510. Din condiţiile de existenţă avem $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$.

Atunci: $\dfrac{n!}{(n-2)!}=12\Rightarrow\dfrac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{(n-2)!}=12\Rightarrow n^2-n-12=0\Rightarrow n_1=4, n_2=-3$; doar $n=4$ este soluţie.

511. $C_n^2=\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ deci ecuaţia devine $n^2-n-56=0$ cu unica soluţie acceptabilă $n=8$.

512. $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. $C_n^2=6\Leftrightarrow\dfrac{n(n-1)}{2}=6\Leftrightarrow n^2-n-12=0\Rightarrow n_1=-3\notin\mathbb{N}$, $n_2=4$

513. $C_{n+2}^{n+1}=2, n\in\mathbb{Z}, n\geq -1\Leftrightarrow C_{n+2}^{1}=2\Leftrightarrow n+2=2\Leftrightarrow n=0$;

514. $C_x^2=2\Leftrightarrow\dfrac{x(x-1)}{2}=21, x\in\mathbb{N}^*, x\geq 2\Leftrightarrow x(x-1)=42, x\in\mathbb{N}^*, x\geq 2\Leftrightarrow x=7$.

515. Condiţia de existenţă este $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$. Ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=\dfrac{n!}{1!(n-1)!}+2\Leftrightarrow\dfrac{n(n-1)}{2}=n+2\Leftrightarrow n^2-3n-4=0$. Soluţiile sale sunt $n_1=4, n_2=-1$, doar numărul n=4 verificând condiţia iniţială.

516. Avem $C_n^0+C_n^1=8\Leftrightarrow(1+n=8)$ şi $n\geq 1\Leftrightarrow n=7$.

Putem considera şi funcţia injectivă (strict crescătoare)

$f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*, f(n)=C_n^0+C_n^1$, pentru care $f(7)=8$.

517. $A_n^1=C_n^1\Rightarrow 2C_n^1=10\Rightarrow C_n^1=5\Rightarrow\dfrac{n!}{(n-1)!}=5\Rightarrow n=5$.

518. $2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}\leq n+8\Leftrightarrow n^2-2n-8\leq 0\Leftrightarrow n\in[-2,4]$. Din $n\in\mathbb{N}, n\geq 2\Rightarrow n\in\{2,3,4\}$.

Scanned with OKEN Scanner

519. $C_{17}^{x} \le C_{17}^{x-2} \Leftrightarrow x \ge \frac{57}{6}$ si $x \in [2,17], x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{10,11,12,13,14,15,16,17\}$.

520. $a = \frac{6(6-1)}{2} - \frac{4(4-1)}{2} = 15-6 = 9$ şi b= $log_2(2 \cdot 2^{-1}) = log_2 1 = 0$, de unde a>b.

521. Cazuri posibile $= 2^3 = 8$ Cazuri favorabile $= 2 \Rightarrow P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

522. $\{11,12,13,....,20\}$ .Numerele prime sunt 11,13,17,19.Probabilitatea ceruta este $\frac{2}{5}$.

523. Există 90 de numere de 2 cifre din care cuburi perfecte sunt: $3^3 = 27, 4^3 = 64$, deci 2 numere. Obţinem astfel probabilitatea: $P = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$.

524. Probabilitatea= $\frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$.

Cele favorabile sunt 11, 22, 33, iar cele posibile 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

$p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

525. Din cele 9 numere din A doar 2 sunt raţionale $\sqrt{4}, \sqrt{9}$, deci probabilitatea e $\frac{2}{9}$.

526. Mulţimea A are 10 elemente, 8 dintre care sunt iraţionale, deci probabilitatea este $\frac{4}{5}$.

527. În mulţimea A={1, 2,.....30} există 3 cuburi perfecte, astfel extrăgând radical de ordinul 3 din celelalte, vom obţine numai numere iraţionale, deci avem $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ probabilitate ca numărul să fie raţional.

528. Avem rezultatele: $\sin 30^0 = \frac{1}{2}, \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Atunci: $p = \frac{1}{3}$.

529. Egalitatea este adevărată pentru n = 2 şi n = 4 => $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

530. Cum inegalitatea $n(n-1) \ge 20$ este adevărată pentru $n \in \{5,6\}$, probabilitatea cerută este $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

531. $1! < 5, 2! < 5, 3! > 5, 4! > 5$. Deci probabilitatea este $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

532. 0!, 1!, 2!, 3!, 4! < 50, 5! = 120>50 $\Rightarrow p = \frac{5}{6} = 0,8(3)$.

533. p= $\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

534. Se verifică uşor că nr. 2,3 verifică şi p=$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

535. $P=\frac{4}{5}$, obţinut prin verificări.

536. Probabilitatea este $\frac{1}{4}$.

537. Inegalitatea e satisfăcută de $n=1,2,4$. Probabilitatea e $\frac{3}{4}$.

538. Cum $P_3=3!=6, A_3^1=3, C_4^3=4$, probabilitatea căutată este $\frac{2}{3}$.

539. $C_4^2=6$, $C_5^2=10$, $C_4^3=4$. $P=\frac{1}{3}$.

540. Avem $T_3=T_{2+1}=C_{10}^2\left(\sqrt{x}\right)^{10-2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=45x^4\frac{1}{x^{2/3}}=45x^3\sqrt[3]{x}$.

541. Avem $T_{k+1}=C_{19}^k\left(\sqrt[3]{12}\right)^{19-k}3^k=C_{19}^k 12^{\frac{19-k}{3}}3^k$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,19\}$. Impunem condiţia $\frac{19-k}{3}\in\mathbb{N}$ şi obţinem $k\in\{1,4,7,10,13,16,19\}$. Prin urmare, dezvoltarea are 7 termeni raţionali. Rezultă că dezvoltarea va avea $20-7=13$ termeni iraţionali.

542. $T_{k+1}=C_5^k\left(x^2\right)^{5-k}a^k=C_5^k x^{10-2k}a^k$, $C_5^0=C_5^5=1$, $C_5^1=C_5^4=5$, $C_5^2=C_5^3=10$. Atunci $\left(x^2+a\right)^5=x^{10}+5x^8a+10x^6a^2+10x^4a^3+5x^2a^4+a^5$.

543. Dezvoltarea are şapte termeni, iar de aici rezultă că termenul din mijloc este $T_4=T_{3+1}=120\sqrt{6}$.

544. Cum $64=2^6$, din egalitatea $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^6$ obţinem $2^n=2^6$, adică $n=6$. Termenul de rang trei este $T_3=T_{2+1}=C_6^2\left(x^2\right)^4(-y)^2=15x^8y^2$.

545. Din relaţia de recurenţă între termenii T_{k+1} şi T_k rezultă că $\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{100-k+1}{k}$. Să presupunem că T_{k+1} este cel mai mare termen. Atunci $\frac{100-k+1}{k}\geq 1$ şi obţinem $k\leq 50$. Pentru $k\leq 50$ avem $T_{k+1}\geq T_k$, iar pentru $k\geq 50$ avem $T_{k+1}\leq T_k$. Prin urmare, cel mai mare termen se obţine pentru $k=50$, adică termenul T_{51}.

Scanned with OKEN Scanner

1.8. Elemente de geometrie şi calcul vectorial

546. $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=(-1-2)\vec{i}+(3+1)\vec{j}=-3\vec{i}+4\vec{j}$ deci $a=-3$ şi $b=4$.

547. Avem $\overrightarrow{v_A}=4\vec{i}-8\vec{j},\overrightarrow{v_B}=6\vec{i}+3\vec{j}$ de unde $\overrightarrow{v_A}+\overrightarrow{v_B}=(4+6)\vec{i}+(-8+3)\vec{j}=10\vec{i}-5\vec{j}$.

548. $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j},\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$

$5\vec{u}+3\vec{v}=5(-3\vec{i}+2\vec{j})+3(5\vec{i}-\vec{j})=-15\vec{i}+10\vec{j}+15\vec{i}-3\vec{j}=0\cdot\vec{i}+7\vec{j}$ deci vectorul

$5\vec{u}+3\vec{v}=0\cdot\vec{i}+7\vec{j}\Rightarrow A(0,7)$.

549. Vectori $\vec{u}$ si $\vec{v}$ sunt coliniari dacă $\frac{2}{3}=\frac{a}{a-2}$, adică $a=-4$.

550. $\vec{v},\vec{w}$ coliniari $\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v}=\alpha\vec{w}\Leftrightarrow 2\vec{i}+3\vec{j}=\alpha(-\vec{i}+m\vec{j})\Leftrightarrow$

$-\alpha=2$ şi $\alpha m=3\Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$.

551. $\left.\begin{array}{l}B(3,5)\Rightarrow\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+5\vec{j}\\A(1,-1)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j}\end{array}\right|\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{OC}=4\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow C(4,4)$.

552. Se ia mijlocul M' al lui BC şi se demonstrează relaţia similară de unde $\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{AM}$ adică $M=M'$.

553. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

554. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$, de unde obţinem $\frac{AB}{BC}=2$.

555. Fie M mijlocul segmentului BC. În acest caz $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, dar $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$,

deci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AO}$, de unde $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}=0$.

556. Fie R mijlocul arcului BC.

Suma $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OR}$ se obţine prin regula paralelogramului.

Pe de altă parte: $m\left(\widehat{BAO}\right)=30^\circ=m\left(\widehat{BAR}\right)$, deci A,O şi R sunt coliniare adică $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OR}$. Astfel obţinem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{O}$.

557. $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Cum A, B, C, D necoliniare$\Rightarrow ABCD$ paralelogram.

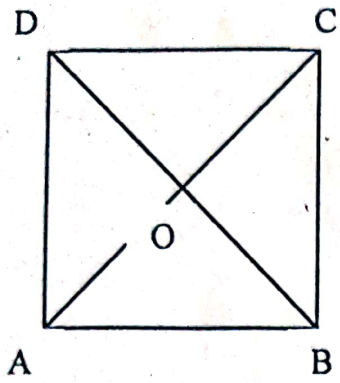
558. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=0$ deoarece $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$ şi $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$ (ABCD-paralelogram).

559. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow ABCD$ paralelogram.

($\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ sunt coliniari, au acelaşi sens şi aceiaşi lungime)

Scanned with OKEN Scanner

560.



$\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{0}$, $\vec{OB}+\vec{OD}=\vec{0}$ deci $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$.

561. Notăm O centrul cercului circumscris hexagonului dat

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO})=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$ deoarece $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}$.

562. Deoarece *ABCDEF* este hexagon regulat, avem *ABOF* paralelogram. După regula paralelogramului (de adunare), avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$.

563. Avem $\alpha=3\cdot 2-5\cdot 1=1, \beta=3\cdot(-3)-5\cdot(-2)=1$.

564. $\overrightarrow{OA}(2,-1) \Rightarrow A(2,-1); \overrightarrow{OB}(1,2) \Rightarrow B(1,2)$;

Coordonatele lui M se obţin din $\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{3}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. .

565. Triunghiul ABC este echilateral deci O este si centru de greutate.

Atunci $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow a=\frac{2}{3}$.

566. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (x_A-x_B)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=2(x_C-x_A)\vec{i}+2(y_C-y_A)\vec{j} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B-x_A=2(x_C-x_A) \\ y_B-y_A=2(y_C-y_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$ rezultă că *C* este mijlocul segmentului *AB*

567. Fie $C\in(AB), C(a,b)$. $\frac{CA}{CB}=2 \Leftrightarrow CA=2CB \Rightarrow \overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (2-a)\vec{i}+(1-b)\vec{j}=$

$=-2(-1-a)\vec{i}-2(2-b)\vec{j} \Rightarrow 2-a=2+2a$ si $1-b=-4+2b \Rightarrow C\left(0,\frac{5}{3}\right)$.

568. Trebuie să avem $m^2+m+m=0, m(m+2)=0$, de unde $m=0, m=-2$.

569. $A\in d \Leftrightarrow 2\cdot 2-3+m=0 \Rightarrow m=-1$.

570. $\begin{matrix} A(a,b)\in d \\ B(a-1,4)\in d \end{matrix}$ $(d): x+y-5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-5=0 \Rightarrow b=3 \\ a-1+4-5=0 \Rightarrow a=2 \end{cases}$

571. Dreapta *AB* are ecuaţia $y=-x+2$ sau $x+y-2=0$. Adică $m=1, n=-2$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

572. $AO=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$.

573. $A(2,3);B(5,-1)\quad AB=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=5$.

574. $AB=\sqrt{(a-5)^2+(a+2)^2}=5\Leftrightarrow a^2-3a+2=0\Leftrightarrow a\in\{1;2\}$.

575. Se utilizează formula distanţei dintre două puncte:

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_a)^2}=\sqrt{16+9}=5.$

576. $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

577. d(A,B)=$\sqrt{(-3)^2+(a+1)^2}$ =5⇒9+(a+1)²=25 , (a+1)²=16, a+1= ±4. Dar a>0 , rezultă a=3.

578. $d(a,b)=\sqrt{(2-7)^2+(1-a)^2}\Rightarrow 25+(1-a)^2=169\Rightarrow(1-a)^2=144\Rightarrow 1-a=\pm 12$

De unde rezultă $a\in\{-11,13\}$.

579. $d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=|m+2|\sqrt{2}$. Obţinem $m\in\{-6,2\}$.

580. $OM=\sqrt{4+m^2}=\sqrt{5}$, de unde $m\in\{\pm 1\}$.

581. Avem: $AB=\sqrt{(1-5)^2+(2-2)^2}=4$; $BC=\sqrt{(5-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{13}$;

$CA=\sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{13}$. Atunci perimetrul este: $P=4+\sqrt{13}+\sqrt{13}=4+2\sqrt{13}$.

582. Distanţa dintre două puncte $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ în reperul cartezian este dată de formula $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

aşadar $AB=\sqrt{10},BC=\sqrt{13},CA=1$ de unde perimetrul este $1+\sqrt{10}+\sqrt{13}$.

583. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$.

Avem $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5-3}{2}=1$ şi $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-4+6}{2}=1$, deci $M(1,1)$.

584. Se cunosc coordonatele mijlocului segmentului [AB], anume $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

În cazul nostru particular, avem $M\left(\frac{2+4}{2},\frac{1+(-3)}{2}\right)$, deci $M(3,-1)$.

585. Fie M mijlocul segmentului AB rezultă că M are coordonatele $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=3$ şi $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=3\Rightarrow M(3;3)$.

Scanned with OKEN Scanner

586. C mijlocul lui [AB] $\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_C - x_A = 4 \\ y_B = y_C - y_A = 6 \end{cases}$, adică B (4, 6).

587. Fie $M(\alpha,\beta) \in AB$ a.î. $MA = MB \Rightarrow \alpha = \frac{1+5}{2} = 3; \beta = \frac{-1-3}{2} = -2 \Rightarrow M(3;-2)$.

588. x=4, y= -1.

589. $2x_C = x_A + x_B \Rightarrow 10 = m^2 + 1 \Rightarrow m \in \{\pm 3\}$.

590. Mijlocul lui AB este M(0;0) $\Rightarrow$ CM= $\sqrt{5}$.

591. M mijlocul lui [BC] => M(1,1) $AM = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$.

592. Fie M mijlocul laturii BC $\Rightarrow x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 3,\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = 0 \Rightarrow M(3,0)$.

Atunci $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

593. Dacă M este mijlocul lui [BC] atunci:

$M\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ şi $AM = \sqrt{\left(x_M - x_A\right)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

594. Fie $M \in (BC)$, astfel încât $BM \equiv MC \Rightarrow$

$x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2,\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$.

$A(2,4); M(2,0)$; lungimea mădianei $AM = \sqrt{(2-2)^2 + (0-4)^2} = 4$.

595. $M(1,-2) \Rightarrow AM = \sqrt{(1-1)^2 + (1+2)^2} = 3$.

596. $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{5}{2}; y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow OM = \sqrt{x_M{}^2 + y_M{}^2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

597. Mijlocul segmentului AB are coordonatele $M\left(\frac{5}{2},2\right)$

$\Rightarrow AM = \sqrt{(\frac{5}{2}-5)^2 + (2+4)^2} = \dfrac{13}{2}$.

598. $AB = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2} = \sqrt{1 + (a-2)^2}$

$AC = \sqrt{\left(x_A - x_C\right)^2 + \left(y_A - y_C\right)^2} = \sqrt{16 + (a-5)^2}$ $BC = \sqrt{\left(x_B - x_C\right)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2} = \sqrt{34}$.

Avem ΔABC dreptunghic în $A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 34 = 1 + (a-2)^2 + 16 + (a-5)^2 \Leftrightarrow$

$a^2 - 7a + 6 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 6$.

599. $l = AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-(-2))^2} = 5$, $S_{\triangle ABC} = l^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 25\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

600. AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, obţinem AB: $y = 3x - 5$.

601. Ecuaţia dreptei determinate de 2 puncte distincte este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 1 + 2y - 4 - x - y = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0.$$

602. $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB: x + y + 1 = 0$.

603. $d \cap Oy = \{B(0,4)\} \Rightarrow (AB): 4x + 3y - 12 = 0$.

604. Fie M mijlocul lui $AB \Rightarrow M(3;4)$.

Ecuaţia dreptei CM este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 7 = 0$.

605. $\frac{x-2}{1-2} = \frac{y+1}{-2+1} \Rightarrow AB: x - y - 3 = 0$.

606. $AB: \frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$ deci $AB: \frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{5}$ adică $AB: x - y + 1 = 0$.

607. Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte este:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y-0}{2-0} = \frac{x-4}{0-4} \Rightarrow d: x + 2y - 4 = 0.$$

608. AB: $\frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B}$; $\frac{y-a}{-1-a} = \frac{x+2}{2+2} \Rightarrow \frac{y-a}{-1-a} = \frac{x+2}{4}$.

AB: 4y-4a=-x-2-ax-2a

4y-2a = -x-ax-2

$0(0,0) \in AB \Rightarrow 0 - 2a = 0 - 0 - 2 \Leftrightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1$.

609. A(2,3) atunci B(2,-3), C(-2,3) $\Rightarrow$ BC = $\sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2} = 2\sqrt{13}$.

610. Dacă notăm cu $A'(x_{A'}, y_{A'})$ simetricul punctului A faţă de B, atunci B este mijlocul segmentului AA' şi avem:

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{2 + x_{A'}}{2} \\ -2 = \frac{-4 + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 + x_{A'} \\ -4 = -4 + y_{A'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 0 \\ y_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(0,0).$$

611. Coordonatele sunt $(1,3)$.

Scanned with OKEN Scanner

612. Punctul $C(a,b)$ satisface simultan condiţiile

$\begin{cases} C \in AB \\ |CB| = |AB| \end{cases}$, adică punctul $B(-2,1)$ este mijlocul segmentului $|AC|$.

Se rezolvă sistemul $\begin{cases} \frac{a+5}{2} = -2 \\ \frac{b+4}{2} = 1 \end{cases}$ şi se obţine punctul $C(-9,-2)$.

613. Fie M mijlocul lui $(BC) \Rightarrow M(\frac{3}{2};2)$. Fie S simetricul lui A fata de M. $\Rightarrow S(0,4)$.

614. Simetricul punctului M faţă de O este $N(2,-3)$, deci

$$MN = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}.$$

615. Ecuatia dreptei este $y - y_A = m(x - x_A) \Leftrightarrow y - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x - y = 0$.

616. $d: y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + 2 = 2(x-1)$, deci ecuaţia dreptei $d: 2x - y - 4 = 0$.

617. $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1+1}{1+1} = 1$

$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2-1}{0-1} = 3$

$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-2+1}{0+1} = -1$

$m_{AB} = -\frac{1}{m_{AC}} \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$, *dreptunghic.*

618. Triunghiul MON este dreptunghic în O, cu $ON = 3, OM = 4$ şi ipotenuza $MN = 5$.

Exprimând aria triunghiului în două moduri, obţinem $\frac{MN \cdot h_o}{2} = \frac{ON \cdot OM}{2} \Rightarrow h_o = \frac{12}{5}$.

619. Aplicăm formula $A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(8+0+0-4-12-0)| = 4$.

620. Avem formula $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$. Finalizăm $S_{\triangle ABC} = 2$.

621. A, B, C coliniare dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3+2m+3-9-m-2=0 \Rightarrow m-5=0 \Rightarrow m=5$.

622. Punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ şi $C(x_C, y_C)$ sunt coliniare dacă $\Delta = 0$,

unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ Obţinem ecuaţia (sub formă de determinant) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ m & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$6 + 15 + 4m - 3m - 10 - 12 = 0 \Rightarrow m = 1$.

623. A, B, C coliniare$<=> \frac{x_A - x_B}{x_A - x_C} = \frac{y_A - y_B}{y_A - y_C} <=> \frac{1-2}{1-3} = \frac{3-5}{3-m} <=> \frac{1}{2} = \frac{2}{m-3} <=> m-3=4 <=>$

$<=> m=7$.

624. Ecuaţia dreptei CD este $y = 2x - 4$.

Atunci AB are panta 2, adică ecuaţie de forma $y = 2x - d$.

Găsim $d = 5$,deci $a = 2 - 5 = -3$.

625. Condiţia de paralelism dă $m = -1$, deci ecuaţia este $(y-5) = -1(x-2)$ sau.

$x + y - 7 = 0$.

626. Dreapta $x + 2y + 5 = 0$ are ecuaţia echivalentă $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$. Deci dreapta căutată de noi are panta $-\frac{1}{2}$ adică e de forma $y = -\frac{x}{2} + c$ .Din $-3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + c$, găsim $c = -2$ .adică dreapta căutată este $y = \frac{-x}{2} - 2$ sau $x + 2y + 4 = 0$.

627. Panta dreptei date este egală cu -2, deci ecuaţia dreptei cerute este $y - 1 = -2(x-1) \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$.

628. $y = x - 2$.

629. Dreptele sunt paralele, deci au pante egale, deci $\frac{2}{a} = \frac{-1}{2}$ de unde $a = -4$.

630. Lăsând şi cititorului alte variante de soluţionare, o redăm pe cea care foloseşte noţiunea de pantă. Punctele A $\neq$ B determină dreapta de pantă $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 2$, pantă ce se deduce şi pentru dreapta determinată de punctele C $\neq$ D.

631. $d_1 \| d_2 \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{2}{a} \neq \frac{2}{4} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a_1 = -4; a_2 = 4$. 4 nu convine pentru că $\frac{2}{a} \neq \frac{2}{4}$, deci $a = -4$.

632. Pantele celor două drepte sunt: $m_1 = -\frac{2}{m}$ şi $m_2 = -m$.

Dacă $m = 0$, dreptele sunt perpendiculare,deci putem analiza doar cazul $m \neq 0$.

Condiţia ca dreptele să fie paralele este ca pantele lor să fie egale, adică $m^2 = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Valorile lui m sunt $\pm\sqrt{2}$.

633. Condiţia ca $ABDC$ să fie paralelogram este ca segmentele AD şi BC să aibă acelaşi mijloc adică $x_A+x_D=x_B+x_C$ şi $y_A+y_D=y_B+y_C$, de unde obţinem $D(6,5)$.

634. Deoarece $x_M+x_P=x_Q+x_N$ si $y_M+y_P=y_Q+y_N$ rezulta MNPQ paralelogram.

În plus MP=$\sqrt{2^2+6^2}$ =NQ deci MNPQ dreptunghi. Se observa ca MN≠NP adică nu este pătrat.

635. fie $d_1\cap d_2=\{A\}$; Soluţia sistemului determinat de ecuaţiile celor două drepte ne dă coordonatele punctului A, A(2,2); d(O,A)=$2\sqrt{2}$.

636. $d_1\cap d_2:\begin{cases}2x+y-4=0\\x+y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.

637. $\begin{cases}4x-6y-2=0\\2x+3y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y-1=0\\2x+3y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$; $M(2,1)$.

638. $\begin{cases}x+3y=1\\3x+2y=-4\end{cases}\Rightarrow d_1\cap d_2=\{A(-2;1)\}$.

639. y=0 ⇒ 2x-4=0 ⇒ x=2; d ∩Ox={(2,0)}.

640. Avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\sphericalangle BAC)=8\cdot8\cdot\cos60^\circ=32$.

641. Aplicând teorema cosinusului fiecărui unghi al triunghiului ABC, obţinem

$$\cos(\sphericalangle BAC)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos(\sphericalangle ABC)=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos(\sphericalangle ACB)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Atunci

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=bc\cos(\sphericalangle BAC)+ac\cos(\sphericalangle ABC)+ab\cos(\sphericalangle ACB)$$

$$bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ac\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

642. Avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\sphericalangle ABC)=6\cdot6\cdot\cos120^\circ=-18$.

643. Avem $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))=5\cdot6\cdot\cos\frac{\pi}{3}=15$.

644. Diagonala pătratului este $AC=6\sqrt{2}$. Atunci $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\cdot6\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=36$.

Scanned with OKEN Scanner

2.1. MATRICE

1. a) $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=A$;

$A^3=A^2\cdot A=A^2=A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2^2+bAI_2+aAI_2+abA_2=I_2+bA+aA+abA$

$=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+ab)$.

c) $X(1)+X(2)+...+X(2008)=I_2+A+I_2+2A+...+I_2+2008A=$

$=2008I_2+(1+2+...+2008)A=2008I_2+\frac{2008\cdot 2009}{2}\cdot A=2008(I_2+\frac{2009}{2}\cdot A)$.

2. a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow AB=BA$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}$; $B^2=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & -10\\ -10 & 5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2+B^2=\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}=25I_2$.

c) $C=A+B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I_2\Rightarrow C^n=(5I_2)^n=5^nI_2^n=5^nI_2$.

3. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$

b) Să se verifice că $A^2=aI_2+bA$, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Știind că $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu $AX=XA$, să se arate că există $m,n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $X=mI_2+nA$.

4. a) $A^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

b) $AB-2B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=0_2$.

c) $AXB=0_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=0_2\Leftrightarrow x+y+z+t=0$

$\Leftrightarrow x=\alpha,y=\beta,z=\gamma,t=-\alpha-\beta-\gamma,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

5. a) Avem $I_2' = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $I_2' + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Atunci $mA = \begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix}, (mA)' = \begin{pmatrix} ma & mc \\ mb & md \end{pmatrix} = mA'$.

c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $A + A' = O_2$.

Cum $A + A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$, rezultă $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, unde $b \in R$.

6. a) Prin calcul obţinem $A^2 = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & -a^2 \\ 2a^2 & -a^2 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} = a \cdot A$

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} \in M$ şi $B = \begin{pmatrix} 2b & -b \\ 2b & -b \end{pmatrix} \in M$. Atunci $AB = \begin{pmatrix} 2ab & -ab \\ 2ab & -ab \end{pmatrix} \in M$.

c) Folosind punctul a) avem că $A^3 = A^2 \cdot A = a \cdot A \cdot A = a \cdot A^2 = a^2 \cdot A$ deci

$A + A^2 + A^3 = (1 + a + a^2) A$.

Obţinem $(1 + a + a^2) A = 3A \Leftrightarrow (a^2 + a - 2) A = O_2 \Leftrightarrow a \in \{-2, 0, 1\}$.

7. a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) Fie $A, B \in M, A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu a,b,c,x,y,z $\in \mathbf{Z}$, atunci

$AB = \begin{pmatrix} 1 & x+a & z+ay+c \\ 0 & 1 & y+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$;

c) Fie $X \in M, X = \begin{pmatrix} 1 & m & p \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu m,n,p $\in \mathbf{Z}$. Din AX=XA pentru orice $A \in M$, obţinem

$\begin{pmatrix} 1 & m+a & p+an+c \\ 0 & 1 & n+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+m & c+mb+p \\ 0 & 1 & b+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de unde rezultă

$an = bm, \forall a, b \in \mathbf{Z} \Rightarrow m = 0, n = 0$. Deci $\exists p \in \mathbf{Z}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

8. a) $f(I_2)=I_2+{}^tI_2=2\cdot I_2$ **b)** Fie matricele $A,B\in M_2(R)$ în forma generală

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, ${}^tA=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$, ${}^tB=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{21}\\b_{12}&b_{22}\end{pmatrix}$.

Matricea $A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$ şi ${}^t(A+B)=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{21}+b_{21}\\a_{12}+b_{12}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$

${}^tA+{}^tB=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{21}+b_{21}\\a_{12}+b_{12}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$ rezultă relaţia cerută.

c) $f(A)=O_2\Rightarrow A+{}^tA=O_2\Rightarrow\begin{pmatrix}2a_{11}&a_{12}+a_{21}\\a_{21}+a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{11}=0,a_{22}=0,a_{21}=-a_{12}$ Deci $A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix},a\in R$.

9. a) Se verifică prin calcul direct.

b) $mI_3+nB=m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+n&n&n\\n&m+n&n\\n&n&m+n\end{pmatrix}$. Notând

$m+n=a,n=b\Rightarrow mI_3+nB=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ $m,n\in Z\Rightarrow a,b\in Z$. Rezultă $mI_3+nB\in G$

c) $A\in G\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}a^2+2b^2&2ab+b^2&2ab+b^2\\2ab+b^2&a^2+2b^2&2ab+b^2\\2ab+b^2&2ab+b^2&a^2+2b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Deci $a^2+2b^2=0\Rightarrow a=0,b=0$ (o sumă de pătrate nu poate fi nulă decât dacă fiecare termen este zero).

10.a) $f(0)+f(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}$;

b) $f(1)\cdot f(-1)=\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $f(x+y)=\begin{pmatrix}1 & x+y & 2(x+y)^2+2(x+y)\\ 0 & 1 & 4(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, iar

$$f(x)\cdot f(y)=\begin{pmatrix}1 & x & 2x^2+2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & 2y^2+2y\\ 0 & 1 & 4y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & x+y & 2x^2+4xy+2y^2+2x+2y\\ 0 & 1 & 4x+4y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=f(x+y).$$

11. a) Avem că $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & bc+d^2\end{pmatrix}$

b) Avem succesiunea de relaţii:

$$(a+d)\cdot A-(ad-bc)\cdot I_2=(a+d)\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-(ad-bc)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a^2+ad & ab+bd\\ ac+cd & ad+d^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}=A^2.$$

c) Din $A^2\cdot \mathrm{M}=\mathrm{M}\cdot A^2$ prin înlocuirea de la punctul anterior se obţine

$$\big((a+d)\cdot A-(ad-bc)\cdot I_2\big)\cdot \mathrm{M}=\mathrm{M}\cdot\big((a+d)\cdot A-(ad-bc)\cdot I_2\big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a+d)\cdot AM-(ad-bc)\cdot M=(a+d)MA-(ad-bc)\cdot M\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a+d)\cdot AM=(a+d)MA\Rightarrow AM=MA,\text{ pentru că } a+d\neq 0.$$

12. a) $A\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=1$ şi $b=\frac{1}{3}$;

b) $A^2=3I_2\Rightarrow B=I_2\Rightarrow A\cdot B=A$;

c) Fie $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in C(A)$, atunci $X\cdot A=A\cdot X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y & 3x\\ t & 3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3z & 3t\\ x & y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=3z\end{cases}$

Deci $(\exists)t=a\in\mathbb{C}$ a.î. $x=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$.

13. a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 9\\ 1 & -2\end{pmatrix}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\det A = 5 \Rightarrow A$ inversabilă, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$.

c) $A^2 - 4A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

14. a) Calculăm: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1) & (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

b) Găsim $\frac{1}{2}(X + I_2)\cdot\frac{1}{2}(X + I_2) = \frac{1}{4}(X^2 + 2X + I_2) = \frac{1}{4}(-I_2 + 2X + I_2) = \frac{1}{2}X$, unde am folosit $X^2 = -I_2$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Atunci $AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = XA =$

$= XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$ de unde deducem $b = -c, a = d$, adică $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

15. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Se calculează ușor $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de unde se obține

$A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ atunci $AX = \begin{pmatrix} a_4 + a_7 & a_5 + a_8 & a_6 + a_9 \\ a_7 & a_8 & a_9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $XA = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 + a_2 \\ 0 & a_4 & a_4 + a_5 \\ 0 & a_7 & a_7 + a_8 \end{pmatrix}$

de unde prin identificare se obține ușor $a_4 = a_8 = a_7 = 0$, $a_1 = a_5 = a_9$, $a_2 = a_4$.

16. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$;

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -12 & -12 \\ -12 & 24 & -12 \\ -12 & -12 & 24 \end{pmatrix} = 6 \cdot A$

Scanned with OKEN Scanner

$$B^2=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&12&12\\12&12&12\\12&12&12\end{pmatrix}=-6\cdot B;$$

c) $C=A+B\Rightarrow C=\begin{pmatrix}2&-4&-4\\-4&2&-4\\-4&-4&2\end{pmatrix}, C^2=C\cdot C\Rightarrow C^2=6(A+B)$;

Deci $C^3=C^2\cdot C=6(A+B)(A+B)=6(A+B)^2=6^2(A+B)$.

17. a) $AB=\begin{pmatrix}2x&2y+12\\0&12\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}2x&2x+2y\\0&12\end{pmatrix}$; $AB=BA\Rightarrow x=6$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\0&4\end{pmatrix}$; $4(A-I_2)=4\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\0&4\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=4(A-I_2)$.

c) $A^3=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&8\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&24\\0&8\end{pmatrix}$.

$A^3-aA^2+4A=O_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8&24\\0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4a&8a\\0&4a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&8\\0&8\end{pmatrix}=O_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}16-4a&32-8a\\0&16-4a\end{pmatrix}=O_2$.

$\Leftrightarrow a=4$.

2.2. DETERMINANȚI. INVERSA UNEI MATRICE

18. a) $d=a^3+b^3+c^3-3abc$

b) Se verifică prin calcule că $d=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ şi grupând se obţine relaţia cerută.

c) $a=2^x, b=3^x, c=5^x$ şi avem $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ .Cum a,b,c sunt numere reale strict pozitive şi folosind factorizarea de la b) singura posibilitate este $2^x=3^x=5^x$ de unde x=0.

19. a) Observăm că $D(x)$ este un determinant de tip Vandermonde. Atunci

$$D(9)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&9\\1&9&81\end{vmatrix}=(9-1)(9-3)(3-1)=96.$$

b) $D(a)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&9\\1&a&a^2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2(a-1)(a-3)=0\Leftrightarrow a\in\{1,3\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

c) $D(3^x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 3^x & 3^{2x}\end{vmatrix}=2(3^x-1)(3^x-3)$. Rezolvăm ecuaţia $2(3^x-1)(3^x-3)=0$ şi obţinem soluţiile $x_1=0$ şi $x_2=1$.

20. a) $(x-3)^2-1=0$ de unde $x=2$ si $x=4$.

b) Din relaţia lui Hamilton- Cayley avem $A^2-Tr(A)\cdot A+det(A)I_2=O_2$.

Avem $Tr(A)=x-3+x-3=2(x-3)$, $\det(A)=(x-3)^2-1=x^2-6x+8$. Altfel se verifică prin calcul direct.

c) $A^2-2A=\begin{pmatrix}x^2-8x+16 & 0\\ 0 & x^2-8x+16\end{pmatrix}$ de unde $x^2-8x+16=0$ de unde x=4.

21. a) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}14 & 21\\ 7 & -14\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, deci $A^3=7A$.

c) $B=A^2-6I_2\Rightarrow A\cdot B=A(A^2-6I_2)=A^3-6A=7A-6A=A$. Deci $A\cdot B=A$.

22. a) $\det A=\begin{vmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-(-6)\cdot 1=0$.

b) Avem ecuaţia caracteristică $A^2-tr(A)\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2$, unde $tr(A)$ reprezintă urma matricei A (suma elementelor de pe diagonala principală). Din faptul că $\det A=0$ obţinem $A^2=tr(A)\cdot A$ de unde relaţiile $A^2=-A$ şi $A^3=-A\cdot A=-A^2=A$.

Obţinem $A^3+A^2=-A+A=O_2$. Altfel se calculează $A^2=-A$, $A^3=A^2A=-A^2=A$.

Deci $A^2+A^3=-A+A=O_2$.

c) Conform punctului anterior avem

$A+2A^2+3A^3+\ldots+10A^{10}=A-2A+3A-\ldots+9A-10A=$

$(1-2+3-\ldots+9-10)A=-5A$

23. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) $A^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $A^2+A=\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

b) $\det(A^n)=5^n$ şi avem de rezolvat ecuaţia: $2\cdot 5^n-125=5^n\Leftrightarrow 5^n=5^3$. Deci n=3.

c) $B=A+A^2+\ldots+A^{2008}$.

Scanned with OKEN Scanner

$$B=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5^2&0\\0&1\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}5^{2008}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+5^2+\ldots+5^{2008}&0\\0&\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2008\ ori}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\left(5^{2008}-1\right)&0\\0&2008\end{pmatrix}$$

deoarece $5+5^2+\ldots+5^{2008}=\frac{5^{2009}-5}{4}=\frac{5}{4}\left(5^{2008}-1\right)$.

24. a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$.

b) $\det\left(A-xI_2\right)=\begin{vmatrix}1-x&1\\1&-1-x\end{vmatrix}=(1-x)(-1-x)-1=-1+x-x+x^2-1=x^2-2.$

$x^2-2=0;\quad x=\pm\sqrt{2};\quad S=\{\pm\sqrt{2}\};$

c) $x\in M_2(R)\Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ X\bullet A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&a-b\\c+d&c-d\end{pmatrix}.$

$$A\bullet X=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\a-c&b-d\end{pmatrix}\begin{cases}a+b=a+c\\a-b=b+d\\c+d=a-c\\c-d=b-d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=c\\a=2b+d\end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix}2b+d&b\\b&d\end{pmatrix},\quad b,d\in R$$

25. a) $(x-3)^2-1=0$ de unde $x=2$ si $x=4$.

b) Din relaţia lui Hamilton- Cayley avem $A^2-Tr(A)\cdot A+det(A)I_2=O_2$.

Avem $Tr(A)=x-3+x-3=2(x-3),\det(A)=(x-3)^2-1=x^2-6x+8$. Altfel prin calcul direct

c) $A^2-2A=\begin{pmatrix}x^2-8x+16&0\\0&x^2-8x+16\end{pmatrix}$ de unde $x^2-8x+16=0$ de unde x=4

26. a) Se verifică uşor prin calcul.

b) Avem că $A^2=A/\bullet A\Rightarrow A^3=A^2$ adică $A^3=A_{,}^2=A$ de unde $A^3-2A^2+A=O_2$ ceea ce implică $det(A^3-2A^2+A)=0$.

c) $(2X-I_2)^2=4X^2-4X\cdot I_2+I_2^2=4X^2-4X+I_2=I_2$ folosind faptul că $X^2=X$ pentru orice $X\in G$.

27. a) $\det(A)=-a^3$.

b) $A^2=a^2I_3$, deci $A^2X=a^2I_3X=a^2X$ şi $XA^2=Xa^2I_3=a^2X$, deci $A^2X=XA^2$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $A(aI_3+bA)=aA+bA^2=aA+a^2bI_3$ şi $(aI_3+bA)A=aA+bA^2=aA+a^2bI_3$ deci $aI_3+bA\in G$.

28. a) $\det A^2=(\det A)^2=(4\cdot 4-2\cdot 2)^2=144$.

b) $A^3=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&16\\16&20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}112&104\\104&112\end{pmatrix}=2^3\cdot\begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}$.

c) $A^2-8A+12I_2=\begin{pmatrix}20&16\\16&20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}32&16\\16&32\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&0\\0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_2$.

29. a) $\det A_x=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x_1=-1;x_2=1$

b) $\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}^2=I_2\Rightarrow\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x^2+1&2x\\2x&x^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2+1=1\\2x=0\end{cases}\Rightarrow x=0$.

c) $2xA_x+(1-x^2)I_2=2x\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}+(1-x^2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x^2&2x\\2x&2x^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-x^2&0\\0&1-x^2\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}x^2+1&2x\\2x&x^2+1\end{pmatrix}=A_x^2$.

30. a) $\Delta=(\sqrt{2008}-1)(\sqrt{2008}+1)-1\cdot(-1)=(\sqrt{2008})^2-1^2+1^2=2008$..

b) Conform relaţiilor lui Viète pentru ecuaţia de gradul al II-lea avem:
$x_1+x_2=4$ şi $x_1\cdot x_2=2$. Atunci determinantul devine:

$\Delta=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4^2-2\cdot 2=12$.

c)

$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

31. a) $A^2=\begin{pmatrix}4&8\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&8\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&64\\16&32\end{pmatrix}=8A$

b) $\det X(a)=\begin{vmatrix}1+4a&8a\\2a&1+4a\end{vmatrix}=1+8a+16a^2-16a^2=1+8a$

c) $X(a)X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA^2=I_2+aA+bA+$

Scanned with OKEN Scanner

$8abA = X(a+b+8ab)$.

32. a) det(H(a))=a

b) $H(a)\cdot H(b)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \ln b & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \ln(ab) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & ab\end{pmatrix}=H(ab)$.

c) $H(1)+H(2)+H(3)+\ldots+H(2008)=\begin{pmatrix}1 & \ln 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & \ln 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}+\ldots$

$\ldots+\begin{pmatrix}1 & \ln 2008 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2008\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & S_1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & S_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \ln(2008!) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1004\cdot 2009\end{pmatrix}$, unde

$S_1 = \ln 1+\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln 2008 = \ln(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 2008) = \ln(2008!)$

$S_2 = 1+2+3+\ldots+2008 = \frac{2008\cdot 2009}{2} = 1004\cdot 2009$. Rezultă că determinantul căutat este egal cu 1004·2009.

33. a) $O_3 \in M \Leftrightarrow O_3=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & a_1 & d_1\\ 0 & 0 & a_1\end{pmatrix}$ $a_1,b_1,c_1,d_1\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow a_1=0,\ b_1=0,\ c_1=0,\ d_1=0 \Rightarrow O_3\in M$.

b) $A\in M \Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & a_1 & d_1\\ 0 & 0 & a_1\end{pmatrix}$ $a_1,b_1,c_1,d_1\in\mathbb{R}$. $B\in M \Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ 0 & a_2 & d_2\\ 0 & 0 & a_2\end{pmatrix}$

$a_2,b_2,c_2,d_2\in\mathbb{R}$.

$A\cdot B=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & a_1 & d_1\\ 0 & 0 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ 0 & a_2 & d_2\\ 0 & 0 & a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2 & a_1b_2+b_1a_2 & a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2\\ 0 & a_1a_2 & a_1d_2+d_1a_2\\ 0 & 0 & a_1a_2\end{pmatrix}$.

Notăm

$a_1b_2+b_1a_1=b\in\mathbb{R}$

$a_1a_2=a\in\mathbb{R}$

$a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2=c\in\mathbb{R}$

$a_1d_2+d_2a_2=d\in\mathbb{R}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & d\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\in M \Rightarrow A\cdot B\in M$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

c) $A \in M$ şi $\det A = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_1^3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \,.\, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A^2 * A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

34. a) $\det(I_3 + B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

b) $f(A) = A^2 - 3A + I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + I_3 = B + I_3$.

c) Din punctul b) rezultă că $(f(A))^3 = (I_3 + B)^3 = I_3 + 3B + 3B^2 + B^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, pentru că $B^3 = O_3$.

35. a) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x_0 & x_0^2 \\ -2 & x_0^2 & x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = 0$ deoarece matricea $A(0)$ are două linii identice.

b) Din relaţiile lui Viète avem: $x_1 + x_2 = -1; x_1 x_2 = -2; x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5$;

$A(1) + A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x_1 & x_1^2 \\ -2 & x_1^2 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x_2 & x_2^2 \\ -2 & x_2^2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & x_1 + x_2 & x_1^2 + x_2^2 \\ -4 & x_1^2 + x_2^2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Observăm că $x_0 = 1$ este soluţie pentru ecuaţia $x^2 + x - 2 = 0$. De asemenea x_1, x_2 sunt rădăcini ale aceleiaşi ecuaţii. Deci $x_k^2 + x_k - 2 = 0, \forall k \in \{0,1,2\}$. Suma elementelor matricei $A(k)$ este $S = 1+1+1-2-2+2(x_k^2 + x_k) = 2(x_k^2 + x_k - 2) + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.

36. a) $\det A(1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$.

b) Dacă $A = A(a,b), B = A(c,d)$, atunci

Scanned with OKEN Scanner

$$A+B=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & (a+c)-(b+d) \end{pmatrix}=A(a+c,b+d)\in M$$

c) $I_2-A(0,b)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&b\\-b&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-b\\b&1+b\end{pmatrix}$, atunci

$\det\left(I_2-A(0,b)\right)=b^2+b+1.$

Ecuaţia $b^2+b+1=0$ nu are soluţii reale, deoarece $\Delta=-3<0$.

37. a) $A'\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&15\\15&45\end{pmatrix}$

b) $\det\left(X\cdot X'\right)=\det X\cdot\det X'=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=(ad-bc)^2$

c) Dacă $\det\left(X\cdot X'\right)=0$, conform punctului b) obţinem că

$$(ad-bc)^2=0\Rightarrow ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

38. a) Pentru $a=c=1$ şi $b=0$ se obţine $I_2\in M$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in M$ si $B=\begin{pmatrix}d&e\\e&f\end{pmatrix}\in M$ $A+B=\begin{pmatrix}a+d&b+e\\b+e&c+f\end{pmatrix}\in M$.

c) Alegând A şi B ca la punctul anterior

$$AB=\begin{pmatrix}ad+be&ae+bf\\bd+ce&be+cf\end{pmatrix};\ BA=\begin{pmatrix}ad+be&bd+ce\\ae+bf&be+cf\end{pmatrix}$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}0&ae+bf-bd-ce\\bd+ce-ae-bf&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(AB-BA)=(ae+bf-bd-ce)^2\geq 0.$$

39. a) Avem: $\det(A)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc=4-3=1.$

b) Avem: $A\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&ac+bd\\ac+bd&c^2+d^2\end{pmatrix}$.

c) Din condiţia ca suma elementelor matricei $A\cdot{}^tA$ să fie egală cu 0 avem:

$a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd=0\Leftrightarrow(a+c)^2+(b+d)^2=0\Leftrightarrow a+c=b+d=0.$

Se obţine $\det A=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc=a(-b)-b(-a)=-ab+ab=0.$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

40. a) $\det(M_1+M_2)=\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=4$.

b) $M_a^2=\begin{pmatrix}1 & a^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=M_{a^2}$ **c)** Fie $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

Atunci

$$M_aX=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+az & y+at\\ z & t\end{pmatrix}=XM_a=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & xa+y\\ z & za+t\end{pmatrix}$$

de unde deducem $az=0$ şi $at=ax$.

Pentru ca relaţia să aibă loc pentru orice a e necesar să avem $z=0$ şi $t=x$,

deci $X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$.

41. a) $I_2\in M$ evident (0, 1 sunt numere reale).

b) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & x\end{pmatrix}$, unde a, b, c, x, y, z $\in\mathbb{R}$.

$$A+B=\begin{pmatrix}a+x & b+y\\ c+z & a+x\end{pmatrix}\Rightarrow A+B\in M.$$

c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & x\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}a\cdot x+b\cdot z & a\cdot y+b\cdot x\\ c\cdot x+a\cdot z & c\cdot y+a\cdot x\end{pmatrix}$;

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A=\begin{pmatrix}x\cdot a+y\cdot c & x\cdot b+y\cdot a\\ z\cdot a+x\cdot c & z\cdot b+a\cdot x\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}b\cdot z-c\cdot y & 0\\ 0 & c\cdot y-b\cdot z\end{pmatrix}$$

$$\det(A\cdot B-B\cdot A)=(b\cdot z-c\cdot y)\cdot(c\cdot y-b\cdot z)=-(b\cdot z-c\cdot y)^2\le 0,$$

pentru orice a, b, c, x, y, z $\in\mathbb{R}$.

42. a) Prin calcul direct se obţine că: $A^2=A$, deci $A+A^2=A+A=2A$.

b) $X+A=\begin{pmatrix}x+4 & -6\\ 2 & -3+x\end{pmatrix}$. Atunci, $\det(X+A)=(x+4)(x-3)+12$.

Ecuaţia $\det(X+A)=2$ devine $x^2+x-2=0$, având soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=-2$. Atunci

$X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Ţinând cont de relaţia dată, suma cerută devine:

$$A+2A^2+\cdots+nA^n=A+2A+\cdots+nA=(1+2+\cdots+n)A=\frac{n(n+1)}{2}A,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

43. a) $A^2=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

b) $\det(A^2)=(\det(A))^2=0$ având două linii identice.

c) Presupunem $A^2=I_3$. Atunci $\det(A^2)=1$ fals.

44. a) $\Delta=\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=1+1+0-(0+0+0)=2$.

b) *Soluţia 1.* $\Delta=a^3+c^3+b^3-3abc(a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$

$=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-a^2c-abc+a^2b+b^3+bc^2-$

$-ab^2-abc-b^2c+c^3+a^2c+b^2c-abc-ac^2-bc^2=a^3+b^3+c^3-3abc=\Delta$.

Soluţia II.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}\overset{+L_2+L_3}{=}\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=$$

$=(a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$.

c) În relaţia (b) a=2^x, $b=c=1\Rightarrow(2^x+1+1)\cdot(2^{2x}+1+1-2^x-2^x-1)=0$

$\Leftrightarrow(2^x+2)\cdot(2^{2x}-2\cdot2^x+1)=0\Leftrightarrow(2^x+2)(2^x-1)^2=0\Rightarrow2^x-1=0\Leftrightarrow2^x=1\Rightarrow x=0$

sau $2^x+2=0\Leftrightarrow2^x=-2$ ecuaţie care nu admite soluţii

45. a) Se calculează det A=0, iar det A^2=det A · det A =0.

b) Fie $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}$, $XA=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x\\0&z\end{pmatrix}$, $AX=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z&u\\0&0\end{pmatrix}$

din $XA=AX$ avem $x=u$, $z=0$ şi y oarecare, deci există $a=x$ şi $b=y$.

c) Presupunem că există $Y=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}$ şi $Y^2=A$

aunci $Y^2=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+yz&xy+yu\\zx+uz&zy+u^2\end{pmatrix}$, dar $Y^2=A$. Rezultă că

$$\begin{cases}x^2+yz=0(1)\\xy+yu=1(2)\\zx+uz=0(3)\\zy+u^2=0(4)\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă $zx+uz=0$, $z(x+u)=0$. Se disting două cazuri: $z=0$ sau $x+u=0$. Din primul caz (1) şi (4) rezultă $u=0$, $x=0$ şi relaţia (2) devine: $xy=1$,ceea ce este imposibil. Din cazul doi avem $x=-u$ deci înlocuind în (2) obţinem $xy+yu=0$ ceea ce este în contradicţie cu (1). În concluzie nu există Y cu proprietatea (1).

46. a) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\in G$ şi $B=\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\in G$.

Atunci, $A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}\in G$, deoarece $a+c\in\mathbb{Z}$, $b+d\in\mathbb{Z}$

b) $C^2=C\cdot C=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$.

$10C-16I_2=\begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$. Obţinem $C^2=10C-16I_2$.

c) Fie $D=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\in C$ cu $\det D=2008$. Obţinem $a^2-b^2=2008$ şi apoi $(a-b)(a+b)=2008$. Putem alege $a-b=2$ şi $a+b=1004$ şi obţinem $a=503$ şi $b=501$, deci $D=\begin{pmatrix} 503 & 501 \\ 501 & 503 \end{pmatrix}$.

47. a) $D(-1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4.$

b) $D(a)=-a^3+3a-2=-(a-1)^2(a+2), \forall a\in\mathbb{R}.$

c) $D(a)=-4\Rightarrow -a^3+3a+2=0\Rightarrow (a+1)^2(a-2)=0\Rightarrow a\in\{-1,2\}.$

48. a) $D(1, 1, 0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$

b) $D(a, a, x)=\begin{vmatrix} 1 & x & a^2 \\ 1 & a & ax \\ 1 & a & ax \end{vmatrix}=0$, ceea ce arată independenţa expresiei în raport cu x.

c) $D(a,b,x)=\begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 0 & a-x & b(x-a) \\ 0 & b-x & a(x-b) \end{vmatrix}=a(a-x)(x-b)-b(a-x)(x-b)=$

$=(a-b)(a-x)(x-b)$. Ecuaţia are două rădăcini: a şi b.

Scanned with OKEN Scanner

49. a) $X\cdot A=B\Leftrightarrow (x\quad y)\begin{pmatrix}a & 9\\ 1 & a\end{pmatrix}=(0\quad 0)$, de unde sistemul $\begin{cases}ax+y=0\\ 9x+ay=0\end{cases}$, substituind pe y obţinem $9x-a^2x=0\Leftrightarrow x\left(9-a^2\right)=0$.

b) $\det A\neq 0\Leftrightarrow a^2-9\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$.

c) Soluţia generală a sistemului este $S=\{(x,-3x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$.

Soluţiile distincte se vor obţine pentru valori distincte ale lui $x\in\mathbb{R}$. Spre exemplificare avem perechile $(1,-3),(2,-6),(3,-9)$.

50. a) $B^2=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

b) Avem $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

c) Avem $C=B^2+A^{-1}=A+A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=6I_2$. Atunci $C^4=(6I_2)^4=6^4I_2$

51. a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix}$

b) 0, deoarece liniile sunt liniar dependente.

c) $\det(aA+I_3)=\det\begin{pmatrix}a+1 & 2a & -3a\\ 2a & 4a+1 & -6a\\ 3a & 6a & -9a+1\end{pmatrix}=1-4a\neq 0, a\neq\frac{1}{4}$, deci $B(a)$ e inversabilă.

52. a) $I_3+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A$.

b) $A^2+B^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, deci $\det\left(A^2\right)=1, \left(A^2\right)'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $\left(A^2\right)^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. În final obţinem $\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left(A^2\right)^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

53. a) $I_2 \in G$ deoarece este matrice pătratică de forma celor din G, cu elemente din $\mathbb{Z}$, pentru a = 1 şi b = 0, care satisfac şi relaţia dată $a^2 - 3b^2 = 1$.
O_2 deşi pătratică nu este de tipul G deoarece a = 0 , b = 0 nu satisfac relaţia $a^2-3b^2 = 1$.

b) Fie a,b,m, n din $\mathbb{Z}$ pentru care $a^2 - 3b^2 = 1$ şi $m^2 - 3n^2 = 1$.

Construim matricele A , B ∈ G .

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} m & n \\ 3n & m \end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix} am+b3n & an+bm \\ 3bm+a3n & 3bn+am \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} ma+n3b & mb+na \\ 3na+m3b & 3nb+ma \end{pmatrix}.$$

Ţinând seama de comutativitatea operaţiilor de înmulţire şi adunare în $\mathbb{Z}$ rezultă AB=BA.

c) Dacă $A \in G$, atunci $\det A = 1$, deci A este inversabilă. Calculând inversa lui A obţinem: $A^{-1}=\frac{1}{a^2-3b^2}\begin{pmatrix} -a. & -b \\ -3b & -a \end{pmatrix}=-A$, deci $A^{-1} \in G$ (deoarece $(-a)^2-3(-b)^2=1$ şi $-A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$)

54. $G=\left\{A=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / a,b \in \mathbb{Z}, a^2=1\right\}$.

a) $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a=1$ şi $b=0 \Rightarrow I_2 \in G(a^2 \pm 1)$.

$O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=b=0, a^2=0 \Rightarrow O_2 \notin G$.

b) $B \in M_2(\mathbb{Z})$ a.î. $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}=aI_2+bB \Rightarrow$

$$\Rightarrow bB=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}-aI_2=\begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Avem $\Rightarrow B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall) A \in G, A=a\cdot I_2+b\cdot B$ (conform cu b) şi matricea $C=A\cdot I_2-b\cdot B$

Verifică $A\cdot C=a^2I_2+B^2b^2=I_2$, pentru că $a^2=1, B^2=O_2$ şi

$$(aI_2)\cdot(bB)=(bB)\cdot(aI_2) \Rightarrow A^{-1}=C \Rightarrow A^{-1}=aI_2-bB=\begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & a+b \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a+(-b) & (-b) \\ -(-b) & a-(-b) \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{Z} \text{ şi } a^2=1 \Rightarrow A^{-1} \in G.$$

Scanned with OKEN Scanner

55. a) a=1, b=0. $\Rightarrow I_2 \in \mathcal{M}$.

b) $A \in M \Rightarrow (\exists) a,b \in R$, a.i. $A=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$. $Det(A)=a^2-b^2+b^2=a^2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$.

c) Dacă $A=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ *si* $B=\begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c-d \end{pmatrix}$ atunci

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} ac+(ad+bc) & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-(ad+bc) \end{pmatrix}=acI_2+(ad+bc)V\in\mathcal{M}.$$

Altfel Fie A,B$\in R$,A=aI$_2$+bV,B= cI$_2$+dV.Atunci AB=(aI$_2$+bV)(cI$_2$+dV)=ac$I_2^2+adI_2V+bcVI_2+bdV^2$. Dar $I_2V=VI_2=V, V^2=O_2$.Rezulta ca AB=acI$_2$+(ad+bc)V$\in$M

56. a) Din $A+F=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avem: $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

adică $\begin{pmatrix} 2 & a & b+1 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $\begin{cases} a=3 \\ b+1=4 \\ c=5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$.

b) Pentru $a=c=0$ şi $b=-1$ obţinem $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cum $A\cdot F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$ şi

$$F\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

obţinem $A\cdot F=F\cdot A=I_3$, adică matricea A este inversa matricei F.

c) Înmulţind ecuaţia la stânga cu matricea A, obţinem:

$$A\cdot F\cdot X=A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\overset{b)}{\Rightarrow} I_2\cdot X=A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

57. a) $X^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=Y.\ X^3=X^2\cdot X=Y\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $I_3+X+X^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(I_3+X+X^2\right)=0.$

c) Avem $G=\left\{I_3,\ X,\ X^2\right\}$. Dacă $Y=I_3\Rightarrow Y^{-1}=I_3$. Dacă $Y=X\Rightarrow Y^{-1}=X^2$.

Dacă $Y=X^2\Rightarrow Y^{-1}=X$.

58. a) Avem $A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

b) $M(1,1)=A+I_2=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-1\end{pmatrix}$. Se constată uşor că $\begin{pmatrix}-1&1\\-4&3\end{pmatrix}$ este matricea inversă.

c) $M(x,y)=xI_2+yA=\begin{pmatrix}2y+x&-y\\4y&x-2y\end{pmatrix}$ este inversabilă dacă

$\det M(x,y)=(x-2y)(2y+x)+4y^2=x^2\neq 0$, adică dacă $x\neq 0$.

59. a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

b) $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$

$4A^2-5A+2I_3=\begin{pmatrix}16&0&0\\0&4&0\\0&8&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&0&0\\0&5&0\\0&5&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}=A^3.$

c) $\det A=2\neq 0;\ {}'A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix};\ A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-2&2\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea dată se scrie: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 2m & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & n & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ care

este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} 4m+2n+p=\frac{1}{2} \\ m+n+p=1 \\ 2m+n=-1 \end{cases}$; $m=\frac{1}{2}; n=-2; p=\frac{5}{2}$.

Observaţie: Din relaţia de la punctul b) deducem $I_3=\frac{1}{2}A^3-2A^2+\frac{5}{2}A$. Înmulţind cu A^{-1} obţinem $A^{-1}=\frac{1}{2}A^2-2A+\frac{5}{2}I_3$

Altfel din punctul b) deducem $I_3=\frac{1}{2}A^3-2A^2+\frac{5}{2}A=A\left(\frac{1}{2}A^2-2A+\frac{5}{2}I_3\right)$.Din definitia inversei unei matrice rezulta ca $A^{-1}=\frac{1}{2}A^2-2A+\frac{5}{2}I_3$.De unde prin identificarea coeficientilor se obtine: $m=\frac{1}{2}; n=-2; p=\frac{5}{2}$.

60. a) $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) detX=1. $'X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+r+1 & 6+r & 9+r \\ 0 & 3+r+1 & 6+r \\ 0 & 0 & 3+r+1 \end{pmatrix} \Rightarrow r=-3$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

61. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 3A$.

b) $\det(A^{10}) = (\det A)^{10} = 0^{10} = 0$.

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 4$

$B^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

62. a) $A(1) \cdot A(-1) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = A(-1)$

b) $\left(A(x)\right)^2 = A(x) \cdot A(x) = A\left(x^2 + 2x\right) = A\left((x+1)^2 - 1\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $det\, A(1) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}(1); A(1) \cdot A^{-1}(1) = A^{-1}(1) \cdot A(1) = I_2$.

$A^{-1}(1) = \frac{1}{det\, A(1)} \cdot A^* \Rightarrow A^{-1}(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$.

63. a) $\det A = 0$.

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $I_3 + A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\det(I_3 + A) = 1 \neq 0$, deci $I_3 + A$ este inversabilă şi

$(I_3 + A)^{-1} = \frac{1}{\det(I_3 + A)} \cdot (I_3 + A)^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

64. a) $a = 0 \Rightarrow I_2 = X(0) \in G$.

b) $A^2 = 5A \Rightarrow X(a)X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = = I_2 + aA + bA + abA^2 =$
$= I_2 + (a + b + 5ab)A = X(a + b + 5ab)$.

c) Folosind b), avem: $X(a)X(\frac{-a}{1+5a}) = X(a - \frac{a}{1+5a} - \frac{5a^2}{1+5a}) = X(0) = I_2$

Scanned with OKEN Scanner

Analog $X(\frac{-a}{1+5a})X(a)=I_2$.

65. a) detA=0.

b) $A^2=10A$, $B^2=(A-I_3)=A^2-2A+I_3=8A+I_3$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 6\\ -4 & 3 & 12\\ -6 & 6 & 17\end{pmatrix}.$$

c) $B\cdot B^{-1}=(A-I_3)\left(\frac{1}{9}A-I_3\right)=\frac{1}{9}A^2-\frac{10}{9}A+I_3$

$\Rightarrow B\cdot B^{-1}=I_3$.

Analog se verifică egalitatea: $B^{-1}\cdot B=I_3$.

66. a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, detB=1≠0, $B^t=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow B^*=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$,

$\det B=1\Rightarrow B^{-1}=B^*$.

$B^3-B^2=xA$

c) $B^3=(I_2+A)^3=I_2+3A$

$B^2=I_2+2A\Rightarrow B^3-B^2=A\Rightarrow x=1$

67. a) $A^2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, şi are determinantul $\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6-2=4$. Altfel

$\det A^2=(\det A)^2=(-2)^2=4$.

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-x+2z & -y+2t\\ x & y\end{pmatrix}=I_2$ obţinem sistemul:

$$\begin{cases}-x+2z=1\\ -y+2t=0\\ x=0\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=\frac{1}{2}\\ t=\frac{1}{2}\end{cases}$$

c) Din $A\cdot B=I_2$ rezulta ca detAB=detI_2=1. Rezultă că matricea are determinantul nenul deci este inversabilă. Cum inversa unei matrice, dacă există, este unică şi cum $A\cdot B=I_2$

Scanned with OKEN Scanner

obţinem că B este inversa matricei A şi, desigur că şi A este inversa matricei B, deci $S=O_2$.

68. a) $\det A=0 \Leftrightarrow a=2$.

b) $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ si $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2\\ 5\end{pmatrix}$.

69. a) $A^2=A\cdot A=2\cdot I_2$;

b) $A+I_2=\begin{pmatrix}5 & -7\\ 2 & -3\end{pmatrix}$; $\det(A+I_2)=-1\neq 0 \Rightarrow (A+I_2)^{-1}=-\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 2 & -5\end{pmatrix}$; $A-I_2=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 2 & -5\end{pmatrix}$

Altfel calculăm $(A+I_2)(A-I_2)=A^2-AI_2+I_2A-I_2=A^2-A+A-I_2=2I_2-I_2=I_2$. Deci matricea $A+I_2$ este inversa matricei $A-I_2$

c) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; $X^2=A$, $\Rightarrow \det X^2=\det A$; $\det X^2=(ad-bc)^2$, $\det A=-2 \Rightarrow (ad-bc)^2=-2-$

contradicţie $\Rightarrow \nexists\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ astfel încât $X^2=A$;

70. a) Verificare.

b) $\det A=1$, $A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) $X(a)=\begin{pmatrix}1+a & a & 0\\ 0 & 1+a & a\\ 0 & 0 & 1+a\end{pmatrix}$, deci $\det X(a)=(1+a)^3$, deci $(1+a)^3=(2a-1)^3$, $a\in R$ rezultă.

$1+a=2a-1$, $a=2$.

71. a) $B=A+I_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

$$\det B=\begin{vmatrix}2 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $A^2 = A \cdot A = O_3$.

c) $B = aA + I_3$ $2B - B^2 = 2B - (aA + I_3)(aA + I_3) = 2(aA + I_3) - (aA + I_3)(aA + I_3) =$

$= 2aA + 2I_3 - a^2A^2 - aA - aA - I_3 = I_3$

$B(2I_3 - B) = I_3$

$B^{-1} = 2I_3 - B$

72. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$.

b) $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + \underbrace{A \cdot B}_{O_3} + \underbrace{B \cdot A}_{O_3} + B^2 = A^2 + B^2$.

Analog $(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2 - \underbrace{A \cdot B}_{O_3} - \underbrace{B \cdot A}_{O_3} + B^2 = A^2 + B^2$.

În calcule am folosit că şi $B \cdot A = O_3$.

c) Prin calcul $(A-B) = 3 \cdot I_3 \Rightarrow (A-B)^2 = 9I_3$ şi $\det(A-B)^2 = 9 \neq 0$.

Deci $(A-B)^2$ inversabilă. Fie X inversa matricei $(A-B)^2$.

Urmează că $X \cdot (A-B)^2 = I_3 \Leftrightarrow X \cdot (9 \cdot I_3) = I_3 \Leftrightarrow 9\underbrace{(X \cdot I_3)}_{X} = I_3 \Leftrightarrow \boxed{X = \frac{1}{9} I_3}$.

2.3. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

73. a) $\det A(a) = a^3 + 2 - 3a = (a+2)(a-1)^2$

b) Sistemul poate fi rezolvat cu metoda Cramer $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow (a+2)(a-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2, a \neq 1$.

c) Pentru $a = 0, \det A(a) = 2$, deci sistemul are soluţie unică, care este $x = y = z = \frac{1}{2}$.

74. a) Rezolvând ecuaţia $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \Leftrightarrow$ -6m+10+m+1+2m+2-2m-15=-12

obţinem soluţia $m = 2$

b) Înlocuind tripletul $(1,2,-3)$ în sistemul de ecuaţii obţinem

relaţiile $\begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ (m+1) + 4 - 9 = -2 \end{cases}$ Pentru $m = 2$ ambele egalităţi sunt satisfăcute.

c) Pentru valoarea parametrului $m = -1$ rezolvăm sistemul de ecuaţii. Obţinem ca soluţie tripletul $(4;8;-6)$

Scanned with OKEN Scanner

75. a) Deoarece $(2,1,-1)$ este soluţie a sistemului avem $2m-1-4=1$, aşadar $m=3$.

b) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ m & -1 & 4\end{vmatrix}=m^2-3m \Leftrightarrow 15-5m=m^2-3m \Leftrightarrow m^2+2m-15=0$ ecuaţie ale cărei soluţii sunt $m_1=-5$ şi $m_2=3$.

c) Matricea sistemului devine pentru $m=-5$: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -5 & -1 & 4\end{pmatrix}$ al cărei determinant este $\Delta=40\neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat.

Calculăm $\Delta_x=\begin{vmatrix}-3 & -2 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=0$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & -3 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ -5 & 1 & 4\end{vmatrix}=120$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 4\\ -5 & -1 & 1\end{vmatrix}=40$.

În aceste condiţii $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=0$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=3$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=1$.

76. a) $\det\big(A(4)\big)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 16\end{vmatrix}=6$.

b) Matricea $A(a)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det\big(A(a)\big)\neq 0$.

Calculând

$$\det\big(A(a)\big)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ l_2-l_1\\ l_3-l_1\end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & a-1\\ 0 & 3 & (a-1)(a+1)\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & a+1\end{vmatrix}=(a-1)(a-2)$$

Pentru ca A să fie inversabilă trebuie să avem $a\in\mathbf{R}-\{1,2\}$.

c) Dacă $a\in\mathbf{R}-\{1,2\}$ atunci sistemul este compatibil determinat, în care determinantul matricei sistemului este $\Delta=\det\big(A(a)\big)=(a-1)(a-2)$.

Calculăm $\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{vmatrix}=(a-1)(a-2)$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & a^2\end{vmatrix}=0$ şi $\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=0$.

Soluţia sistemului este $(x,y,z)=(1,0,0)$.

77. a) Sistemul devine: $\begin{cases}x = 0\\ x+y+z=1\\ x+2y+4z=2\end{cases}$ cu soluţiile $x=0, y=1, z=0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Făcând transformările L_2-L_1 şi L_3-L_1 obţinem:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & b^2-a^2\\ 0 & c-a & c^2-a^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & b+a\\ 1 & c+a\end{vmatrix}==(b-a)(c-a)(c-b)$$

c) Deorece numerele a,b,c sunt numere naturale distincte $\Rightarrow \det A\neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat cu soluţiile date de $x=\frac{d_x}{d}, y=\frac{d_y}{d}, z=\frac{d_z}{d}$, unde

$$d_x=\begin{vmatrix}a & a & a^2\\ b & b & b^2\\ c & c & c^2\end{vmatrix}=0,\ d_y=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a),\ d_x=\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & b & b\\ 1 & c & c\end{vmatrix}=0.$$

Soluţiile sunt $x=0, y=1, z=0$ care nu depind de numerele a,b,c.

78. a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & a\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A)=-8+2+3a+4-a-12=2a-14$

b) $a=-1\Rightarrow \det(A)=-16$. Folosim regula lui Cramer.

Avem $\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 5 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=-60, \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 5 & -1\\ 1 & 4 & 4\end{vmatrix}=12, \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=-4$ şi deci

$(x,y,z)=\left(\frac{15}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$. **c)** $x_0+y_0+z_0=4$ şi $x_0+y_0+4z_0=4\Rightarrow z_0=0$.

Deci $\begin{cases}x_0+3y_0=b\\ x_0-2y_0=5\\ x_0+y_0=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y_0=-1\\ 4+2y_0=b\end{cases}\Rightarrow b=\frac{10}{3}$.

79. a) $a=1\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}1 & 4 & 4\\ 3 & 5 & 5\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=10+24+60-60-10-24=0.$

b) Înlocuind în sistem $x=7, y=1, z=1$, din ecuaţia a doua obţinem $a=-8$ şi din a treia $a=10$.

c) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 3 & a+4 & 5\\ 3 & 2 & 3-a\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=(a+2)(1-a).$

Dacă $a\in\{-2,1\}$, $\det A=0$.
În final va da sistem incompatibil (se obţin minori caracteristici nenuli).
Dacă $a\notin\{-2,1\}, \det A\neq 0$. Cu ajutorul regulii lui Cramer, obţinem

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

$x=\frac{d_1}{d}==\frac{(1-a)(15a+6)}{(a+2)(1-a)}=\frac{15a+6}{a+2}, y=\frac{d_2}{d}=\frac{23a+4}{(a+2)(1-a)}, z=\frac{d_3}{d}=\frac{-29a+2}{(a+2)(1-a)}.$

Cum $y_0+z_0=3\Rightarrow\frac{23a+4-29a+2}{(a+2)(1-a)}=\frac{6(1-a)}{(a+2)(1-a)}=\frac{6}{a+2}=3\Rightarrow$

$a=0\Rightarrow y_0=2, z_0=1, x_0=3\Rightarrow(x_0,y_0,z_0)=(3,2,1).$

Altfel: c)$y_0+z_0=3$.Din prima ecuaţie a sistemului obţinem $x_0=3$. Înlocuim în celelalte ecuaţii $x_0=3$ si $z_0=3-y_0$ obţinem $\begin{cases}9+(a+4)y_0+5(3-y_0)=22\\9+2y_0+(3-a)(3-y_0)=16\end{cases}$. Facem calculele şi ajungem la: $\begin{cases}(a-1)y_0=-2\\(a-1)y_0=3a-2\end{cases}$. Sistemul are solutii $\Leftrightarrow$ 3a-2=-2 $\Leftrightarrow$ a=0 $\Rightarrow y_0=2, z_0=1$.

Soluţia căutată este $x_0=3, y_0=2$ si $z_0=1$.

80. a) $\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=2-2-1-1-1-4=-7\neq0\Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat.

b) $a=0\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=2\\2x+y-z=3\\x-y+2z=0\end{cases}$. Se rezolvă cu regula lui Cramer:

$d_1=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&1&-1\\0&-1&2\end{vmatrix}=-7,\ d_2=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&-1\\1&0&2\end{vmatrix}=-7, d_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&-1&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow x=\frac{d_1}{d}=1, y=$

$\frac{d_2}{d}=1, z=\frac{d_3}{d}=0.$

c) Dacă $y+z=x$, atunci din prima ecuaţie deducem $x=1$. Astfel $y+z=1$ şi din a doua ecuaţie $y-z=1$.

În consecinţă $y=1$ şi $z=0$, deci $a=0$

81. a) Verificare directă înlocuind $x=0, y=3, z=1$

b) Sistemul are soluţie unică dacă $\det A\neq0$.

Matricea asociată sistemului este $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&1&1\\m&-1&4\end{pmatrix}$ cu $\det A=5(3-m)$.

Din condiţia pusă rezultă $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

c) Dacă $m\neq3$, conform punctului b), sistemul are soluţie unică, şi conform punctului a) soluţia este $(0,3,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

82. a) $\det A=\begin{vmatrix}2 & -5 & 4\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-5$.

b) Folosind Cramer se obţine $\Delta_x=-4$, $\Delta_y=-4$, $\Delta_z=-3$, de unde soluţia sistemului este $\left(\frac{-4}{5},\frac{-4}{5},\frac{-3}{5}\right)$.

c) detA≠0 deci sistemul se poate rezolva cu regula lui Cramer. Calculăm Δ_x =-9a+5, Δ_y= -14a+10, Δ_z =-13a+10,de unde $x=\frac{9a-5}{5}, y=\frac{14a-10}{5}, z=\frac{13a-10}{5}$. Se observă că cele trei numere sunt naturale dacă $a\geq\frac{5}{7}$ şi în plus a trebuie să fie multiplu de 5.

Soluţia problemei $a=5$..

83. a) $m=1\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 5\end{vmatrix}=-5+4+6+12-1-10=6.$

b) $\det A=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & m\\ 4 & 1 & 5\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -5+4m+6+12-m-10=0\Leftrightarrow 3m+3=0\Leftrightarrow m=-1$

c) Pentru $m\neq -1\Rightarrow \det A\neq 0$. Sistemul fiind liniar omogen, admite doar soluţia banală. Deci $x=y=z=0$

84. a) Sistemul este omogen. $\det A=a-8$, iar pentru $a=-1$ avem $\det A=-9\neq 0$, deci sistemul admite numai soluţia banală.

b) $A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=\begin{pmatrix}a & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}-(a+1)\begin{pmatrix}a & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}+(a-8)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=\begin{pmatrix}a^2+8 & 2a+2\\ 4a+4 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a^2+a & 2a+2\\ 4a+4 & a+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a-8 & 0\\ 0 & a-8\end{pmatrix}$

$A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

c) Cum $A^2=\begin{pmatrix}a^2+8 & 2a+2\\ 4a+4 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow a^2+8=9$ şi $2a+2=4a+4=0$.

Soluţia este $a=-1$.

85. a) $S(0,0)=9$.

b) $\det A=28-16-15\alpha-40+8\alpha+21=-7-7\alpha=0$ implică $\alpha=1$ şi atunci $\beta=-2-7-\alpha=-10$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

c) Pentru $\alpha=\beta=0$ avem $\det A=-7\neq 0$.Sistemul se rezolva cu regula lui Cramer şi calculând determinanţii $\Delta_x=-70,\Delta_y=35,\Delta_z=70$, obţinem soluţiile x=10,y=-5,z=-10.

86. $\det A=4a+10$;

a) A inversabilă $\Leftrightarrow$ detA$\neq$0 $\Leftrightarrow$ a$\neq -\frac{5}{2}$;

b) $A^2=\begin{pmatrix} -a & -5a+2 & 2a-3 \\ 3 & -a+20 & -13 \\ 1 & -a-12 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $a=1\Rightarrow \det A=14\Rightarrow$ sistemul se rezolvă cu regula lui Cramer şi se obţin $x=2,\ y=3,\ z=-1$.

87. a) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{vmatrix}=(2a-1)(a-3)+2a+3a-2(2a-1)-3a-a(a-3)=$

$=2a^2-7a+3+5a-4a+2-3a-a^2+3a=a^2-6a+5$.

b) $\det A=0\Rightarrow a^2-6a+5=0\Rightarrow (a-1)(a-5)=0\Rightarrow a_1=1,a_2=5$.

c) $\begin{cases} x+2z=1 \\ x-y+3z=1 \\ x-3z=1 \end{cases}$. Determinantul sistemului este d=detA=5$\neq$0 ,deci sistemul se poate rezolva cu regula lui Cramer. $d_x=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=3+2=5\Rightarrow x=1$

$d_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0$ (coloanele 1 şi 2 sunt identice) $d_z=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$ (coloanele 1 şi 3 sunt identice) $\Rightarrow S=(1,0,0)$.

88. a) $a=1\Rightarrow \det(A)=6$.

b) $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{vmatrix}\overset{\substack{C3-C1 \\ C2-C1}}{=}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-4 & -2 & 4 \\ a^2-16 & -12 & 16 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-4 & -2 \\ (a-4)(a+4) & -12 \end{vmatrix}$

$=-2(a-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+4 & 6 \end{vmatrix}=2(a-4)(a-2)$. Astfel $\det(A)\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$.

c) $a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}\Leftrightarrow \det(A)=2(a-4)(a-2)\neq 0\Rightarrow$ sistemul liniar omogen are soluţie unică soluţia banală $x=y=z=0$. (Aceasta poate fi dedusă cu regula lui Cramer)

Scanned with OKEN Scanner

89. a) $AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+ay+z=1 \\ 2y+3z=1 \end{cases}$

b) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a-18;\ a=6.$

c) folosind formulele lui Cramer :

$\Delta_x = 4(a-2);\quad \Delta_z = a-2$

$x_0 = \frac{4a-2}{3(a-6)};\ z_0 = \frac{a-2}{3(a-6)};\ \frac{x_0}{z_0} = 4.$

2.4. APLICAȚIILE DETERMINANȚILOR ÎN GEOMETRIE

90. a) O(0,0), $A_1(1,2)$, $A_2(2,4)$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci O, A_1, A_2 sunt coliniare.

b) Reprezentând punctele într-un sistem ortogonal de axe, observăm că dreptele obținute sunt A_1A_2, OA_0, A_0A_1, A_0A_2 adică 4 drepte.

c) Calculăm determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & 2^n & 1 \\ n+1 & 2^{n+1} & 1 \\ n+2 & 2^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 2^n & 1 \\ n+1 & 2^n \cdot 2 & 1 \\ n+2 & 2^n + 2^2 & 1 \end{vmatrix} = 2^n \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+1 & 2 & 1 \\ n+2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overline{\overline{L_2 - L_1}}$$

$$2^n \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2^n.$$ Atunci aria triunghiului va fi $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

91. a) Avem punctele $A_1(1,3)$, $A_2(2,5)$.

Dreapta determinată de cele două puncte are ecuația :

$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 1.$

b) Aria triunghiului OA_1A_2 este dată de

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

$S = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(5-6)| = \frac{1}{2}$.

c) Punctele A_1 (1, 3), A_2 (2,5) determină dreapta $y = 2x+1$. Se observă că orice alt punct A(n, 2n +1) se află pe această dreaptă deoarece coordonatele sale verifică ecuaţia dreptei, $2n+1 = 2n+1$.

92. a) $\frac{y-2}{4-2} = \frac{x+1}{-2+1}$ de unde rezultă că: $-(y-2) = 2(x+1)$. De aici obţinem că $B_1B_2 : 2x + y = 0$.

b) Cum $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = n\log_2\left(2^{-1}\right) = -n\log_2 2 = -n$ şi $\log_3 9^n = n\log_3 9 = n\log_3 3^2 = 2n$ rezultă că $A_n(-n, 2n)$, deci $A_n = B_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Pentru a arăta că $A_n \in A_1A_2$ verificam dacă $A_n(-n, 2n)$ aparţine dreptei de ecuaţie $2x + y = 0$. Înlocuind coordonatele punctului A_n în această ecuaţie obţinem egalitatea $-2n + 2n = 0$ care este adevarată. De aici rezultă că $A_n \in A_1A_2$.

93. a) $A_1(3,1)$, $A_2(4,4)$ utilizând formula:pentru ecuatia dreptei A_1A_2 : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

se obţine ecuaţia 3x-y-8=0.

b) O(0,0), $A_0(2,-2)$, A(3,1). Aplicând formula $A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$ se obţine $A_{OA_0A_1} = 4$

c) $A_1(3,1)$, $A_2(2.-2)$, $A_n(n+2,3n-2)$ Se utilizează condiţia de coliniaritate:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ n+2 & 3n-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (A).

94. a) $A_{ABC} = \frac{1}{2}|d|$, unde $d = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 14 = 26 \Rightarrow A_{ABC} = 13$

b) B (– 2, – 2), C (3 , – 2) => BC : y = – 2 <=> BC : y + 2 = 0

c) B (a, a), M (x, – 2), C (3 , – 2) coliniare $\forall x \in \mathbb{R}$ <=> B se află pe dreapta

Scanned with OKEN Scanner

$y=-2 \Leftrightarrow a=-2$. Altfel M,B,C coliniare $\forall x \in \Re \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0, \forall x \in \Re \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ a & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \forall x \in \Re \Leftrightarrow (a+2)(x-3) = 0, \forall x \in \Re$ .de unde a=-2.

95. a) $A_0(0,0)$, ecuatia dreptei A_0A_1 este y= x.

b) $A = \frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow A = 1$.

c) $A_{A_mA_nA_p} = \frac{1}{2}|(p-n)(p-m)(n-m)|$ .Numarul (p-m)(p-n)(n-m) este par (cel putin doua numere dintre m,n ,p au aceeasi paritate) de unde obtinem $A \in N$.

96. a) $A_0(0;2), A_1(1;3) \Rightarrow A_0A_1: \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-2}{3-2} <=> x-y+2=0$.

b) A_0, A_1, A_2 coliniare $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ n & n+2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow n+2+2n-3n-2=0$, adevărat.

Altfel A_0,A_1,A_2 coliniare. $\Leftrightarrow A_2$ aparţine dreptei $A_0A_1 \Leftrightarrow x_2-y_2+2=0 \Leftrightarrow 2-4+2=0 \Leftrightarrow 0=0$ adevărată.

c) $A_{\Delta OA_nA_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_n & y_n & 1 \\ x_{n+1} & y_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & n+2 & 1 \\ n+1 & n+3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= n(n+3)-(n+1)(n+2) = -2 \Rightarrow A_{\Delta OA_nA_{n+1}} = 1$.

97. a) Rezolvând sistemul format din ecuaţiile dreptelor AB şi BC adică sistemul $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ obţinem $B(0,2)$.

b). Fie M mijlocul [AB] $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, deci $M(2,1)$. Folosind M şi C scriem ecuaţia dreptei $CM: \frac{y-y_C}{y_M-y_C} = \frac{x-x_C}{x_M-x_C} \Leftrightarrow \frac{y+1}{1+1} = \frac{x-1}{2-1}$. Se obţine în final $CM: 2x-y-3=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

c) Aplicăm formula $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right\| \Rightarrow A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot 10=5.$

98. a) detM=-x-y+3.

b) A,B,C_2 coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_{C_n} \\ y_A & y_B & y_{C_n} \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0$ adevărat.

c) Aria triunghiului este $\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_O & x_{C_n} \\ y_A & y_O & y_{C_n} \end{vmatrix}\right|=\frac{3n}{2}$ minimă pentru n=1.

99. a) $C_4C_2:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_{C_4} & y_{C_4} & 1 \\ x_{C_2} & y_{C_2} & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -4x+2y-8+8+2x-4y=0 \Leftrightarrow -2x-2y=0 \Leftrightarrow x+y=0.$

b) O,C_n,C_{n+1} coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_{C_n} & y_{C_n} & 1 \\ x_{C_{n+1}} & y_{C_{n+1}} & 1 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & -n & 1 \\ n+1 & -n-1 & 1 \end{vmatrix}=$

$=0+0-n^2-n+n^2+n-0-0=0 \Rightarrow O,C_n,C_{n+1}$ coliniare $(\forall)n\in\mathbb{Z}^*$.

c) Aria $\Delta ABC_3=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_{C_3} & y_{C_3} & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|4+3-3-6-1+6|=\frac{3}{2}.$

100. a) Coordonatele punctului A se deduc din sistemul

$\begin{cases} x-3y-4=0, \\ x+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=4, \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$. Atunci $A(4,0)$.

b) Aria este $A=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|8-2+4|=5$ (unităţi de arie).

c) A,B,D coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1=0 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$ 4-4a=0,de unde a=1.

Scanned with OKEN Scanner

2.5. LEGI DE COMPOZIȚIE. GRUPURI. INELE ȘI CORPURI

101. a) $x \circ y = x(y+4)+4(y+4)-4 = (x+4)(y+4)-4$.

b) Din relația de mai sus $x \circ (-4) = (x+4)(-4+4)-4 = -4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Deoarece $x \circ (-4) = -4$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ rezultatul compunerii este -4.

102.a) Calculăm $2(x-3)(y-3)+3=2(xy-3x-3y+9)+3=2xy-6x-6y+18+3=2xy-6x-6y+21=x \circ y$

b) $x \circ x=2(x-3)^2+3$. Ecuația devine: $2(x-3)^2+3=11 \Leftrightarrow 2(x-3)^2=8 \Leftrightarrow (x-3)^2=4$. De unde $x-3=4$ sau $x-3=-4$. Se obțin soluțiile $x=7, x=-1$.

c) Din a) observăm că: $x \circ 3=3 \circ x=3, \forall x \in R$.

Deci $\underbrace{1 \circ \sqrt{2} \circ \ldots \sqrt{8}}_{x} \circ \sqrt{9} \circ \underbrace{\sqrt{10} \circ \ldots \sqrt{2008}}_{y} = \underbrace{x \circ \sqrt{9}}_{3} \circ y = 3 \circ y = 3$

103.

a) Se verifică ușor prin calcule.

b) Se folosește punctul a) $y=2$.

c) Observăm că $x \circ 2 = 2 \circ x = 2, \forall x \in R$. Deci

$\underbrace{(-2008) \circ (-2007) \circ \ldots \circ 1}_{x} \circ 2 \circ \underbrace{3 \circ \ldots 2008}_{y} = \underbrace{x \circ 2}_{2} \circ y = 2 \circ y = 2$.

104. a) Se verifică direct prin înmulțire.

b) Deoarece $A_x A_e = A_e A_x = A_{x+e}$, avem $e=0$ și $A_e = I_3$

c) Elementrul neutru în $(Z,+)$ este 0. Iar $f(0) = A_0$ este element neutru în $(G,\cdot)$. Trebuie să mai verificăm că $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, adică $A_x A_y = A_{x+y}$, adică **a).**

105. a) $A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} = A(2ab)$.

b) Matricea $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru $\Leftrightarrow A(a) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) = A(a), (\forall) a \in \mathbb{R}$.

Conform punctului anterior $A(a) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) = A\left(2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}\right) = A(a), (\forall) a \in \mathbb{R}$. Observăm ca operația de înmulțire este comutativă pe mulțimea M, conform punctului anterior, ceea ce asigură și cealaltă operație impusă de existența elementului neutru.

c) Matricea $A(x)$ este element simetric pentru $A(1) \Leftrightarrow A(x) \cdot A(1) = A\left(\frac{1}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Conform punctului anterior obţinem $A(2x)=A\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{4}$. Observăm ca operaţia de înmulţire este comutativă pe mulţimea M, conform punctului a), ceea ce asigură şi cealaltă operaţie impusă de existenţa elementului simetric .

Deci simetricul matricei $A(1)$ este $A\left(\frac{1}{4}\right)$.

106.a) $\sqrt{2}\circ\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}\right)+7\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+42=-2+42=40$.

b) $(x+7)(y+7)-7=xy+7x+7y+49-7=xy+7(x+y)+42=x\circ y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

c) Ţinem seama de relaţia de la b) şi avem

$x\circ x=(x+7)^2-7$ şi $x\circ x\circ x=(x+7)^3-7$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Atunci :

$x\circ x\circ x=x\Leftrightarrow(x+7)^3-7=x\Leftrightarrow(x+7)^3-(x+7)=0\Leftrightarrow(x+7)\left((x+7)^2-1\right)=0$.

În final obţinem ecuaţia : $(x+7)(x+7-1)(x+7+1)=0$ deci $x\in\{-8,-7,-6\}$.

107. a) $2*3=2\Leftrightarrow 6-5k+k^2+k=2\Leftrightarrow k^2-4k+4=0\Leftrightarrow(k-2)^2=0\Rightarrow k=2$.

b) $x*x=6\Leftrightarrow x^2-4x+6=6\Leftrightarrow x^2-4x=0\Rightarrow x\in\{0,4\}$.

c) $\begin{matrix}x\in M\Rightarrow x\geq k\Rightarrow x-k\geq 0\\ y\in M\Rightarrow y\geq k\Rightarrow y-k\geq 0\end{matrix}$. Înmulţind relaţiile obţinem

$xy-k(x+y)+k^2\geq 0\Rightarrow xy-k(x+y)+k^2+k\geq k\Rightarrow x*y\in M$.

108. a) $2\hat{x}=\hat{2}$, deci $\hat{x}\in\{\hat{1},\hat{4}\}$

b) Suma liniilor este $(\hat{0},\hat{0},\hat{0})$ deci determinantul e $\hat{0}$

c) Înmulţim a doua ecuaţie cu $\hat{2}$ şi o scădem din prima. Atunci $\hat{3}y=\hat{0}$.

Deci $y\in\{\hat{0},\hat{2},\hat{4}\}$ şi avem soluţiile.

109. a) $x\circ x=x*x\Leftrightarrow(x-3)^2+3=2x-3\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow x\in\{3,5\}$

b) $x\circ a=3,\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x-3)(a-3)=0,\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a=3$.

c) $\begin{cases}x+(y+1)-3=4\\(x-y-3)(1-3)+3=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=6\\x-y=2\end{cases}\Leftrightarrow(x,y)=(4,2)$

110. a) $x*y=xy-5x-5y+30=x(y-5)-5(y-5)+5=(x-5)(y-5)+5$

b) $x*e=x\Rightarrow(x-5)(e-5)+5=x\Rightarrow(x-5)(e-5)-(x-5)=0$

$\Rightarrow(x-5)(e-6)=0\Rightarrow e=6$

c) $x*x*x=x\Rightarrow(x-5)^3+5=x\Rightarrow(x-5)^3-(x-5)=0\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$(x-5)(x-6)(x-4)=0 \Rightarrow x \in \{4,5,6\}$.

111. a) $x*x=(x-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}=x$ de unde $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}-1)=0$ adică $x \in \{\sqrt{2},\sqrt{2}+1\}$

b) Avem $x*(y*z)=(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z-\sqrt{2})+\sqrt{2}$, expresie simetrică în x,y,z deci operaţia este asociativă.

c) $x*e=x$, adică $(x-\sqrt{2})(e-\sqrt{2})=x-\sqrt{2}$ orice x de unde $e=1+\sqrt{2}$.

112. Observăm că $x \circ y=(x-1)(y-1)+1, \forall x \in \mathbb{R}$

a) Pentru orice $x,y,z \in \mathbb{R}$ avem

$(x \circ y) \circ z=[(x-1)(y-1)+1] \circ z=(x-1)(y-1)(z-1)+1$ şi

$x \circ (y \circ z)=x \circ [(y-1)(z-1)+1]=(x-1)(y-1)(z-1)+1$ de unde obţinem că legea este asociativă.

b) $\forall x,y \in (1,\infty)$ avem $x-1>0$ şi $y-1>0$ de unde $(x-1)(y-1)>0 \Rightarrow$

$(x-1)(y-1)+1>1 \Rightarrow x \circ y \in (1,\infty)$.

c) $x \circ a=a, \ \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x-1)(a-1)+1=a, \ \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$(x-1)(a-1)=a-1 \ \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a-1)(x-2)=0 \ \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow a=1$.

113. a) Calculam $xy+(1-x)(1-y)=xy+1-x-y+xy=2xy-x-y+1=x*y$

b) Legea de compoziţie "$*$" este asociativă, dacă $(\forall)x,y,z \in \mathbb{R}$ avem

$(x*y)*z=x*(y*z)$.

Cum $(x*y)*z=\underbrace{(2xy-x-y+1)}_{=a}*z=a*z=2az-a-z+1=$

$=2(2xy-x-y+1)z-(2xy-x-y+1)-z+1=\ =4xyz-2(xy+xz+yz)+x+y+z$ (1)

Analog $x*(y*z)=x*\underbrace{(2yz-y-z+1)}_{=b}=x*b=2xb-x-b+1=$

$=2x(2yz-y-z+1)-x-(2yz-y-z+1)+1=\ =4xyz-2(xy+xz+yz)+x+y+z$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă "$*$" - asociativă. **c)** Din **a)** avem pentru $(\forall)x \in \mathbb{R}$

$x*(1-x)=x(1-x)+(1-x)(1-1+x)=x(1-x)+(1-x)x=2x(1-x)$

Atunci $x*(1-x)=0 \Rightarrow 2x(1-x)=0 \Rightarrow x=0$ sau $x=1 \Rightarrow S=\{0,1\}$ $x=1 \Rightarrow S=\{0,1\}$

114. a) Ecuatia devine $-4x+2x+8-2=10 \Rightarrow x=-2$

b) $x*a=-xa+2x+2a-2; \ a*x=-ax+2a+2x-2$,

adică egalitatea este evidentă.

Trebuie determinat $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x*a=a,(\forall)x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

$-ax+2a+2x-2=a,\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$a(1-x)=2(1-x),\ (\forall)x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow a=2.$

c) În şirul de elemente ce se compun găsim şi $\frac{2008}{1004}$, adică 2.

Legea fiind asociativă, putem compune pe 2 cu oricare alt element din şir şi ţinând cont de punctul anterior rezultatul va fi 2.

Altfel din b) rezultă că $x*2=2*x=2,\ \forall x\in R$. Dar $2=\frac{2008}{1004}$. Atunci

$$\frac{2008}{1}*\frac{2008}{2}*\ldots*\frac{2008}{2008}=$$

$$\underbrace{\frac{2008}{1}*\ldots*\frac{2008}{1003}}_{x}*\frac{2008}{1004}*\underbrace{\frac{2008}{1005}*\ldots*\frac{2008}{2008}}_{y}=\underbrace{x*2}_{2}*y=2*y=2$$

115. a) $x\perp(-1)=x+(-1)+1=x,(-1)\perp x=-1+x+1=x\Rightarrow x\perp(-1)=(-1)\perp x=x.$

b) $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)\Leftrightarrow(ax+by-1)\circ z=x\circ(ay+bz-1)\Leftrightarrow a(ax+by-1)+$

$+bz-1=ax+b(ay+bz-1)-1\Leftrightarrow a^2x+aby+bz-a-1=ax+aby+b^2z-b-1\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=a,b^2=b,a=b\Rightarrow a=b=0$ sau $a=b=1$ (egalăm coeficienţii deoarece relaţia are loc oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{Z}$).

c) $a=b=1\Rightarrow x\circ y=x+y-1$. Se arată mai întâi că $(\mathbb{Z},\perp)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$ sunt grupuri comutative. Pentru $(\mathbb{Z},\perp)$ avem:

1) asociativitatea: $(x\perp y)\perp z=x\perp(y\perp z)\Leftrightarrow(x+y+1)+z=x+(y+z+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+1+z+1=x+y+z+1+1$, adevărat, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.

2) comutativitatea: $x\perp y=y\perp x\Leftrightarrow x+y+1=y+x+1$ pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$.

3) -1 element neutru conform **a)**

4) Orice $x\in\mathbb{Z}$ este simetrizabil $\Leftrightarrow\exists x'\in\mathbb{Z}$ astfel ca $x\perp x'=-1\Rightarrow x+x'+1=$

$=-1\Rightarrow x'=-x-2\in\mathbb{Z}$. Analog $(\mathbb{Z},\circ)$ grup comutativ. F este morfism între $(\mathbb{Z},\perp)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$ dacă $f(x\perp y)=f(x)\circ f(y),\forall x,y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow f(x+y+1)=(x+2)\circ(y+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+1+2=x+2+y+2-1$, adevărat.

116.

a) $3+2\sqrt{2}\in G\Leftrightarrow 3+2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\Rightarrow a=3$ si $b=2\in\mathbb{Z}$ şi $a^2-2b^2=1\Leftrightarrow 3^2-2\cdot2^2=1$ (A).

b) $\forall x,y\in G\Rightarrow x\bullet y\in G$ Fie $x\in G\Rightarrow x=a_1+b_1\sqrt{2},\ a_1,b_1\in R$ si $a_1^2-2b_1^2=1$

$y\in G\Rightarrow y=a_2+b_2\sqrt{2},\ a_2,b_2\in R$ si $a_2^2-2b_2^2=1$.

Scanned with OKEN Scanner

$x \bullet y = \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right)(a_2 + b_2\sqrt{2}) = \left(a_1a_2 + 2b_1b_2\right) + \sqrt{2}\left(a_1b_2 + b_1a_2\right)$

$a_1a_2 + 2b_1b_2 = a \in Z$

$a_1b_2 + b_1a_2 = b \in Z$ si

$a^2 - 2b^2 = 1$ (se arată prin calcul)

$\Rightarrow x \bullet y \in G \Rightarrow$ "$\bullet$" este lege de compoziţie.

c) Fie x^{-1} inversul lui $x \in G$,unde $x = a + b\sqrt{2}$, $a, b \in Z$, $a^2 - 2b^2 = 1$ .Atunci $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.Dar $x=0 \notin G$ (pentru ca $0^2-2\cdot0^2=1$-fals),deci $x \neq 0$ pentru orice x din G,de unde

$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = a - b\sqrt{2} = a + (-b)\sqrt{2} \in G$ pentru ca $a,(-b) \in Z$ si $a^2-2(-b)^2=1$. În concluzie orice element din G are invers în G.

117. a) $2008 \circ (-2008) = 2^0 = 1$..

b) $x \circ x^2 = 64 \Leftrightarrow 2^{x+x^2} 64 \Leftrightarrow x + x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$

c) $(x \circ y) \circ z = 2^z \Leftrightarrow 2^{x+y} \circ z = 2^z \Leftrightarrow 2^{2^{x+y}+z} = 2^z \Leftrightarrow 2^{x+y} = 0$ fals ,rezulta ca $x,y,z \in \Phi$

118. a) $x * 0 = x$.**b)** $x*(y*z) = \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3}\right)^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$, şi deci operaţia e asociativă.

c) Arătăm prin inducţie că $x_n = \sqrt[3]{(n+1)x_0^3}$ Pentru $n = 1$ afirmaţia urmează imediat. Fie afirmaţia adevărată pentru careva n. Atunci

$x_{n+1} = x_n * x_0 = \sqrt[3]{(n+1)x_0^3 + x_0^3} = \sqrt[3]{(n+2)x_0^3}$ Atunci $x_7 = \sqrt[3]{8x_0^3} = 2x_0 \in Q$

119. a) $(x-2)(y-2)+2 = xy - 2x - 2y + 4 + 2 = xy - 2(x+y) + 6 = x \circ y$.

b) $x, y \in G \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ y > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ y-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x-2)(y-2) > 0 \Rightarrow x \circ y > 2$.

c) Se observă uşor că elementul neutru pe mulţimea G este 3 şi trebuie să avem pentru ca x să fie simetrizabil că există y astfel încât $x \circ y = 3$ de unde

$(x-2)(y-2) = 1$ ($x \in G \Rightarrow x \neq 2$)de unde se observă că putem alege $y = 2 + \frac{1}{x-2}$ şi se verifică toate condiţiile.

Aşadar orice element din G este simetrizabil.

120. a) $x \circ e = 1 \Leftrightarrow x^{3\ln e} = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1$ .De unde singura solutie reala este x=1.

b) Fie $x, y \in G \Rightarrow x > 0, x \neq 1 si y > 0, y \neq 1$ are sens $\ln y$ şi $x \circ y = x^{3\ln y} > 0$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

Presupunem, prin reducere la absurd, că $x\circ y=1\Leftrightarrow x^{3\ln y}=1$ .De unde x=1(contradictie cu x≠1) sau 3lny=0,de unde $y=1$, fals. Deci $x\circ y\in G$

c) "$\circ$" este asociativă pe G daca $\forall x,y,z\in G:(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.Calculam

$(x\circ y)\circ z=x^{3\ln y}\circ z=\left(x^{3\ln y}\right)^{3\ln z}=x^{9\ln y\ln z}$; $x\circ(y\circ z)=x\circ y^{3\ln z}=x^{3\ln y^{3\ln z}}=x^{9\ln y\ln z}$.

Rezultă că legea e asociativă.

121. a) Calcul direct: $2(x-3)(y-3)+3=2xy-6x-6y+18+3=x*y$.

b) $5^x*5^x=11$, conform punctului a) avem $2\left(5^x-3\right)^2+3=11$ de unde rezultă $\left(5^x-3\right)^2=4$ şi obţinem $5^x-3=\pm 2$. Avem două soluţii:din $5^x=1\Rightarrow x=0$ şi din $5^x=5\Rightarrow x=1$.Deci $x\in\{0;1\}$.

c) Trebuie să aflăm mai întâi elementul neutru al legii date: $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$ unde am notat cu „e" elementul neutru al legii date.

Din $x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ obţinem $2(x-3)(e-3)+3=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$2(x-3)(e-3)=x-3,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 2(e-3)=1\Rightarrow e=\frac{7}{2}$

Notez cu x' elementul simetrizabil a lui x în raport cu legea „* ". Trebuie să se verifice relaţia:

$x'*x=x*x'=e$ din ecuaţia $x'*x=e\Rightarrow 2\left(x'-3\right)(x-3)+3=\frac{7}{2}\Rightarrow$

$2\left(x'-3\right)(x-3)=\frac{1}{2}$ există x' dacă $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$. Deci toate elementele $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ sunt simetrizabile, simetricele lor sunt $x'=\frac{1}{4(x-3)}+3\Leftrightarrow x'=\frac{12x-35}{4(x-3)}$

122. a) $0=0+0\sqrt{3}$, dar $0^2-3\cdot 0^2\neq 1\Rightarrow 0\notin G$, iar $1=1+0\sqrt{3}$ şi $1^2-3\cdot 0^2=1\Rightarrow 1\in G$.

b) $\left.\begin{array}{l}x\in G\Rightarrow x=a+b\sqrt{3}\text{ cu }a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\\ y\in G\Rightarrow y=c+d\sqrt{3}\text{ cu }c,d\in\mathbb{Z},\ c^2-3d^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow x\cdot y=ac+3bd+\sqrt{3}(ad+bc)$.

Cum

$ac+3bd,ad+bc\in\mathbb{Z}$ şi $(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2=\left(a^2-3b\right)\left(c^2-3d^2\right)=1\Rightarrow x\cdot y\in G$.

c) $x\in G\Rightarrow x=a+b\sqrt{3}$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$, $a^2-3b^2=1\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=a-b\sqrt{3}\in G$.

123. a) $2007\circ 2008=2007+2008+1=4016$.

b) $x\circ x^2\leq 3\Leftrightarrow x+x^2+1\leq 3\Leftrightarrow x+x^2-2\leq 0\Leftrightarrow x\in[-2,1]$.

c) $C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2=n+6\Leftrightarrow C_n^0+C_n^1+C_n^2+2=n+6\Leftrightarrow 1+n+\frac{n(n-1)}{2}+2=n+6\Rightarrow$

$\Rightarrow n\in\{-2,3\}\cap\mathbb{N}^*$ şi $n\geq 2\Rightarrow n=3$.

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie $Card\ A = 1$.

124. a) $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$. Dar $x \in G \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) Calculăm

$$\frac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)} = \frac{xy+x+y+1-xy+x+y-1}{xy+x+y+1+xy-x-y+1} = \frac{2x+2y}{2xy+2} = \frac{x+y}{xy+1} = x*y$$

c) $x*y \in G \Leftrightarrow x*y \in (-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} x*y > -1 \ (1) \\ x*y < 1 \ (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} > -1 \Leftrightarrow \frac{x+y+1+xy}{1+xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0$ adevărat pentru că din

$x, y \in (-1;1) \Rightarrow x \cdot y \in (-1;1) \Rightarrow 1+xy > 0 \Rightarrow x+1 > 0, y+1 > 0$

$(2) \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+y-1-xy}{1+xy} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy} < 0$ adevărat pentru că din

$x, y \in (-1;1) \Rightarrow x \cdot y \in (-1;1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 0 \\ 1-y > 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(1-y) < 0$.

125. **a)** $x \circ y = x \cdot y + 3 \cdot x + 3 \cdot y + 6 \quad x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$

b) $\exists\, e \in R$ *a.i.* $x \circ e = x \ \forall\, x \in R$

$xe + 3x + 3e + 6 = x \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow (x+3)(e+2) = 0 \ \forall x \in R \Rightarrow e = -2$.

c) $\left.\begin{array}{ll} C_n^2 \circ C_n^2 = 13 & n \geq 2 \\ dar\ x \circ x = (x+3)^2 - 3 & \end{array}\right| \Rightarrow \left(C_n^2 + 3\right)^2 - 3 = 13 \Rightarrow$

$(C_n^2 + 3)^2 = 16 \Rightarrow C_n^2 + 3 = 4 \Leftrightarrow C_n^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{n(n-1)}{2} = 1 \quad \Rightarrow n = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \notin N \end{cases} \Rightarrow n = 2$

126. a) $\hat{1} + \hat{7} = \hat{2} + \hat{6} = \hat{3} + \hat{5} = \hat{0}$, deci $S = \hat{4}$.

b) Elementele inversabile din $\mathbb{Z}_8$ sunt numerele prime în raport cu 8, deci $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}$ iar produsul lor este $\hat{1}$.

c) Cum $\hat{5}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_8$, vom scoate y din prima ecuaţie a sistemului şi vom înlocui în a doua: $\hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \Rightarrow \hat{5}y = \hat{2} - \hat{2}x \,\big|\cdot \hat{5} \Rightarrow y = \hat{2} - \hat{2}x = \hat{2} + \hat{6}x$, prin înlocuire în a doua ecuaţie obţinem: $\hat{3}x + \hat{2}\left(\hat{2} + \hat{6}x\right) = \hat{5} \Leftrightarrow \hat{7}x + \hat{4} = \hat{5} \Leftrightarrow \hat{7}x = \hat{1} \Leftrightarrow x = \hat{7}$, de unde $y = \hat{2} + \hat{6} \cdot \hat{7} = \hat{4}$. Deci soluţiile sunt $\begin{cases} x = \hat{7} \\ y = \hat{4} \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

127. a) $x\circ x=x^2-3(x+x)+12$ şi obţinem ecuaţia $x^2-6x=0$ cu soluţiile 0 şi 6.

b) Calculăm $1\circ(2*3)=1\circ(2+3-3)=1\circ 2=1\cdot 2-3(1+2)+12=5$; calculăm $(1\circ 2)*(1\circ 3)=5*3=5+3-3=5$. Deci cele relaţii sunt egale.

c) $\begin{cases}(x-3)*y=2\\(x-y)\circ 4=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3+y-3=2\\(x-y)4-3(x-y+4)+12=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=8\\x-y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-1\end{cases}$.

128. a) $(x\circ y)\circ z=(x+y+11)+z+11=x+y+z+22$. Expresia este simetrică în x,y,z deci legea este asociativă. (Altfel, calculăm $x\circ(y\circ z)=x+y+z+22$).

b) Avem relaţiile următoare:
$x\circ x=2x+11, x\circ x\circ x=3x+22, x\circ x\circ x\circ x=4x+33, x\circ x\circ x\circ x\circ x=5x+44,$
$x\circ x\circ x\circ x\circ x\circ x=6x+55\Rightarrow 6x+55=1\Rightarrow 6x=-54\Rightarrow x=-9\in\mathbb{Z}$

c) Legea "$\circ$" este asociativă conform punctului a).
$x\circ y=x+y+11=y+x+11=y\circ x,\forall x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ legea "$\circ$" este comutativă.
Studiem existenţa elementului neutru: $\exists e\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ e=e\circ x=x,\forall x\in\mathbb{Z}$
$x\circ e=e\circ x$ din comutativitate, $x\circ e=x\Rightarrow x+e+11=x\Rightarrow e=-11\in\mathbb{Z}$.
Arătăm: $\forall x\in\mathbb{Z},\exists! x'\in\mathbb{Z}, x\circ x'=x'\circ x=e$
$\Rightarrow x'\circ x=11\Rightarrow x+x'+11=-11\Rightarrow x'=-x-22\in\mathbb{Z}$
$\Rightarrow(\mathbb{Z},\circ)$ grup comutativ.

129. a) Se verifică uşor prin calcule.
b) Se foloseşte punctul a) y=2.
c) Din b) rezultă că x∘2=2∘x=2 oricare x∈R.
Deci $E=\underbrace{(-2008)\circ\ldots\circ 1}_{x}\circ 2\circ\underbrace{3\circ\ldots\circ 2008}_{y}=\underbrace{x\circ 2}_{2}\circ y=2\circ y=2$.

130. a) $\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$.

b) $f(x*y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\frac{1-\frac{x+y}{1+xy}}{1+\frac{x+y}{1+xy}}=\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}=f(x)\cdot f(y)$

c) $(x*y)*z=\frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}\cdot z}=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}=x*(y*z)\ \forall x,y,z\in(-1,1)$

131. Se observă că $x*y=(x-2)(y-2)+2$ si $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$ şi că legile sunt comutative.
a) $(x*2)-(3\circ y)=2-3=-1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $x*e_1=x\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e_1=3$ si $x*e_2=x\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e_2=4$.
Atunci $e_1*e_2+e_1\circ e_2=e_2+e_1=3+4=7$

c). $f(x*y)=a(x*y)+1=a(x-2)(y-2)+2a+1$ şi $f(x)\circ f(y)=(ax-2)(ay-2)+3$
Prin egalare şi identificarea coeficienţilor rezultă a=1.

132. a) $(x+2)\perp\left(\frac{1}{x}+3\right)=(x+3-3)(\frac{1}{x}+3-3)+3=4$

b) $x\perp e=x\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e=4$ care este element neutru şi la stânga.

c) $x\perp x'=e\Leftrightarrow x'=\frac{1}{x-3}+3\Leftrightarrow x\neq 3$ Mulţimea elementelor simetrizabile va fi $\mathbb{R}-\{3\}$.

133. a) $I_2\in M_2(\mathbb{Z}_5);\hat{0},\hat{1}\in\mathbb{Z}_5\Rightarrow\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{2}\cdot\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}=I_2\in G.$

$O_2\in M_2(\mathbb{Z}_5),\hat{0}\in\mathbb{Z}_5\Rightarrow\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{2}\cdot\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}=O_2\in G.$

b) Fie $A,B\in G\ A=\begin{pmatrix}\hat{x}&\hat{y}\\ \hat{2}\hat{y}&\hat{x}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\hat{a}&\hat{b}\\ \hat{2}\hat{b}&\hat{a}\end{pmatrix},\hat{x},\hat{y},\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_5$

$A+B=\begin{pmatrix}\hat{x}+\hat{a}&\hat{y}+\hat{b}\\ \hat{2}(\hat{y}+\hat{b})&\hat{x}+\hat{a}\end{pmatrix},\hat{x}+\hat{a},\hat{y}+\hat{b}\in\mathbb{Z}_5\Rightarrow A+B\in G.$

c) Conform (b) G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ în raport cu operaţia de adunare a matricelor. $(M_2(\mathbb{Z}_5),+)$ -monoid comutativ conform (a) $O_2\in G\Rightarrow(G,+)$ monoid comutativ $\forall\hat{a}\in\mathbb{Z}_5\ \exists\ -\hat{a}\in\mathbb{Z}_5$ a.î.

$\hat{a}+(-\hat{a})=(-\hat{a})+\hat{a}=\hat{0}\Rightarrow\forall\ X\in G,X=\begin{pmatrix}\hat{x}&\hat{y}\\ \hat{2}\hat{y}&\hat{x}\end{pmatrix}$

$\exists\ -X\in G,\ -X=\begin{pmatrix}-\hat{x}&-\hat{y}\\ -\hat{2}\hat{y}&-\hat{x}\end{pmatrix}$ a.î. $X+(-X)=O_2\Rightarrow(G,+)$ grup comutativ.

134. a) Elementele inversabile sunt cele care sunt prime cu 6 deci $\hat{1},\hat{5}$.

b) Verificând rezultă soluţiile primei ecuaţii $\hat{2},\hat{5}$ A doua ecuaţie are o soluţie elementul nul, rezultă că $P=\hat{0}$, deci S+P=$\hat{1}$.

c) Singura soluţie este $\hat{0}$ rezultă probabilitatea 1/6.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

135. a) $x*y=y*x,\forall x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow xy+3x+ay+b=yx+3y+ax+b\Rightarrow a=3$;

b) Legea $x*y=xy+3x+3y+6,\forall x,y\in\mathbb{R}$ admite element neutru $\Leftrightarrow\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât

$x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$; $xe+3x+3e+6=x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow xe+2x+3e+6=0$,

$\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(e+2)(x+3)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e+2=0$,de unde $e=-2$

c) $(-3)*x=-3,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -3x-9+ax+b=-3,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(a-3)x+b-6=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=3$;

$b=6$.

136. a) Prin verificarea directă a asociativităţii sau observăm că legea se mai poate scrie

$xoy=(x+4)(y+4)-4;\ xo(yoz)=(x+4)\left[(y+4)(z+4)-4+4\right]-4=$

$=(x+4)(y+4)(z+4)-4;\ (xoy)oz=\left[(x+4)(y+4)-4+4\right](z+4)-4=$

$=(x+4)(y+4)(z+4)-4;$

b) $xo(-4)oy=(x+4)(-4+4)(y-4)-4=-4.$

c) $\underbrace{1\circ(-2)\circ3}_{x}\circ(-4)\circ\underbrace{\ldots\circ2007\circ(-2008)}_{y}=-4$.

137. a) $I_3=\begin{pmatrix}2008^0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A_0\in G$ deoarece $0\in\mathbb{R}$.

b) $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}2008^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2008^y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2008^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x+y & 1\end{pmatrix}=A_{x+y},(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

c) Deoarece $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$ şi $x+y\in\mathbb{R},(\forall)x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow A_x\cdot A_y\in G$ pentru orice $A_x,A_y\in G$ deci G este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor.

Asociativitatea: $(\forall)A_x,A_y,A_z\in G\Rightarrow(A_x\cdot A_y)\cdot A_z=A_x\cdot(A_y\cdot A_z)$ este proprietate cunoscută a inmulţirii matricelor.

Elementul neutru: $A_0\cdot A_x=A_x\cdot A_0=A_{x+0}=A_x,(\forall)A_x\in G$ şi $A_0\in G$ deoarece $0\in\mathbb{R}$, atunci A_0 este element neutru.

Elemente simetrizabile: $A_x\cdot A_{-x}=A_{-x}\cdot A_x=A_0,(\forall)x\in\mathbb{R}$ şi $A_{-x}\in G$, deoarece $-x\in\mathbb{R}$, atunci orice element A_x din G are simetricul $A_{-x}\in G$.

Deci $(G,\cdot)$ grup. (Evident grupul este comutativ deoarece $A_x\cdot A_y=A_{x+y}=A_{y+x}=A_y\cdot A_x,(\forall)A_x,A_y\in G$).

138. a) $x\circ x=2\Leftrightarrow 2x-14=2\Leftrightarrow x=8.$

b) $(x\circ y)\circ z=(x+y-14)\circ z=x+y+z-28=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}.$

c) asociativitatea s-a demonstrat la punctul b); din relaţia $x\circ e=x,\forall x\in\mathbb{R}$ obţinem $e=14$ element neutru; pentru orice $x\in\mathbb{R}$, obţinem $x'=28-x$ simetricul lui x în raport cu legea de compoziţie dată; comutativitatea rezultă din $x\circ y=y\circ x,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

139. a)
$x \circ y = xy - 10x - 10y + 100 + 10 = x(y-10) - 10(y-10) + 10 = (x-10)(y-10) + 10, \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $C_{10}^1 \circ C_{20}^1 = 10 \circ 20 = (10-10)(20-10) + 10 = 10.$

c) Ecuaţia este echivalentă cu $(x-10)(x-11) + 10 = 10 \Leftrightarrow x \in \{10, 11\}$.

Deci soluţia ecuaţiei este $S = \{10, 11\}$.

140. a) $detX = a^2 > 0, \forall a > 0.$

b) Din $AX = XA$, se deduc relaţiile $a + 5c = a$, $b + 5d = b + 5a$, $d = d + 5c$,

unde $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ceea ce revine $c = 0$, $a = d = x$, $b = y$.

c) Demonstrăm că adunarea este operaţie internă pe G. Fie $X, Y \in G$ avem

$(X+Y) \cdot A = XA + YA = AX + AY = A(X+Y) \Rightarrow X + Y \in G.$

Asociativitatea şi comutativitatea sunt verificate implicit. Elementul neutru este $O_2 \in G$.

Orice matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in G$ are matricea simetrică $X' = \begin{pmatrix} -x & -y \\ 0 & -x \end{pmatrix} \in G.$

În concluzie, $(G; +)$ este grup comutativ.

Într-o abordare mai scurtă se arată că G este subgrup al grupului aditiv şi abelian $M_2(\mathbb{R})$.

141. a) $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{2}$ în Z_6, deci $x \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$.

b) Adunând toate liniile la prima se obţine pe prima linie $\hat{0}$, deci determinantul este $\hat{0}$.

c) Înmulţind prima relaţie cu $\hat{2}$ rezultă: $\begin{cases} \hat{4}x + \hat{2}y = \hat{2} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$, scăzând $\Rightarrow \hat{3}x = \hat{3}$, adică $x \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$. Dacă $x = \hat{1} \Rightarrow y = \hat{2}$, dacă $x = \hat{3} \Rightarrow y = \hat{4}$, dacă $x = \hat{5} \Rightarrow y = \hat{0}$, deci $S = \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{3}, \hat{4}), (\hat{5}, \hat{0})\}$.

Altfel sistemul se poate rezolva cu metoda substitutiei:din prima ecuatie se obţine: $y = \hat{4} + \hat{4}x$. Înlocuind în ecuaţia a doua se obţine $x + \hat{2}(\hat{4} + \hat{4}x) = \hat{5} \Leftrightarrow x + \hat{2} + \hat{2}x = \hat{5} \Leftrightarrow \hat{3}x = \hat{3} \Leftrightarrow x \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$.Inlocuind in substitutie se obtine solutia $S = \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{3}, \hat{4}), (\hat{5}, \hat{0})\}$.

142. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $A_x \cdot A_e = A_x \Rightarrow x + e = x \Rightarrow e = 0$, deci $A_0 = I_3$ este element neutru.

Scanned with OKEN Scanner

c) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\Leftrightarrow A_{x+y}=A_x\cdot A_y$, care rezultă din a).

143.a) $(x-1)(y-1)+1=xy-x-y+1+1=x\cdot y$.

b) $(x*y)*z=(xy-y-z+2)*z=(xy-x-y+2)*z-(xy-x-y+2)-z+2=$

$=xyz-xy-xz-yz+y+x+z$,

$x*(y*z)=x*(yz-y-z+2)=x(yz-y-z+2)-x-(yz-y-z+2)+2=$

$=xyz-xy-xz-yz+x+y+z$, deci $(x*y)*z=x*(y*z)$.

c) Vom avea $x_1*x_2*.....*x_n=(x_1-1)(x_2-1)....(x_n-1)+1$.

Într-adevăr, pentru n=2 este adevărată iar dacă presupunem pentru n va rezulta

$(x_1*x_2*.....*x_n)*x_{n+1}=\left[(x_1-1)(x_2-1)....(x_n-1)+1-1\right](x_{n+1}-1)+1=$

$=(x_1-1)(x_2-1)....(x_{n+1}-1)+1$, deci (prin inducţie),

$x_1*x_2*.....*x_n=(x_1-1)(x_2-1)....(x_n-1)+1$.

Atunci

$$\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}*\frac{\sqrt{3}}{2}*..*\frac{\sqrt{2008}}{2}=\left(\frac{\sqrt{1}}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{4}}{2}-1\right)\cdot...$$

$$...\cdot\left(\frac{\sqrt{2008}}{2}-1\right)+1=0+1=1.$$

Altfel din a) observam ca $x*1=1*x=1,\forall x\in R$ si tinand cont de $1=\frac{\sqrt{4}}{2}$ obtinem:

$$\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*...*\frac{\sqrt{2008}}{2}=\underbrace{\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*\frac{\sqrt{3}}{2}}_{x}*\frac{\sqrt{4}}{2}*\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{2}*...*\frac{\sqrt{2008}}{2}}_{y}=\underbrace{x*1}_{1}*y=1*y=1$$

144.a) Calculăm (x-6)(y-6)+6=xy-6x-6y+36+6=xy-6x-6y+42=x*y $\forall x,y\in R$.

b) $x*x=(x-6)^2+6$. $x*x*x=(x-6)^3+6$ $x*x*x*x=(x-6)^4+6$.

Dar $x*x*x*x=x\Rightarrow(x-6)^4+6=x\Rightarrow(x-6)^4=x-6$

$x-6=t\Rightarrow t^4=t\Rightarrow t(t^3-1)=0$ $t_1=0$ $(t-1)(t^2+t+1)=0$ $t_2=1, t_{3,4}\notin\mathbb{R}$

$\Rightarrow x-6=0\Rightarrow x_1=6$ $x-6=1\Rightarrow x_2=7$ $S=\{6,7\}$

c) $1*2*3*...*2008=(1-6)(2-6)(3-6)(4-6)(5-6)(6-6)...(2008-6)+6=6.$

145. a) $(x-\sqrt{2008})(y-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}=xy-(x+y)\sqrt{2008}+2008+\sqrt{2008}=x*y$.

b) Ca e să fie elementul neutru trebuie să avem $x*e=e*x=x,\forall x\in R$. Se observă uşor că $x*e=e*x$.Din

Scanned with OKEN Scanner

$x*e=x,\forall x\in R\Leftrightarrow (x-\sqrt{2008})(e-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}=x,\forall x\in R\Leftrightarrow$
$(x-\sqrt{2008})(e-\sqrt{2008})=x-\sqrt{2008},\forall x\in R$ se obtine e=$\sqrt{2008}+1$

c) Să demonstrăm prin inducţie că

$x_1*x_2*...*x_k=(x_1-\sqrt{2008})(x_2-\sqrt{2008})...(x_k-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}$.

Pasul de inducţie k=2 este dat de punctul a) şi să presupunem că am demonstrat pentru n şi vrem să arătăm pentru n+1.

Într-adevăr $x_1*...*x_n*x_{n+1}=(x_1*...*x_n-\sqrt{2008})(x_{n+1}-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}=$

$=((x_1-\sqrt{2008})(x_2-\sqrt{2008})...(x_n-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}-\sqrt{2008})*(x_{n+1}-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}$

folosind asociativitatea şi ipoteza de inducţie. Propoziţia este astfel demonstrată. Avem că $(-\sqrt{2008})*(-\sqrt{2007})*....*(\sqrt{2007})*(\sqrt{2008})=(-\sqrt{2008}-\sqrt{2008})*...$

$...*(\sqrt{2008}-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}=\sqrt{2008}$

146. a) Avem $A^2=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{3}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{3}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1}\cdot\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{3}\cdot\hat{3}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{5}\cdot\hat{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}=I_3$.

b) Deoarece $A^2=I_3$, înmulţind la stânga cu A în relaţia problemei, deducem că $X=A$ este unica soluţie a ecuaţiei matriciale date. (Notă: Putem vorbi despre inversa matricei, chiar dacă $\mathbb{Z}_8$ nu este corp). O altă metodă este cea calculatorie, iar prin ea se obţine acelaşi rezultat. **c)**

$$(B-A)^2=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{2}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{3}&\hat{7}&\hat{0}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\\hat{6}&\hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$$

147. a) Fie e elementul neutru. Atunci $x=x*e=3xe+7x+7e+14$, $(\forall)x\in\mathbb{Z}$, adică

$$3x(e+2)+7(e+2)=0\Leftrightarrow(3x+7)\cdot(e+2)=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{Z}\ .$$

Rezultă imediat $e=-2$ şi se verifică uşor că $x*e=e*x=x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Z}$.

b) Obţinem inecuaţia echivalentă $3x^2+14x+14\le-\frac{7}{3}\Leftrightarrow 9x^2+42x+49\le 0$. Să considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9x^2+42x+49$. Avem $\Delta=1764-1764=0$, deci $f(x)=(3x+7)^2\ge 0$. În consecinţă, singura soluţie a inecuaţiei date este $S=\left\{-\frac{7}{3}\right\}$. **c)** Căutăm acei $x,y\in\mathbb{Z}$ pentru care ecuaţia $3xy+7x+7y+14=-2$ admite soluţii în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Avem mai departe

$y=-\frac{16+7x}{3x+7}=-2-\frac{x+2}{3x+7}\in\mathbb{Z}$. Să notăm $t=x+2$. Atunci $\frac{t}{3t+1}\in\mathbb{Z}$, ceea ce este adevărat doar pentru $t=0$, adică $x=-2$. Atunci şi $y=-2$.

Scanned with OKEN Scanner

148. a) $3(x+1)(y+1)-1=3xy+3x+3y+3-1=3xy+3x+3y+2=x\circ y$.

b) $3(x^2-4)(y^2-9)-1=-1 \Leftrightarrow (x^2-4)(y^2-9)=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$ sau $y=\pm 3$.

c) $a=\frac{4}{3}; b=-\frac{5}{7} \Rightarrow a\circ b=1\in\mathbb{N}$.

Din a∘b=3(a+1)(b+1)-1,alegem a+1=$\frac{2}{3}$ si b+1=$\frac{3}{2}$ de unde a=-$\frac{1}{3}$,b=$\frac{1}{2}$ si a∘b=3$\frac{2}{3}\frac{3}{2}$-1=2∈Z

149. a) $(x+2)(y+2)-2=xy+2x+2y+4-2=xy+2x+2y+2=x\circ y$

b) $\exists e\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x*e=e*x=x$. Deoarece legea e comutativă, avem că $x*e=x\Rightarrow x+e+2=x\Rightarrow e+2=0\Rightarrow e=-2\in\mathbb{Z}$. $\exists e'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\circ e'=e'\circ x=x$. Deoarece legea e comutativă, avem că $\Leftrightarrow (x+2)(e'+1)=0, \forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow e'=-1\in\mathbb{Z}$.

c) $\begin{cases} x^2+y^2+2=7 \\ x^2y^2+2x^2+2y^2+2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2+2(x^2+y^2)=14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2+10=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \end{cases}$, sau $\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$

$S=\{(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2),(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)\}$.

150. a) $x\circ y = 2xy - 8x - 8y + 36 = 2xy - 8x - 8y + 32 + 4 =$

$= 2x(y-4) - 8(y-4) + 4 = (y-4)(2x-8) + 4 = 2(x-4)(y-4) + 4,\ (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}.$

b) $xox = 2x^2 - 8x - 8x + 36 = 2x^2 - 16x + 36.$

$2x^2-16x+36=36\Rightarrow 2x^2-16x=0\Rightarrow 2x(x-8)=0$ $x_1=0$ şi $x_2=8$

c) Deoarece legea ∘ este asociativă putem calcula "separat":

$\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\ldots\circ\sqrt{15} = a$, respectiv $\sqrt{17}\circ\sqrt{18}\circ\ldots\circ\sqrt{2008} = b$. Atunci avem:

$\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\ldots\circ\sqrt{2008} = \sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\ldots\circ\sqrt{15}\circ\sqrt{16}\circ\sqrt{17}\circ\sqrt{18}\circ\ldots\circ\sqrt{2008} =$

$= a\circ\sqrt{16}\circ b = 4.$

151.

a) $x*y=3xy+3x+3y+2=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1, (\forall)x, y\in\mathbb{R}$.

b) $(x^2-2)*(y^2-5)=-1\Leftrightarrow 3[(x^2-2)+1]\cdot[(y^2-5)+1]-1=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-1=0)\ sau\ (y^2-4=0) \Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$ sau $y\in\{-2;2\}$.

În concluzie $S=\{(-1;a),(1;b),(c;-2),(d;2)/\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$

Scanned with OKEN Scanner

c) Observăm că $x*(-1)=(-1)*x=-1, (\forall)x\in\mathbb{R}$. Folosind asociativitatea legii şi observaţia , deducem că

$$\underbrace{(-2008)*.....*(-2)}_{a\in\mathbb{R}}*(-1)*\underbrace{0*1*.....*2008}_{b\in\mathbb{R}}=\underbrace{a*(-1)}_{-1}*b=(-1)*b=-1.$$

152. a) $(x-3)(y-3)+3=xy-3x-3y+12=x*y$

b) ecuaţia este echivalentă cu $x+x+4+x^2+x-3(x+x+1)+12=11 <=>$ $x^2-3x+2=0 <=> x_1=1,\ x_2=2.$

c) Din a doua ecuaţie din sistem avem : $xy+y-3x-3-3y+12=xy+x-3x-3y-3+12 <=> x=y$

Revenind la prima ecuaţie => $x+x-1+3=0 => x=y=-1.$

2.6. POLINOAME

153. a) $h=(X^2+2X-24)(X^2-4)=X^4+2X^3-28X^2-8X+96.$

b) $\left.\begin{matrix}h=X^4+2X^3-28X^2-8X+96\\ f=X^4+aX^3-28X^2+bX+96\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\begin{matrix}a=2\\ b=-8\end{matrix}}.$

c) Notând $2^x=a$,a>0 obţinem ecuaţia $a^4+2a^3-28a^2-8a+96=0$, cu soluţiile $a_1=4$, $a_2=-6$, $a_3=2$, $a_4=-2$.

Ţinând cont că a > 0 obţinem $2^x=4$ sau $2^x=2$, adică $x=2$ sau $x=1$.

154. a) $a_0=f(0)=1^{2008}-(-1)^{2008}=0.$

b) $f(1)+f(-1)=2^{2008}-0+0-(-2)^{2008}=0$ care este par.

c) $f(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^{2008}-(x-1)^{2008}=0\Leftrightarrow(x+1)^{2008}=(x-1)^{2008}\Leftrightarrow|x+1|=|x-1|$ cu soluţia $x=0.$

155. a) $f(-1)=1^{1004}.$

b) $a_0+a_1+a_2+...+a_{2008}=f(1)=3^{1004}$, deci este un număr natural impar.

c) Dacă q este câtul şi r restul împărţirii lui f la X^2-1, atunci $r=aX+b$ şi

$$f=q\cdot(X^2-1)+aX+b.$$

Astfel deducem $f(1)=a+b=3^{1004}$ şi $f(-1)=-a+b=1$, deci $b=\dfrac{3^{1004}+1}{2}$ şi $b=\dfrac{3^{1004}-1}{2}$, deci restul împărţirii este $r=\dfrac{3^{1004}-1}{2}X+\dfrac{3^{1004}+1}{2}.$

156. a) $f(1)=3^{669}, f(-1)=(-1)^{669}=-1 => f(1)+f(-1)=3^{669}-1$

b) $a_0+a_1+a_2+...+a_{2007}=f(1)=3^{669}:3$

Scanned with OKEN Scanner

c) Restul este de forma $aX+b$.

Din teorema împărţirii cu rest avem: $f(X)=(X^2-1)C(X)+ax+b$

$f(1)=3^{669} \Rightarrow a+b=3^{669}$ şi $f(-1)=-1 \Rightarrow -a+b=-1$

Adunând şi scăzând obţinem $a=\frac{3^{669}+1}{2}$ şi $b=\frac{3^{669}-1}{2}$.

Atunci avem că restul este $\frac{3^{669}+1}{2}X+\frac{3^{669}-1}{2}$.

157. a) pentru $a=\hat{0} \Rightarrow f=\hat{4} \Rightarrow gr(f)=0$ pentru. $a=\hat{1} \Rightarrow f=\hat{2}X+\hat{4} \Rightarrow gr(f)=1$

pentru $a=\hat{2} \Rightarrow f=\hat{4}X+\hat{4} \Rightarrow gr(f)=1$ pentru $a=\hat{3} \Rightarrow f=\hat{4} \Rightarrow gr(f)=0$

pentru $a=\hat{4} \Rightarrow f=\hat{2}X+\hat{4} \Rightarrow gr(f)=1$ pentru $a=\hat{5} \Rightarrow f=\hat{4}X+\hat{4} \Rightarrow gr(f)=1$

b) Făcând schema lui Horner

	X^3	X^2	X^1	X^0
f	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$
$-\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

obţinem câtul $C(X)=X^2+X+\hat{1}$ şi restul $R(X)=\hat{0}$.

c) $\hat{1}$ rădăcină $\Rightarrow \hat{1}+a+b=\hat{0} \Rightarrow a+b=\hat{2}$

$\hat{2}$ rădăcină $\Rightarrow \hat{1}+\hat{2}a+b=\hat{0} \Rightarrow \hat{2}a+b=\hat{2}$

Scăzând cele două ecuaţii avem $a=\hat{0}$ şi $b=\hat{2}$.

158. a) $f(-1)=(-2)^{2008}=2^{2008}$; $f(1)=2^{2008}$; $f(-1)+f(1)=2^{2009}$.

b) Suma coeficienţilor unui polinom f este $f(1)$. Obţinem $f(1)=2^{2008}$.

c) Fie r(x) restul şi q(x) câtul împărţirii lui f la x^2-1.

Gradul restului este mai mic decât 2. Prin urmare $r(x)=ax+b$. Din teorema împărţirii polinoamelor $f(x)=(x^2-1)q(x)+r(x)$; de unde obţinem

$\begin{cases} f(1)=r(1) \\ f(-1)=r(-1) \end{cases} \Leftrightarrow a+b=2^{2008}$ şi $-a+b=2^{2008}$; deci obţinem $a=0$ şi $b=2^{2008}$, deci $r(x)=2^{2008}$.

159. a) $g^2=(X+\hat{1})^2=X^2+X+X+\hat{1}=X^2+\hat{1}=f$.

b) $f+g=X^2+X, (f+g):f=\hat{1}$ rest $(X+\hat{1})$.

c) Folosind regula produsului obţinem $2^3=8$.

Scanned with OKEN Scanner

160. a) Trebuie să avem $f(-3)=0$ adică $0=\widehat{-27}+a\hat{9}-\hat{3}+\hat{1}=\hat{1}+\hat{4}a$, atunci $\hat{a}=\hat{4}$.

b) $f=X^3+X^2+X+\hat{1}=X^2(X+\hat{1})+(X+\hat{1})=(X^2+\hat{1})(X+\hat{1})$.

c) Soluţiile, de la b) sunt $X=\hat{4}$ şi $X^2=\hat{4}$, adică $X\in\{\hat{4},\hat{2},\hat{3}\}$.

161. a) Dacă $f=g$ atunci $\hat{3}a+\hat{2}b=\hat{2}a+\hat{3}b,\hat{3}(a+b)=\hat{2}$, de unde găsim $a=b=\hat{2}$.

b) Pentru $a=b=\hat{2}$ atunci $f=g$ atunci

$$f(\hat{0})+f(\hat{1})+...+f(\hat{4})=g(\hat{0})+...g(\hat{4})=\sum_{i=0}^{4}\hat{2}i^2+\hat{2}i+5a=0.$$

c) $f(x)=\hat{2}x^2+\hat{2}x+\hat{5}a=\hat{2}(x^2+x)=\hat{0}$, de unde $x(x+1)=\hat{0}$, deci $x\in\{\hat{0},\hat{4}\}$.

162. a) $a_0=f(0)=2$.

b) Restul împărţirii este, conform Bezout, $f(-1)=2^{2008}$.

c) Suma coeficienţilor este egală cu $f(1)=2^{2008}$.

163. a) $g=X^2-3x+2=(X-1)(X-2)$.

b) Dacă $g|f\Rightarrow(\forall)x_0$ rădăcină pentru g este rădăcină pentru f. Rădăcinile lui g sunt $x_1=1, x_2=2$. Verificăm dacă $f(1)=0\Leftrightarrow 1^{10}=0$ fals, respectiv $f(2)=0\Leftrightarrow(-1)^{10}=0$, fals.

c) Dacă r este restul împărţirii lui f la g obţinem $f(x)=g(x)\cdot c(x)+r(x)$, $r(x)=ax+b$. Alegând $x=1$, respectiv $x=2$ în relaţia anterioară obţinem $a+b=f(1)=1$, $2a+b=f(2)=1$. Finalizând $a=0,b=1\Rightarrow r=1$.

164. a) Se aplică reducerea modulo 5.

Cum: $f(\hat{0})=\hat{4}, f(\hat{1})=3$. Atunci $f(\hat{0})+f(\hat{1})=\hat{2}$.

b) Înlocuind toate valorile posibile pentru x, se obţin soluţiile: $x=\hat{2}$, $x=\hat{4}$.

c) Folosind algoritmul împărţirii cu rest in $\mathbf{Z}_5[X]$ se obţine câtul $X^2+\hat{4}X+\hat{3}$ şi restul $\hat{0}$.

165. a) $g(\hat{0})=(\hat{0}+\hat{2})^2\cdot(\hat{0}+\hat{1})=\hat{1}$.

b) Avem $f(\hat{0})=\hat{0}^3+\hat{2}\cdot\hat{0}=\hat{0}; f(\hat{1})=\hat{1}^3+\hat{2}\cdot\hat{1}=\hat{0}; f(\hat{2})=\hat{2}^3+\hat{2}\cdot\hat{2}=\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}$,

deci $f(x)=\hat{0},\forall x\in Z_3$.

c) Dacă notăm $b=h(\hat{0})=h(\hat{1})=h(\hat{2})$, atunci polinomul $f=h-b$ are rădăcinile $\hat{0},\hat{1}$ şi $\hat{2}$, deci $f=a(X-\hat{0})(X-\hat{1})(X-\hat{2})=a(X^3+\hat{2}X)$, cu $a\neq\hat{0}$.

Atunci $h=f+b=a(X^3+\hat{2}X)+b$ cu $a,b\in Z_3, a\neq\hat{0}$. Se obţin 6 soluţii.

Scanned with OKEN Scanner

166. a) $f(\hat{1}) = \hat{1}^2 + a\hat{1} + b = \hat{1} + \hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$.

b) $f(\hat{0}) = \hat{1}$ implică $b = \hat{1}$ Atunci $f(\hat{1}) = \hat{1} + a + b = \hat{1}$ implică $a = \hat{2}$.

c) a, b pot lua câte 3 valori fiecare generând $3 \cdot 3 = 9$ polinoame diferite.

167. a) $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0}) = (\hat{3} + \hat{4} + \hat{3} + \hat{2}) \cdot \hat{0} = \hat{0}$.

b) Calculând membrul drept al egalităţii, obţinem succesiv:

$(\hat{3}x + \hat{3}) \cdot g + \hat{2}x + \hat{2} = (\hat{3}x + \hat{3})(x^2 + \hat{2}x) + \hat{2}x + \hat{2} = \hat{3}x^3 + \hat{4}x^2 + \hat{3}x + \hat{2} = f$

c) Prin verificare, se găseşte doar soluţia $x = \hat{4} \in Z_5$

168. a) $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ cu soluţiile $x = 2, -1$

b) Trebuie să avem $f(2) = f(-1) = 0$ sau $8 + 4m + 2n + 6 = -1 + m - n + 6 = 0$. Rezolvând sistemul obţinem $m = -4, n = 1$.

c) Dacă $m = -4, n = 1$ atunci $f(2) = 0$ deci tot produsul e 0.

169. a) $f = X\left(X^3 + X^2 + X + 1\right) + 1 = X \cdot g + 1$.

b) $g = X^3 + X^2 + X + 1 = x^2(x+1) + x + 1 = (x+1)\left(X^2 + 1\right)$. Rădăcina reală a lui g este $x = -1$.

c) Fie a rădăcină a lui g, deci $g(a) = 0$.

Din $f = X\left(X^3 + X^2 + X + 1\right) + 1 = X \cdot g + 1 \Rightarrow f(a) = a \cdot g(a) + 1 = 1$.

170. a) Făcând împărţirea lui f la g se obţine câtul C = X + a şi restul
R = (b – 1) X^2 – (a + 3) X^2 + 6 + 2a. Pentru ca g | f trebuie R = 0 => b = 1, a = –3

b) Din a) avem că f = (X – 3) (X^3 + X – 2)
Se observă că x = 1 este rădăcină a lui X^3 + X – 2 şi după împărţirea lui X^3 + X – 2 la X – 1 se obţine f = (X – 3) (X – 1) (X^2 + X + 2)
Deoarece X^2 + X + 2 are $\Delta < 0$ => f = (X – 3) (X – 1) (X^2 + X + 2) este descompunerea în factori ireductibili din $\mathbb{Q}$ [X]

c) Notăm $t = 3^x, t > 0$ şi obţinem ecuaţia $t^3 - 3t^2 + t - 5 + 6\frac{1}{t} = 0$ <=> $t^4 - 3t^3 + t^2 - 5t + 6 = 0$ (exact polinomul de la b)) <=> $(t-3)(t-1)(t^2 + t + 2) = 0$ care are rădăcinile reale $t_1 = 3, t_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0$.

171. a) $f(1) = 1 + a + b + c$, $f(-1) = 1 - a - b + c$. Un calcul rapid conduce la $f(1) + f(-1) = 2 + 2c = 1004$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Descompunerea polinomului este:

$f(X)=X^4-2X^3+2X-1=\left(X^2-1\right)\left(X^2+1\right)-2X\left(X^2-1\right)=(X^2-1)(X-1)^2=$

$=(X-1)^3(X+1)$

Rădăcinile sale sunt, deci, $x_1=-1, x_2=x_3=x_4=1$.

c) Presupunem că există. Atunci rădăcinile lui $g(-1,0,1)$ sunt şi rădăcini ale lui f, deci $f(0)=c=0$. Atunci $f=X^4+aX^3+bX$, şi avem $f(1)=1+a+b=f(-1)=1-a-b=0$.

Dar atunci $2=(1+a+b)+(1-a-b)=0$, imposibil.

172. a) Efectuând împărţirea polinomului f la polinomul X^2-1 obţinem câtul $X-9$ şi restul 0.

b) Înlocuind rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ în ecuaţia $f(x)=0$, adunând ecuaţiile obţinute şi grupând termenii obţinem

egalitatea $x_1^3+x_2^3+x_3^3-9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)+27=0$

Folosind relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi $x_1+x_2+x_3=9$, obţinem egalitatea

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-18$.

c) Transformăm polinomul f în produs $f=(X^2-1)(X-9)=(X-1)(X+1)(X-9)$

Se obţine ecuaţia $(3^x)^3-9\cdot(3^x)^2-3^x+9=0$, care se transformă în produs

$(3^x-9)(3^x-1)(3^x+1)=0$

Se rezolvă ecuaţiile $3^x=9$, respectiv $3^x=1$, făcând observaţia că $3^x+1\neq 0$.

Se obţin soluţiile $x_1=0, x_2=2$.

173. $f=X^3+aX^2-5X+14, S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n, n\in\mathbb{N}^*$ şi x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului f.

a) $x_1=2$ rădăcina polinomului $\Leftrightarrow f(2)=0\Leftrightarrow 4a+12=0\Leftrightarrow a=-3$.

b) $a=-4\Rightarrow f=X^3-4X^2-5X+14\Rightarrow X^3-4X^2-5X+14=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^3+2X^2-6X^2-12X+7X+14=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^2(X+2)-6X(X+2)+7(X+2)=0\Leftrightarrow(X+2)(X^2-6X+7)=0\Rightarrow$

$X+2=0\Rightarrow x_1=-2$ şi $X^2-6X+7=0, x_{1,2}=3\pm\sqrt{2}$.

c) Pentru $a=-4\Rightarrow x^3-4x^2-5x+14=0, x_i, i=\overline{1,3}$ fiind rădăcini verifică ecuaţia

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1^3-4x_1^2-5x_1+14=0\\x_2^3-4x_2^2-5x_2+14=0\\x_3^3-4x_3^2-5x_3+14=0\end{cases}$$

$$\overline{S_3-4S_2-5S_1+42=0}\Leftrightarrow S_3+42=4S_2+5S_1$$

174.a) Efectuând împărţirea obţinem câtul x^2+2x+4 şi restul $7x+5$.

Scanned with OKEN Scanner

b) y este rădăcină a lui $g \Rightarrow\ y^2-y-1=0 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Se observă prin calcul faptul că $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ sunt soluţii ale ecuaţiei $y^3=2y+1$. Altfel din $y^2-y-1=0 \Rightarrow y^2=y+1$. $y^3=y^2y=(y+1)y=y^2+y=y+1+y=2y+1$.

c) Avem $f(y)=(y^2-y-1)(y^2+2y+4)+7y+5$. Avem $y^2-y-1=0$ şi cum rădăcinile lui g sunt iraţionale $\Rightarrow 7y+5\notin\mathbb{Q} \Rightarrow f(y)\notin\mathbb{Q}$.

175. a) $f(1)=0 \Rightarrow m+11+7+m=0 \Rightarrow m=-9$.

b) $f=-9X^3+11X^2+7X-9$. Efectuând împărţirea polinomului f la g obţinem: $f=(X-1)(-9X^2+2X+9)$. Ecuaţia $-9x^2+2x+9=0$ are rădăcinile reale $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{82}}{9}$

Deci scrierea polinomului f în produs de factori ireductibili este:

$$f=-9(X-1)\left(X-\frac{1+\sqrt{82}}{9}\right)\left(X-\frac{1-\sqrt{82}}{9}\right)=-\frac{1}{9}(X-1)(9X-1-\sqrt{82})(9X-1+\sqrt{82}).$$

c) $f=-9X^3+11X^2+7X-9$. Aplicând relaţiile lui Viète ecuaţiei $f(x)=0$, obţinem:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\left(\frac{11}{9}\right)^2-2\left(-\frac{7}{9}\right)=\frac{247}{81}.$$

176. a) $x_1+x_2+x_3+x_4=-a \Leftrightarrow 3=-a \Leftrightarrow a=-3$.

b) $X-\sqrt{2}\mid f \Leftrightarrow f(\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow 4+2\sqrt{2}\ a+(a+3)2+6\sqrt{2}-4=0 \Leftrightarrow$
$a(2\sqrt{2}+2)=-6\sqrt{2}-6 \Leftrightarrow a=-3$.

c) $a=-3 \Rightarrow f=X^4-3X^3+6X-4$

Din b) $\Rightarrow x_1=\sqrt{2}$; cum $f\in\mathbb{Z}[X] \Rightarrow x_2=-\sqrt{2}$

Împărţind f la $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})=X^2-2$ avem $f=(X^2-2)(X^2-3X+2)$

Deoarece $X^2-3X+2=(X-1)(X-2) \Rightarrow f=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-1)(X-2)$ este descompunerea în factori ireductibili din $\mathbb{R}[X]$.

177. a) Din relaţiile lui Viete avem $x_1+x_2+x_3=m+1$ de unde m=0.

b) $f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}-3(m+1)-3\sqrt{3}+3=-3m$ şi ca să fie rădăcină trebuie să avem $f(\sqrt{3})=0$ de unde m=0.

c) $f(X)=X^3-X^2-3X+3=X^2(X-1)-3(X-1)=(X-1)(X^2-3)$.

Mai rămane să vedem că X^2-3 este ireductibil peste $\mathbb{Q}[X]$. Dacă ar fi reductibil ar trebui să aibă o rădăcină raţională fiind de grad 2, dar are rădăcinile $\sqrt{3},-\sqrt{3}$ care evident sunt irationale.

Scanned with OKEN Scanner

178. a) Dacă $f_a = X^3 + aX^2 + (a-1)X - 4$, atunci $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a-1 \\ x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$.

Aşadar a=2.

b) Dacă $X^2 - 2 \mid f$ trebuie să avem ca f are printre rădăcini şi rădăcinile polinomului $X^2 - 2$ adică $f(\sqrt{2}) = 0, f(-\sqrt{2}) = 0$. Avem sistemul $\begin{cases} 2\sqrt{2} + 2a - a\sqrt{2} - 4 = 0 \\ -2\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} - 4 = 0 \end{cases}$ de unde prin adunare se obţine a=2.

c) Nu se poate determina precis.Ca soluţie avem orice a din imaginea funcţiei $f : \mathbb{Q}_+ \setminus \{0,1\} \to \mathbb{Q}, f(x) = \dfrac{4 - x^3}{x(x-1)}$.

179. a) $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + a - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$;

b) $a = 1 \Rightarrow f = X^4 + X^3 - X - 1 = (X+1)(X^3 - 1) =$

$= (X+1)(X-1)\left(X^2 + X + 1\right)$ si $x^2 + x + 1 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x = -1$ sau $x = 1$

c) $\{x \in \mathbb{Q}, f(x) = 0\} \subset \{-1, 1\} \Rightarrow f$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

180. a) f(1)=0 de unde $m = -3$ sau $m = -5$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -m$ de unde obtinem m=0

c) Pentru $m = -5$,prin impartire cu x^2 ($x \neq 0$) şi gruparea termenilor obţinem ecuaţia

$$4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 20\left(x + \frac{1}{x}\right) + 24 = 0$$

Se notează $x + \dfrac{1}{x} = t$ de unde avem ecuaţia

$t^2 - 5t + 6 = 0$ cu $t_1 = 2$

şi $t_2 = 3$.

Revenind la notaţia făcută vom obţine $x_{1,2} = 1$ si $x_{3,4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

181. a) Pentru a=0 avem $f=(X^2-2X+1)^2 = (x-1)^4$ cu rădăcinile $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

b) Observăm ca f este diferenţă de pătrate.Deci $f=(X^2-2X+1+a)(X^2-2X+1-a)$.

c) f are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă ecuaţiile: $x^2-2x+1+a=0$ şi $x^2-2x+1-a=0$ au rădăcini reale $\Leftrightarrow \Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0$. Obţinem sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} 4 - 4(1+a) \geq 0 \\ 4 - 4(1-a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a \geq 0 \\ 4a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

182. a) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$ Dar $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$. Rezultă $a = 5$

b) $x^4 - x^3 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^3(x-1) - (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^3-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, x_4 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Solutiile reale sunt $x_1=x_2=1$.

c) Fie $p \in Z$ rădăcina întreagă a polinomului . Rezultă $p^4 - ap^3 - ap + 1 = 0$

Dar $a \in Z \Rightarrow a = \frac{p^4+1}{p^3+p} \in Z$. Efectuând împărţirea rezultă $a = p - \frac{p^2-1}{p^3+p}$

Fracţia $\frac{p^2-1}{p^3+p} \in Z$. Notăm $\frac{p^2-1}{p^3+p} = k \Leftrightarrow \frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = k \Rightarrow \frac{p^2-1}{p^2+1} = kp \in Z$

$\frac{p^2-1}{p^2+1} = 1 - \frac{2}{p^2+1} \in Z \Rightarrow p^2+1 \in \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow p = 0$ soluţie care nu verifică ecuaţia, sau

$p = \pm 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow a = \pm 1$.

Altfel: ecuaţia este cu coeficienţi întregi, deci soluţiile întregi ale ecuaţiei se găsesc printre divizorii termenului liber, adică printre divizorii lui 1. Posibilele soluţii întregi sunt 1 şi -1. Deci x=1 soluţie $\Leftrightarrow$ 1-a-a+1=0 $\Leftrightarrow$ a=1;x=-1 soluţie $\Leftrightarrow$ 1+a+a+1=0 $\Leftrightarrow$ a=-1.

183. a) Calcul direct $(x^2-6)^2 - 1 = x^4 - 12x^2 + 35 = f$.

b) Dacă f are rădăcini întregi, atunci ele se află printre divizorii termenului liber 35.

Calculăm $f(1) = 24 \neq 0$, $f(-1) = 24 \neq 0$, $f(5) \neq 0$, $f(-5) \neq 0$, $f(7) \neq 0$, $f(-7) \neq 0$. $f(35) \neq 0$, $f(35) \neq 0$. Aşadar singurele rădăcini întregi ar fi putut să fie $\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35$ dar ele nu sunt rădăcini , deci f nu are rădăcini întregi.

c) $f = x^4 - 12x^2 + 35 = (x^2-6)^2 - 1 = (x^2-6-1)(x^2-6+1) =$

$= (x^2-7)(x^2-5) = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.

184. Se consideră polinomul $f = x^4 + mx^2 + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$

a) $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ 1 + m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = -1 \end{cases}$.

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \Leftrightarrow$ $2 = -2m$ deci $m = -1$ (am folosit relaţiile lui Viète).

c) Pentru m=1 şi n=1 obţinem f= $X^4 + X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2+1)^2 - X^2 =$ $(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

185. a) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{array}{r|l} X^4-X^3+X^2-X+1 & X^2+1 \\ \hline -X^4-X^2 & X^2-X \\ \hline / \quad -X^3-X+1 & \\ \quad +X^3+X & \\ \hline \quad / \quad / \quad 1 & \end{array}$$

Câtul este X^2-X

Restul este 1

b) $f(x)=(x^2+1)q_1(x)+x \Rightarrow f(\pm i)=\pm i$

$f(x)=(x-1)q_2-1 \Rightarrow f(1)=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+i-a+bi+c=i \\ 1-i-a-bi+c=-i \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b=1 \\ 1-a+c=0 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=-1 \end{cases}.$$

c) Presupunem că f are rădăcini reale x_1,x_2,x_3,x_4. Conform relaţiilor lui Viète $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1x_2+\ldots+x_3x_4=a \end{array}$$

$x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geq 0 \Rightarrow (x_1+x_2+x_3+x_4)-2(x_1x_2+\ldots+x_3x_{4)} \geq 0 \Rightarrow$

$1-2a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}(F) \Rightarrow$

f are cel puţin 2 rădăcini din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

186. a) Din prima relaţie a lui Viète pentru polinomul f, avem: $x_1+x_2+x_3+x_4=-2$.

b) Pentru $a=-1,b=-2$ si $c=0$, ecuaţia ataşată funcţiei polinomiale este:

$x^4+2x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^3+2x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow x\left[x^2(x+2)-(x+2)\right]=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+2)(x-1)(x+1)=0$, de unde $x_1=0,x_2=-2,x_3=1,x_4=-1$.

c) Scriem relaţiile lui Viète pentru polinomul f:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-b \\ x_1x_2x_3x_4=c \end{cases}$$ .Dacă x_1,x_2,x_3,x_4 sunt în progresie aritmetică

avem $x_1+x_4=x_2+x_3=-1$. A doua şi a treia relaţie a lui Viéte devin

$x_3(x_1+x_4)+x_2(x_1+x_4)+x_1x_4+x_2x_3=a$ si $x_2x_3(x_1+x_4)+x_1x_4(x_2+x_3)=-b$.

Obţinem $x_1x_4+x_2x_3=a-1$ şi $x_2x_3+x_1x_4=b$, de unde $b=a-1$.

187. a) Din relaţiile lui Viète obţinem $x_1+x_2+x_3=0$.

b) Se înlocuiesc rădăcinile x_1,x_2,x_3 în ecuaţie şi se obţin relaţiile:

Scanned with OKEN Scanner

$x_1^3-3x_1+2=0,\ x_2^3-3x_2+2=0,\ x_3^3-3x_3+2=0,$

de unde prin însumare obţinem: $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3(x_1+x_2+x_3)+6=0$,

deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3(x_1+x_2+x_3)-6=-6$.

c) Adunăm linia a doua şi linia a treia la prima şi ţinând cont că $x_1+x_2+x_3=0$ rezultă că $d=0$.

188. a) $x^3-2x=0$ Din relaţiile lui Viete $\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_{2+}x_1x_3+x_2x_3=-2 \end{cases}$

b) $(x_1+x_2+x_3)^2=x^2{}_1+x^2{}_2+x^2{}_3+2\left(\frac{x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3}{-2}\right)\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$

c) Adunând toate liniile la prima linie obţinem

$$\begin{vmatrix} X_1+X_2+X_3 & X_1+X_2+X_3 & X_1+X_2+X_3 \\ X_2 & X_3 & X_1 \\ X_3 & X_1 & X_2 \end{vmatrix} = 0,$$ deoarece $x_1+x_2+x_3=0$.

189. a) Polinomul se scrie

$f=X^3-2X^2+X\Rightarrow f=X(X^2-2X+1)\Rightarrow f=X(X-1)^2\Rightarrow x_1=0, x_2=x_3=1$.

b) Din relaţiile lui Viète, avem: $x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=a$ şi $x_1x_2x_3=-b$ Din relaţia $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\Rightarrow 4=2+2\cdot a\Rightarrow a=1$.

c) Prin calcule se obţine că

$f=X^3-X^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+X(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2)-x_1^2x_2^2x_3^2\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$

$x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=a$. Din punctul b) se obţine $a=1$. Folosind relaţia:

$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2=x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2+2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$, avem:

$1^2=1+2\cdot(-b)\cdot 2\Rightarrow b=0$ .Datorită punctului a) în acest caz relaţia

$f=(X-x_1^2)(X-x_2^2)(X-x_3^2)$ este adevărată.

190. a) $f(-p)=-p^3+p^3+1=1$.

b) Trebuie să avem $f(1)=0$ adică $1+p+1=p+2=0$, de unde $p=-2$.

c) Din $x_i^3=-px_i^2-1$, avem $x_i^4=-px_i^3-x_i$.

Atunci $x_1^4+x_2^4+x_3^4=-p(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-(x_1+x_2+x_3)=$

$=-p[-p(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-3]-(x_1+x_2+x_3)$.

Din Viete avem $x_1+x_2+x_3=-p$; $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=p^2$.

Deci $x_1^4+x_2^4+x_3^4=-p[-p\cdot p^2-3]-(-p)=p^4+4p$.

Scanned with OKEN Scanner

191. Sistemul se scrie echivalent sub forma:

a) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=x_1x_2x_3 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2 \\ x_1x_2x_3=-4 \end{cases}$, de unde $x_1x_2x_3=-4$.

b) Ţinând seama de relaţiile lui Viète pentru ecuaţia algebrică de gradul al treilea, aceasta este $x^3-2x^2-2x+4=0$ de unde $a=-2, b=-2, c=4$. Ecuaţia obţinută are soluţia întreagă $x_1=2$ şi soluţiile $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$.

c) Din sistemul dat echivalent cu sistemul $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2 \\ x_1x_2x_3=-4 \end{cases}$ rezultă că soluţiile sistemului sunt soluţiile ecuaţiei de la b) adică $x_1=2$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$.

192. a) $f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-5=-\frac{37}{8}$.

b) Din teorema lui Bezout => restul împărţirii lui f la X – a este f (a) => f (a) = –5 <=> $a^3-a-5=-5$ <=> $a(a^2-1)=0$ <=> $a_1=0$, $a_{2,3}=\pm 1$.

c) Din relaţiile lui Viete $\Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0$$

(am adunat la prima linie pe celelalte).

193. a) Dacă o rădăcină este egală cu 2 rezultă că f(2)=0 $\Leftrightarrow 13+2m=0 \Leftrightarrow m=-\frac{13}{2}$.

b) Calculând $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ şi ţinând cont că numerele x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini ale polinomului dat, se obţine că: $x_1^3+x_1^2+mx_1+1=0$, $x_2^3+x_2^2+mx_2+1=0$ şi $x_3^3+x_3^2+mx_3+1=0$. Prin însumarea membru cu membru a celor trei relaţii, rezultă că: $S_3+S_2+mS_1+3=0$.

c) Presupunem prin absurd că $x=\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$, este rădăcină raţională a polinomului f. Atunci p este divizor întreg al termenului liber, iar q este divizor întreg al coeficientului termenului de grad maxim; prin urmare $\frac{p}{q}\in\{-1,1\}$. Dacă $x=1$ este rădăcină, se obţine $m=-3$ (impar), şi dacă $x=-1$ este rădăcină, se obţine $m=-1$ (impar), contradicţie cu m par.

194. a) $f(0)-f(1)=-r-1+p-q+r=p-q-1$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

b) Din relaţiile lui Viete $\Rightarrow x_1+x_2+x_3=p,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$ şi $x_1x_2x_3=r$. Dar $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1-(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_1x_2x_3=1-p+q-r$.
Altfel: x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f rezultă că $f=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
Deci $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=1-p+q-r$.
c) Fie $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi(x)=x^3+x^2+x-1$ funcţia polinomială ataşată polinomului g.
Deoarece $\varphi'(x)=3x^2+2x+1=2x^2+(x+1)^2>0\Rightarrow\varphi$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. În concluzie φ are o singură rădăcină reală, deci g nu are toate rădăcinile reale.
Altfel : presupunem că f are toate rădăcinile reale, rezultă că $x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0$. Calculăm $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=1-2=-1<0$ fals. Deci presupunerea făcută este falsă, în concluzie f nu are toate rădăcinile reale.

195. a) Cu relaţiile Viète, $S=-3,\ S'=2\Rightarrow S-S'=-5$.
b) Deoarece $x^3+3x^2+3x+1=(x^2-2x+1)(x+5)+(12x-4)$, câtul este $x+5$, iar restul $12x-4$. Altfel prin impartire directă.
c) g are rădăcini egale: $y_1=y_2=1$. *Deci*: $f(y_1)f(y_2)=f(1)f(1)=64$.

196. a) $g\mid f\Leftrightarrow f(1)=0 sif(-1)=0$. Altfel observăm că $f=(X^2-1)^2$. Deci g/f
b) $S=0,\ P=1\Rightarrow SP=0$
c) $x_1^4-2x_1^2+1=0$
$x_2^4-2x_2^2+1=0$
$x_3^4-2x_3^2+1=0$
---------- +
$\sum x_1^4-2\sum x_1^2+4=0\Rightarrow\sum x_1^4=4$
Altfel: din $f=(X^2-1)^2$ rezultă că rădăcinile lui f sunt $x_1=x_2=-1, x_3=x_4=1$. Deci $T=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=4$.

197. a) Pentru $a=2,\ f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3-3x+2=x^2-3x+2\Leftrightarrow x^3=x^2\Leftrightarrow x\in\{0,1\}=A$.
b) Soluţia bazată pe relaţiile lui Viete o lăsăm în seama cititorului.
Dacă rădăcina dublă pozitivă este α, $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$, de unde $3\alpha^2-3=0$, adică $\alpha=1$ şi $\alpha=-1$, dar α pozitivă de unde rădăcina dublă este $\alpha=1$ iar a treia rădăcină este -2.
c) Inecuaţia revine la $e^{x^3-3x+2}\leq 1$, adică $x^3-3x+2\leq 0.\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)\leq 0$ Se reia punctul precedent şi se obţine $S=\{1\}\cup(-\infty,-2]$.

198.a) $f(1)=1+a+b+c$, $f(-1)=-1+a-b+c$, şi de unde prin adunare se obţine $2c=1$ adică $c=\frac{1}{2}$.b) $f(X)=X^3-3X^2+X+1=(X-1)(X^2-2X-1)$ de unde se

observă rădăcina 1 şi mai avem ecuaţia de grad 2 $x^2-2x-1=0$ care are rădăcinile reale $1+\sqrt{2}$ si $1-\sqrt{2}$.

c) Prin adunare la prima linie a celorlalte două linii se obţine

$$D=(x_1+x_2+x_3)\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{pmatrix}=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-x_1^2-x_2^2-x_3^2)$$

$$=(x_1+x_2+x_3)\left(-(x_1+x_2+x_3)^2+3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\right)=-a(3b-a^2)$$

folosind relaţiile lui Viète $x_1+x_2+x_3=-a$ şi $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$.

199. a) $f(1)+f(-1)=2008 \Leftrightarrow 2c+2=2008 \Leftrightarrow c=1003$.

b) $f(0)=f(1)=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ a+b+c=-3 \end{cases}(1)$. Dar $x=2$ este rădăcină $\Rightarrow f(2)=0$

$\Leftrightarrow 8a+2b+c=-16$ (2). Din (1) şi $(2) \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$.

c) Înlocuind a, b, c în polinom, obţinem $f=X^4-2X^3+X-2=$

$=(X-2)(X+1)(X^2-X+1)$. Rădăcinile reale sunt -1 şi 2.

200. a) $\hat{0}^3=\hat{0}$ (A); $\hat{1}^3=\hat{1}$ (A); $\hat{2}^3=\widehat{8-6}=\hat{2}$ (A); $\hat{3}^3=\widehat{9-6}\cdot\hat{3}=\hat{3}$ (A);

$\hat{4}^3=\widehat{16-12}\cdot\hat{4}=\hat{4}$ (A); $\hat{5}^3=\widehat{25-24}\cdot\hat{5}=\hat{5}$ (A).

b) $f(\hat{2})=\hat{0} <=> \hat{2}+(\hat{2}a+\hat{1})\cdot\hat{2}+a+\hat{4}=\hat{0} <=> \hat{2}+\hat{4}a+\hat{2}+a+\hat{4}=\hat{0} <=>$

$\hat{5}a=\hat{4}\,|\cdot\hat{5} <=> a=\hat{2}$.

c) Pentru $a=\hat{2}$ avem $f(X)=X^3+\hat{5}X$ care admite mai multe descompuneri în produs de polinoame de gradul I. Iată câteva:

$f=X(X+\hat{1})(X+\hat{5})$

$f=(X+\hat{1})(X+\hat{2})(X+\hat{3})$

$f=(X+\hat{1})(X+\hat{3})(\hat{3}X+\hat{2})(\hat{2}X+\hat{1})$ şi altele.

$f=(X+\hat{4})(X+\hat{3})(X+\hat{5})$

$f=X(X+\hat{5})(\hat{3}X+\hat{1})(\hat{4}X+\hat{1})$

Scanned with OKEN Scanner

3.1. LIMITE DE FUNCŢII

1. a) $f(x)=2x+\frac{2}{x^3}$.

b) Ecuaţia tangentei la grafic într-un punct $M(x_0,f(x_0))$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ .Cum $x_0=1\Rightarrow f(1)=0, f'(1)=4$ $Y=4(x-1)$ $y=4x-4$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{2}{x^4}\right)=2$.

2. a) Avem $f'(x)=e^x+e^{-x}>0$ şi deci funcţia este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$

b) $f'(x)=2\Leftrightarrow e^x+\frac{1}{e^x}=2\Leftrightarrow \left(e^x-1\right)^2=0\Leftrightarrow e^x=1$ de unde $x=0$.

c) $f''(x)=e^x-e^{-x}$ de unde $g(x)=e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})=2e^{-x}=\frac{2}{e^x}$.

Atunci $S=\sum\limits_{k=0}^{2008}g(k)=\sum\limits_{k=0}^{2008}\frac{1}{e^k}$ ceea ce reprezintă suma unei progresii geometrice cu raţia $q=\frac{1}{e}$ cu $a_1=1$ şi trebuie să calculăm suma primilor 2009 termeni.

Înlocuind în $S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ obţinem $S=\frac{e^{2009}-1}{e^{2008}(e-1)}$

3. a) $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(2x+3)=5$; $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\ln x=0$ Aşadar $l_s(1)\neq l_d(1)\Rightarrow f$ este discontinuă în $x_0=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{l'H}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

c) Este suficient să evaluăm limita pentru x>1 deoarece x devine oricât de mare .

Limita de evaluat devine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2+..+x^{2008}}{x^{2008}}=1$

4. a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{6x-2}{6x-4}=\frac{4}{2}=2$.

b) $f'(x)=4x^3-12x+18\Rightarrow f''(x)=12x^2-12=12\left(x^2-1\right)=12(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$						-1				1					∞
$f''(x)$	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	
$f(x)$	⌒						⌣						⌒					

Funcţia f este convexă pe $(-\infty,-1]$ şi pe $[1,\infty)$ şi concavă pe intervalul $[-1;1]$.

c) $g(x)=0\Rightarrow\left(x^2-1\right)\cdot\ln x=0\Rightarrow x=1$

Pentru $x=1$ avem $g(x)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x>1$ avem $\ln x>\ln 1=0$ şi $x^2-1>0 \Rightarrow g(x)>0$.

Pentru $x<1$ avem $\ln x<\ln 1=0$ şi $x^2-1<0 \Rightarrow g(x)>0$.

5. a) $f'(x)=e^x-1$.

b) $f''(x)=e^x \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f''(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$.

c) $\dfrac{e^{n+1}-e}{e-1}=e\dfrac{e^n-1}{e-1}=e\left(e^{n-1}+e^{n-2}+...+e^2+e+1\right)=e^n+e^{n-1}+...+e^2+e>$

$>(n+1)+n+...+2=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\dfrac{n(n+3)}{2}$.

6. a) $f'(x)=3x^2-6x, g'(x)=3x^2-10x+8 \Rightarrow$

$f'(x)-g'(x)=3x^2-6x-3x^2+10x-8=4x-8, x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(x-1)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)}{(x-1)}=3$.

c) Rezolvăm inecuaţia $f(x)\geq 0$. $x^3-3x^2+4\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+1)\geq 0, \forall x\in(0,+\infty)$

7. a) $f'(x)=3x^2+3$

b) Se observă uşor că $f'(x)>0$ deoarece $x^2\geq 0$ de unde folosind consecinţa teoremei lui Lagrange avem că f este strict crescătoare.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x}{x^3}=1$.

8. a) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+x$. **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$

c) $f''(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$. Pentru $x\in(0,1]$ $f''(x)\leq 0 \Rightarrow$ f concava iar pentru $x\in[1,\infty)$

$f''(x)\geq 0 \Rightarrow$ f convexa.

9. a) $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$.

b) $f_2(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ Cum $\lim\limits_{x\to\infty}-\dfrac{1}{x^2}=0$ atunci axa Ox este asimptota orizontală spre infinit.

Având asimptota orizontală nu mai are şi oblică la infinit.

c) Fie $h:(0,\infty)\to R$, $h(x)=f_0(x)-\dfrac{1}{f_1(x)}+1=\ln x-x+1$. h este derivabilă şi

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$. Atunci $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Dacă $0<x<1$, $h'(x)>0 \Rightarrow$ h strict

Scanned with OKEN Scanner

crescătoare iar dacă 1<x, $h'(x)<0$ deci h este descrescătoare. Rezultă x=1 este punct de maxim global. Atunci $h(x)\le h(1)=0$, $\forall x>0$.

10. a) $f'(x)=-\frac{xe^x}{e^{2x}}=-\frac{x}{e^x}$; $\forall x\in\mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0\Rightarrow$ y=0 este asimptotă orizontală la $+\infty$;

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)	+ + + + + +		0	− − − − − −	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

max f(x)= 1 $\Rightarrow$ f(x)≤1, $\forall x\in\mathbb{R}$

11. a) $f'(x)=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+1\right)-x^2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}, x\in\mathbb{R}.$

Obţinem $f'(x)-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, deci dreapta de ecuaţie $y=1$ este asimptotă orizontală la ∞.

c) $f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}>0, \forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe intervalul $(0;+\infty)$ şi deci

$f\left(\sqrt[3]{2007}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2008}\right)$.

12. a) $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $(\forall)x\in(0,\infty)$.

b) Aplicând regula lui l'Hospital, avem:

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$

c) Deoarece $1-\ln x<0\ (\forall)x\in(e,\infty)\Rightarrow f'(x)<0\ (\forall)x\in(e,\infty)$

Atunci funcţia f este descrescătoare $(\forall)x\in(e,\infty)$

Obţinem: $2007<2008\Rightarrow f(2007)>f(2008)$.

3.2. FUNCŢII CONTINUE. FUNCŢII DERIVABILE

13. a) $f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot\sqrt{x}-(\sqrt{x})'\ln x}{x}$

Scanned with OKEN Scanner

$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

b) Rezolvăm ecuaţia $f'(x)=0 \Rightarrow x=e^2$ şi întocmim tabelul de variaţie

X	0	e^2	∞
F'(x)	++++ ++	0	----- ---
f(x)	↗	$\frac{2}{e}$	↘

Deci f este crescătoare pe $(0,e^2)$ şi descrescătoare pe (e^2,∞).

c) Logaritmând inegalitatea obţinem

$\ln 3^{\sqrt{5}} < \ln 5^{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{5}\ \ln 3 < \sqrt{3}\ \ln 5$

$\Rightarrow \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{3}} \Rightarrow f(3)<f(5)$

Cum $3 \in (0,e^2)$, $5 \in (0,e^2)$ şi f crescătoare pe $(0,e^2)$, avem că $f(3)<f(5)$.

14. a) $f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

b) Rădăcinile derivatei sunt $x=-2$ şi $x=0$. Derivata este negativă între $[-2;0]$ şi pozitivă în rest. Aşadar funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty;-2]$ şi pe $[0;\infty)$ şi strict descrescătoare pe $[-2;0]$.

c) Din $f(-2)=-4$ şi din intervalele de monotonie obţinute la la punctul b) avem că -2 este punct de maxim pentru funcţia f pe intervalul $(-\infty;-1)$ de unde $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$.

15. a) $f'(x)=1-e^{-x}=\frac{e^x-1}{e^x}$

b)

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	↘		1		↗

Dacă $x\in(-\infty,0]$ rezultă f este monoton descrescătoare. Dacă $x\in(0,\infty)$ rezultă f este monoton crescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

c) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)-x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$.

Deci $y=x$ este asimptotă oblică la ∞.

16. a) $f(0)+f'(0)$

$f'(x)=2008\cdot x^{2007}-2008\Rightarrow f'(0)=-2008\,;\,f(0)=2008-1$

$f(0)+f'(0)=-1$

b) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=1$

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$f(1)=1-1=0$

$f'(1)=2008-2008=0\Rightarrow y=0$

c)

$f''(x)=2008\cdot 2007\cdot x^{2006}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$

17. a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}+1-\dfrac{1}{x+2}\right)=2$

b) $f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ Atunci $f'(x)=-\left(\dfrac{-1}{(x+1)^2}+\dfrac{-1}{(x+2)^2}\right)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$

c) E clar că $f'(x)>0$ deci f este crescătoare. Atunci $\dfrac{1}{2}=f(0)\le f(x)\le\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$

18. a) $f(1)=1, f\left(\dfrac{1}{e}\right)=0, f(1)+f\left(\dfrac{1}{e}\right)=1$.

b) Din $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ avem $f'=\dfrac{(1+\ln x)'(1-\ln x)-(1+\ln x)(1-\ln x)'}{(1-\ln x)^2}=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=-1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\ln x-1}=-1$

19. a) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}(ax^2+bx+c)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}x^2=\infty$

b) $f'(x)=e^{x}(ax^2+bx+c)+e^{x}(2ax+b)=e^{x}(ax^2+bx+c+2ax+b)$.

Atunci $f'(0)-f(0)=(c+b)-c=b$

c) Avem $f(0)=e^{0}(0+0+c)=c$ deci $c=0$. Cum am văzut mai sus $f'(0)=b+c=1$.

De aici $b=1$ $f''(x)=e^{x}(ax^2+bx+c+2ax+b+2ax+b+2a)$

Atunci $f''(0)=2a+2b+c=4.$, deci $a=1$

20. a) Calculăm limitele laterale ale funcţiei în punctul 1 şi obţinem

$\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\left(-x^2+x\right)=0$ respectiv $\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}\left(x^2-x\right)=0$.

Cum $f(1)=0$ avem că funcţia este continuă în 1.

b) Calculând derivata funcţiei obţinem $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x>1\\ -2x+1 & ,x<1\end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

Finalizând , obţinem $f'(0)+f'(2)=1+3=4$.

c) Calculăm limitele laterale ale derivatei în $x=1$. Obţinem $f'_s(1)=-1, f'_d(1)=1$.

Deci funcţia nu este derivabilă în $x=1$.

21. a) $f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{(x+1)^3}$.

b) $f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{(x+1)^3}=\frac{-2(3x^2+3x+1)}{x^3(x+1)^3}<0\,(\forall)x\in(0,+\infty)$ ceea ce asigură monotonia descrescătoare a funcţiei.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^3(3x^2+3x+1)}{x^3(x+1)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2(3x^2+3x+1)}{(x+1)^3}=0$

22. a) $f'(x)=1-\frac{2}{x},\forall x>0$.

b) $f'(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)'=\frac{2}{x^2}>0,\forall x>0$, deci f este convexă pe intervalul $(0,\infty)$.

c) Din $f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x},\forall x>0$ deducem $f'(x)<0,\forall x\in(0,2), f'(2)=0$ şi $f'(x)>0,\forall x\in(2,\infty)$ deci funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0;2)$ şi crescătoare pe intervalul $(2,\infty)$. Deducem că în $x=2$ funcţia are un minim global. Prin urmare : $f(x)\geq f(2),\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow f(x)\geq 2-2\ln 2,\forall x\in(0,\infty)$ deci $f(x)\geq \ln e^2-\ln 4$ adică $f(x)\geq \ln\frac{e^2}{4},\forall x\in(0,\infty)$

23. a) Prin calcule, obţinem $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2},\forall\, x\neq -1$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x+1}=0$, şi deci dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ la graficul funcţiei.

c) Din punctul a) avem $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Obţinem că $x=0$ este punct de minim şi $f(x)\geq f(0),\ \forall x>-1$, de unde rezultă că $f(x)\geq 1,\ \forall x>-1$.

24. a) $f'(x)=e^x-1$.

b) Rezolvând ecuaţia $f(x)=0$ obţinem soluţia $x=0$.

Astfel avem

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - -	0	+ + + + + + + +
$f(x)$	↘	1	↗

Scanned with OKEN Scanner

Punctul $x=0$ este punct de minim, iar minimul funcţiei este $f(0)=1$, de unde $f(x)\geq 1, \forall x\in \mathbf{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x)=\infty$, deci nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$. Dacă există asmptotă oblică spre $-\infty$, aceasta ar avea ecuaţia $y=mx+n$, unde

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-x}{x}=-1$, iar $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x+x)=0$.

Ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei către $-\infty$ este $y=-x$.

25. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

a) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $f'(e)=\dfrac{1-\ln e}{e^2}=0$

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ a graficului funcţiei f

c) $x^e\leq e^x\Leftrightarrow e\ln x\leq x\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{1}{e}$ pentru $x>0$. Observand că membrul stâng al acestei inegalităţi este legea funcţiei date şi ţinând cont de a) şi b) avem

x	0		e		∞
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Deci $\max\limits_{x\in(0,\infty)}f(x)=\dfrac{1}{e}$ şi prin urmare $\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow x^e\leq e^x$ pentru orice $x\in(0,\infty)$

26. a) $f_1(x)=f_0'(x)=(e^{-x}-1)'=-e^{-x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f_0(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x}-1)=-1 \Rightarrow y=-1$ asimptotă orizontală la ∞

c) $f_2(x)=f_1'(x)=(-e^{-x})'=e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_2(x)+x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-e^{-x}+1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2}$

(am aplicat de două ori regula lui l'Hospital)

27. a) $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^2-2x\cdot e^x}{x^4}=\dfrac{e^x\cdot x(x-2)}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$, $\forall x\in R^*$

b) Studiem prima derivată pe intervalul propus. $f'(x)=\dfrac{e^xx^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}, x\neq 0.$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că pentru x $\in(0, 2]$ factorul $x-2\le 0$, ceilalţi fiind pozitivi. Rezultă că derivata este negativă pe acest interval, deci funcţia va fi descrescătoare pe $(0, 2]$.

c) Inegalitatea se poate scrie $\frac{e^{\sqrt{2}}}{2}\ge\frac{e^{\sqrt{3}}}{3}$. Se observă că cei doi termeni reprezintă valorile funcţiei f în punctele $\sqrt{2}$ respectiv $\sqrt{3}$ care aparţin intervalului $(0, 2]$.
Cum $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ iar funcţia este descrescătoare pe acest interval rezultă că $f\left(\sqrt{2}\right)\ge f\left(\sqrt{3}\right)$, deci inegalitatea este adevărată.

28. a) Funcţia este continuă în punctul $x_0=0$ dacă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=f(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Se obţine $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(e^x-1)=0, f(0)=a, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x^2+x+a)=a$, deci $a=0$.

b) Ecuaţia tangentei în punctul $x_0=-1$ la graficul funcţiei este $y-y_0=m(x-x_0)$, unde $y_0=f(-1)=\frac{1}{e}-1$, $f'(x)=e^x$ şi $m=f'(-1)=\frac{1}{e}$. Obţinem $y=\frac{1}{e}x+\left(\frac{2}{e}-1\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x+1}\right)=0$.

29. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$

a) $f'(x)=2(x+1)+2(x-1)=4x$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{x^2}=2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=2$

c) Conform a), trebuie să arătăm că $4x\le e^{4x}-1$, sau $y\le e^y-1$ pentru orice y real.
Fie $g(y)=e^y-y-1$. $g'(y)=e^y-1\ge 0$ deci g e crescătoare pentru $y\ge 0$.
Atunci $g(y)\ge g(0)=0\Rightarrow e^y-1\ge y$.

30. a) Avem $f'(x)=e^x+2x$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e+2$

b) Pentru orice a avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=\infty$, deci nu are asimptotă.

c) Avem $f''(x)=(f'(x))'=(e^x+2x)'=e^x+2>0$ deci f e convexă.

31. a) $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

b) Folosind regula lui L' Hospital rezultă că:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

c) $f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$. $f'(x)=0\Rightarrow\ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{e}$.

Scanned with OKEN Scanner

x	0						$\sqrt{e}$								$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$				$\nearrow$			$\frac{1}{2e}$			$\searrow$					0

x	$-\infty$				-1				1				3				$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Am folosit $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$.

De aici rezultă că f descrescătoare pe $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$, deci $f(x)\le\frac{1}{2e}$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{2e}$.

32. a) $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

b) Derivata funcției este $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ și se anulează pentru $x_1=-1$ și $x_2=3$.

Din tabelul de variație vom observa că acestea sunt cele două puncte de extrem.

c) Fie $y=mx+n$ ecuația asimptotei. Avem $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{x(x-1)}=1$ și

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+x+2}{x-1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2-x^2+x}{x-1}=2$, de unde obținem ecuația $y=x+2$.

33. a) $f'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}, x\in(0,\infty)$.

b) $f''(x)=\frac{e}{x^2}; f(e)=f'(e)=0; \lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)}{f'(x)}\overset{l'Hospital}{=}\lim\limits_{x\to e}\frac{f'(x)}{f''(x)}=\lim\limits_{x\to e}\frac{x-e}{x}\cdot\frac{x^2}{e}=0$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow x=e$. Tabelul de variație al funcției f este:

x	0			e			∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$		0		$\nearrow$	

Scanned with OKEN Scanner

Deci f este descrescătoare pe $(0,e]$ si f este crescătoare pe $[e,\infty)$.

34. a) Utilizând formula de derivare a câtului se obţine: $f'(x)=\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$.

b) $f(0)=\frac{1}{2}, f'(0)=\frac{1}{4}\Rightarrow f(0)+f'(0)=\frac{3}{4}$,

c) Cum $f''(x)>0\Rightarrow f'(x)$ strict crescătoare pe $[0,1]\Rightarrow f'(0)\le f'(x)\le f'(1)$.

Notăm: $g(x)=\frac{1}{f(x)}, g:[0,1]\to R, g(x)=\frac{x+2}{e^x}$ $g'(x)=\frac{-x-1}{e^x}<0 pe[0,1], (e^x>0))$

$\Rightarrow g(x)$ strict descrescătoare pe $[0,1]\Rightarrow g(1)\le g(x)\le g(0)$, $\frac{1}{f(1)}\le\frac{1}{f(x)}\le\frac{1}{f(0)}$ deci:

$\frac{3}{e}\le\frac{1}{f(x)}\le 2$.

35. a) $f'(x)=((x^2-2x+1)e^x)'=(2x-2)e^x+(x^2-2x+1)e^x=(x^2-1)e^x$

b) $f'(x)=0<=>x^2=1<=>x=\pm 1$

Din tabelul lui f

x	$-\infty$	-1	1	∞
f'(x)	+ + + + + + + 0	− − − − − − − 0	+ + + + + + +	+ + + +
f(x)	↗ ↗ ↗ ↗	f(−1)	↘ ↘ ↘	f(1) ↗ ↗ ↗ ↗

avem 2 puncte de extrem (-1 şi 1)

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{(x^2-1)e^x}{(x-1)^2e^x}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=2$

36. $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^4}{4}-\ln x$.

a) $f'(x)=x^3-\frac{1}{x}$.

b) $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^4-1}{x}=0\Leftrightarrow x^4-1=0\Rightarrow x=\pm 1$, dar $x\in(0,\infty)$, aşadar $x=1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	|	- - - - 0 + + + + + + +	
$f(x)$	| ↘	$\frac{1}{4}$	↗

Aşadar punctul de minim al funcţiei este $x=1$, iar valoarea minimă a funcţiei $f(1)=\frac{1}{4}$.

c) Deoarece $x=1$ este minimul funcţiei avem $f(x)\ge f(1), \forall x\in(0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

Dacă înlocuim x cu $\sqrt{x}$, relaţia devine

$$f\left(\sqrt{x}\right)\geq f(1),\ \forall x\in(0,\infty)\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\ln\sqrt{x}\geq\frac{1}{4},\ \forall x\in(0,\infty)$$

$$\Leftrightarrow \ln\sqrt{x}\leq\frac{x^2-1}{4},\forall x\in(0,\infty).$$

37. a) $f'(x)=e^x-1$;

b) $f'(x)<0,\forall x\in(-\infty,0)$ şi f continuă pe $(-\infty,0]\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$; $f'(x)>0,\forall x\in(0,\infty)$ şi

f continuă pe $[0,\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,\infty)$;

c) $\forall x\in[0,\infty)$ rezultă $f(x)\geq f(0)=0\Rightarrow e^x\geq x+1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{2007}e^k\geq\sum_{k=0}^{2007}(k+1)\Rightarrow\frac{e^{2008}-1}{e-1}\geq\frac{2008\cdot2009}{2}\Rightarrow e^{2008}-1\geq1004\cdot2009(e-1).$$

38. a) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

b) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0,e]$ şi f strict descrescătoare pe $[e,\infty)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre ∞ pentru graficul funcţiei f.

39. a) $l_s(1)=0$, $l_d(1)=0$, $f(1)=0\Rightarrow$ f continuă în $x_0=1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$. Deci $y=-1$ asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) Pe intervalul $(1,\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0\Rightarrow f$ - concavă.

40. a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$, deci $f(1)-f'(1)=(1-\ln1)-(1-1)=1$

b) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=0$ dacă $x=1$, adică $(1,f(1))=(1,1)$ este unicul punct de extrem.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1-0=1$

41. a). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$, din definiţia derivatei.

b). $f'(x)=2x+e^x$, $f''(x)=2+e^x>0$, deci f este convexă.

c). Făcând înlocuirile ,obţinem: $2x+e^x-2-e^x+x^2+e^x=e^x-3\Rightarrow x^2+2x+1=0$ cu soluţiile $x_{1,2}=-1$.

Scanned with OKEN Scanner

42. a) $f'(x)=2x\ln x+\frac{x^2}{x}=x(2\ln x+1),\forall x\in(0,+\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x\ln x}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2\ln x+1)}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x}$. Folosind regula lui *L'Hospital* în cazul $\frac{\infty}{\infty}$ avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2\ln x+1)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2$.

c) Studiem monotonia funcţiei f. Ecuaţia $f'(x)=0$ ne conduce la $x=e^{-\frac{1}{2}}\in(0,\infty)$.

Avem $f'(x)\le 0,\forall x\in\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ şi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$, deci f are un punct de minim în $A(e^{-\frac{1}{2}},-\frac{1}{2e})$, deci $f(x)\ge f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2e},\forall x>0$.

43. a) $f'(x)=\ln x+\frac{x-2}{x}$.

b) $f'(x)=\ln x+\frac{x-2}{x}$. Limita din enunţ există şi este egală cu $f'(1)=-1$

c) $f'(x)=\ln x+1-\frac{2}{x}$ e sumă de funcţii, toate crescătoare.

44. a) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$.

b) $f'(x)=\left[\frac{1}{x(x+1)}\right]'=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)'=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(xf(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x(x+1)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=1$

45. a) f ' (x)= (x-2ln x) '=x'-(2ln x)' $\Rightarrow$f' (x)= $\frac{x-2}{x}$, $\forall$ x $\ge$1

b) $f'(x)=\frac{x-2}{x}$. Pe intervalul $[1,2]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe acest interval.

c) Cum funcţia f este descrescătoare pe $[1,2]$, ea este descrescătoare şi pe $\left[1,\sqrt{e}\right]$ şi ca urmare avem: $f(1)\ge f(x)\ge f(x^2)\ge f(2)$ [1]; din $f(x)\ge f(x^2)$ obţinem

$x-2\ln x \geq x^2-2\ln x^2$ sau $x-2\ln x \geq x^2-4\ln x$ şi obţinem inegalitatea cerută.

46. a) Deoarece $\left(\frac{h}{g}\right)'=\frac{h'g-hg'}{g^2}$, pentru $h=x^2+3;\ h'=2x$ şi

$g=x-1;\ g'=1$, deducem $f'=\frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

b) $f'(x)=0$ dacă $x=3;\ x=-1$, care sunt deci puncte de extrem ale lui f $A(3,6), B(-1,-2)$

c) Folosind b) avem că pe $(-1,1)$ funcţia e descrescătoare, deci $f(a)\leq f(-1)=-8$.

Cum $f(b)=\frac{b^2+3}{b-1}>0$ avem $f(a)-f(b)\leq -8$

47. a) $f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'\cdot e^x+(x-1)\cdot\left(e^x\right)'=e^x+(x-1)\cdot e^x=xe^x=g(x)$.

b) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{-x}{e^{-x}}=0$, rezultă că $y=0$ este ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei g.

c) Funcţiile f şi g sunt de două ori derivabile, deci funcţia g este crescătoare pe $I \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0, \forall x\in I \Leftrightarrow f''(x)=g'(x)\geq 0, \forall x\in I \Leftrightarrow f''(x)\geq 0, \forall x\in I \Leftrightarrow$ f este convexă pe I.

48. a) Avem $f'(x)=2x+e^x, \forall x\in\mathbb{R}$ si $f'(0)=2\cdot 0+e^0=1$.

b) Cum $f''(x)=2+e^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Folosind regula lui L'Hospital, cazul $\frac{\infty}{\infty}$, avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+e^x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x+e^x\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+e^x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+e^x\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

49.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ ec. asimptota la $-\infty$.

b) $f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)'$ (calcul direct).

c) $f'(x)=0\Rightarrow x\in\{\pm 1\}\Rightarrow -1$ maxim global $+1$ minim global

$\Rightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(-1)\ \ \forall x\in[-1,1]$, iar

$f(1)\leq f(t)\leq f(0)\ \ \forall t\geq 0\Rightarrow f(1)\leq f\left(x^2\right)\leq f(0)$.

Deci $2f(1)\leq f(x)+f\left(x^2\right)\leq f(-1)+f(0)\Leftrightarrow \frac{2}{3}\leq f(x)+f\left(x^2\right)\leq 3+1=4$

Scanned with OKEN Scanner

50. $f(x)=x^{2008}+2008^x$

a) $f'(x)=2008x^{2007}+2008^x\ln 2008$

b) $f''(x)>0\Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$.

$f''(x)=2008\cdot x^{2006}+2008^x(\ln 2008)^2>0\Rightarrow f$ convexă.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=2008^0(\ln 2008)^2=(\ln 2008)^2$.

51. a) $f'(x)=\dfrac{2(x-1)-(2x-1)\cdot 1}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

b) $f'(2)=-1$.

c) Pe $(1,\infty)$ avem $f'(x)<0\Rightarrow$ f descrescătoare.

52. a) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

b) $f'(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

x	0						1							∞
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$\|$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
f	$\nearrow\nearrow\nearrow$						Max		$\searrow\searrow\searrow$					

Dacă $x\in(0,1)\Rightarrow f'(x)>0$.

Dacă $x\in(1,\infty)\Rightarrow f'(x)<0$.

Prin urmare $x=1$ este punct de maxim $A(1;0)$

c) $f\left(x^{2008}\right)=\ln x^{2008}-x^{2008}+1=2008\ln x-x^{2008}+1$.

$f\left(\dfrac{1}{x^{2008}}\right)=\ln\dfrac{1}{x^{2008}}-\dfrac{1}{x^{2008}}+1=-2008\ln x-\dfrac{1}{x^{2008}}+1$.

Ecuaţia devine: $x^{2008}+\dfrac{1}{x^{2008}}=2$. Notăm $x^{2008}=t$ şi obţinem:

$t^2-2t+1=0$ cu soluţia $t=1$, adică $x^{2008}=1$ cu singura soluţie în $(0,\infty)$ $x=1$

53. a) $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$;

b) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Avem $f'(x)<0,\forall x\in(-\infty,0)$ şi $f'(x)>0,\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow$ f strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$ şi strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1-x^2}{1+x^2}\Rightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Deci $g(x)=g\left(x^2\right)=\ldots=g\left(x^{2008}\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{2010}}{x^{2009}}=0$.

54. a) $f(1)+f(e)=\frac{1-\ln 1}{1+\ln 1}+\frac{e-\ln e}{e+\ln e}=1+\frac{e-1}{e+1}=\frac{e+1+e-1}{e+1}=\frac{2e}{e+1}$.

b) $(\forall)x\in[1,+\infty)$ avem:

$$f'(x)=\left(\frac{x-\ln x}{x+\ln x}\right)'=\frac{(x-\ln x)'(x+\ln x)-(x-\ln x)(x+\ln x)'}{(x+\ln x)^2}=$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+\ln x)-(x-\ln x)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(x+\ln x)^2}=\frac{(x-1)(x+\ln x)-(x-\ln x)(x+1)}{x(x+\ln x)^2}=$$

$$=\frac{x^2-x+x\ln x-\ln x-x^2+x\ln x-x+\ln x}{x(x+\ln x)^2}=\frac{2x\ln x-2x}{x(x+\ln x)^2}=\frac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}.$$

c) Avem

$$g:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}=\frac{\frac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}}{\left(\frac{x-\ln x}{x+\ln x}+1\right)^2}=\frac{2(\ln x-1)}{(2x)^2}=\frac{\ln x-1}{2x^2}.$$

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x-1}{2x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x-1)'}{\left(2x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{4x^2}=0$, rezultă că ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției g este $y=0$.

55. a) Se calculează $f'(x)=e^x(x^2-x-6)=e^x(x^2-x-6)+e^x(2x-1)=e^x\left(x^2+x-7\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\Rightarrow$ dreapta $y=0$ asimptotă orizontală la $-\infty$.

c) Panta tangentei la graficul funcției f dusă prin $x_0=-2$ este $f'(-2)$

$m=f'(-2)=0$. Deci tangenta la graficul funcției este paralelă cu axa Ox.

56. a) Se verifică prin calcul direct.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-1\Rightarrow$ dreapta de ecuație $y=-1$ asimptotă orizontală la $+\infty$

c) $x\in(0,2]\Rightarrow 0<x\le 2$. Putem scrie ultima relație în altă formă

$x\le 1+1\Rightarrow -1\le 1-x\Rightarrow -1\le\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)$. Împărțim toată relația la $1+\sqrt{x}$ care este

Scanned with OKEN Scanner

o cantitate pozitivă şi $\frac{-1}{1+\sqrt{x}} \le 1-\sqrt{x}$. Împărţind această relaţie la $1+\sqrt{x}$ obţinem relaţia cerută.

57. a) $f'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+3)e^x=(x^2+4x+5)e^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=5$

c) $f''(x)=(2x+4)e^x+(x^2+4x+5)e^x=(x^2+6x+9)e^x=(x+3)^2e^x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$

58. a) $f(0)+f'(0)=1$, $f'(x)=1+\frac{1}{e^x}$.

b) $f''(x)=-\frac{1}{e^x}<0$ de unde f concavă pe $\mathbb{R}$.

c) $f'(x)=1+\frac{1}{e^x}$, $e^x>0\Rightarrow\frac{1}{e^x}>0$ deci $f'(x)>1,\forall x\in\mathbb{R}$.

59. a) $f'(x)=\left(1-\frac{2e^x}{x+e^x}\right)'=-2\frac{\left(e^x\right)'\left(x+e^x\right)-e^x\left(x+e^x\right)'}{\left(x+e^x\right)^2}=$

$=-2\frac{e^x\left(x+e^x\right)-e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=-2\frac{e^x(x-1)}{\left(x+e^x\right)^2}=\frac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2e^x}{x+e^x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{\frac{x}{e^x}+1}\right)=-1$.

Obţinem că $y=-1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow x=1$ şi din tabloul de variaţie al funcţiei

x	0	1	∞
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - - - - - - - - -
f(x)	-1 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	$\frac{1-e}{1+e}$	↘ ↘ ↘ ↘ ↘ -1

obţinem $-1\le f(x)\le\frac{1-e}{1+e}$, $\forall x\ge 0$

60. a) $l_s(0)=l_d=f(0)$
$l_s(0)=e^0=1$
$l_d(0)=1$ $\Rightarrow f$ este continuă în $x_0=0$
$f(0)=1$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală la $-\infty$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $f''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow f$ concavă pe $(0;+\infty)$

61. a) $l_s(4) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} (ax-6) = 4a-6$; $l_d(4) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \sqrt{x} = 2$;

$f(4) = \sqrt{4} = 2$. f continuă în $x_0 = 4 \Leftrightarrow l_s(4) = l_d(4) = f(4) \Leftrightarrow 4a-6 = 2 \Leftrightarrow a = 2$

b) Pentru $x > 4$ avem $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, de unde $f'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$.

c) Ecuaţia tangentei la G_f în punctul x_0 este $d: y - y_0 = m(x - x_0)$,

unde $x_0 = 9$, $y_0 = f(x_0) = 3$ şi $m = f'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow d: y - 3 = \dfrac{1}{6}(x-9)$

62. a) $f'(x) = \ln x + 1$;

b) $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0, \forall x \in (0,\infty)$. Deci funcţia f este convexă pe $x \in (0,\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x \overset{(0(-\infty))}{=} \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\searrow 0}(-x) = 0$.

63. a) Se calculează limitele laterale ale funcţiei în $x = 1$, obţinându-se:

$l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (3^x + 1) = 4 = f(1)$, şi $l_d = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (ax+2) = a+2$.

Condiţia de continuitate în $x = 1$ este echivalentă cu $l_s = l_d = f(1)$, de unde rezultă $a = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3^x + 1) = 3^{-\infty} + 1 = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei către $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \big((f(x)-1)\cdot x\big) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3^x \cdot x$. Pentru a elimina nedeterminarea de tipul $0\cdot\infty$ se realizează schimbarea de variabilă $y = -x$.

Limita cerută devine: $\lim\limits_{y\to\infty} 3^{-y}\cdot(-y) = -\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y}{3^y} = -\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3^y \ln 3} = 0$.

64. a) $f'(x) = e^x - e$.

b) $f''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Ecuaţia tangentei în $O(0,0)$ la graficul lui f este $y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

Coordonatele punctului căutat se obţin rezolvând sistemul:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} y=(1-e)x \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1-e \end{cases}.$$

65. a) $f'(x)=1-\frac{1}{x}$.

b) $f'(x)=\frac{x-1}{x} \Rightarrow$ pentru $x\in(0,1), f'(x)<0$ deci f este strict descrescătoare, iar pentru $x\in(1,\infty), f'(x)>0$ adică f este strict crescătoare.

c) $\sqrt{x}\geq \ln\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\ln\sqrt{x}-1\geq 0$. Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}-\ln\sqrt{x}-1$ şi $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}=\frac{\sqrt{x}-1}{2x}$, iar ecuaţia $g'(x)=0$ are soluţia $x=1$. Din studiul semnului funcţiei g' rezultă că $x=1$ este punct de minim şi deci $g(x)\geq g(1)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ adică $\sqrt{x}-\ln\sqrt{x}-1\geq 0$ c.c.t.d.

66. a) $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=-\frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1\Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală la $(+\infty)$.

67. a) $f-$continuă în $x_0=1\Leftrightarrow l_s(1)=l_d(1)=f(1)$

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(-x+1)=0$; $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x-1)=1$.

Cum $l_s(1)\neq l_d(1)\Rightarrow f$ nu e continuă în $x_0=1$.

b) $f'(x)=6x^2-30x+24$.

c) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to a}\frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=4a\sqrt{a}$

$4a\sqrt{a}=32\Leftrightarrow a=4$.

68. a) $f'(x)=2^x\ln 2-\ln 2=(2^x-1)\ln 2, \forall x\in IR$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=7\ln 2$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow(2^x-1)\ln 2=0\Rightarrow 2^x=1\Rightarrow x=0$

Cum derivate este negativă pe intervalul $(-\infty,0)$ şi pozitivă pe intervalul $(0,\infty)$, rezultă că $x=0$ este punct de minim global.

69. a) $f'(x)=\frac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2}=\frac{-4}{(x-3)^2}, \forall x\neq 3$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=-4$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{3}{x})}=1$. Deci dreapta de ecuaţie $y=1$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre ∞

70. a) $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(x)>0\Rightarrow$ f strict crescătoare.

c) $y-y_A=f'(x_A)\cdot(x-x_A)\Rightarrow y=x(e+1)-1$

71. a) $h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

b). $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c)

$h'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}>0$ pentru $x\in[0,\infty)\Rightarrow h$ crescatoare pe $\left[o,+\infty\right)$

72. a) Funcţia $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$ (se obţine aplicând regula de derivare a raportului).

b) Determinăm rădăcinile derivatei : $f'(x)=0\Rightarrow -2x^2+2=0\Rightarrow x=\pm 1$, posibile puncte de extrem. Pentru a fi siguri, verificăm dacă funcţia îşi schimbă monotonia în punctele ± 1. Cum semnul derivatei este dat de numărător, iar acesta este o funcţie de gradul al doilea, obţinem că: în stânga lui -1 este negativă iar în dreapta este pozitivă, adică funcţia este descrescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi crescătore pe $(-1,1)$, adică -1 este abscisa de minim. Analog se obţine că 1 este punct de maxim. Deci punctul $A(-1,f(-1))=A(-1,-1)$ este punctul de minim al graficului funcţiei iar $B(1,f(1))=B(1,1)$ este punctul de maxim al graficului.

c) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ deducem că punctul de minim $A(-1,f(-1))=A(-1,-1)$ obţinut la punctul anterior este de fapt punct de minim global. Deci $f(x)\geq -1,\forall x\in\mathbf{R}$ dar şi $f(x^3)\geq -1,\forall x\in\mathbf{R}$. Prin sumarea celor două relaţii obţinem cerinţa problemei.

73. a) Calculând limitele laterale în 0 obţinem $\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{3}{2}$ şi $\lim\limits_{x\uparrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\uparrow 0}\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$ care sunt egale şi cu valoarea funcţiei în 0 deci funcţia este continuă în 0.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculăm limita la infinit a funcţiei: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = 2$ şi obţinem astfel că dreapta $y=2$ este asimptotă orizontală către +infinit a graficului funcţiei.

c) Metoda 1: Pentru $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+4-1}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} - \frac{1}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2} < 2, \left(\frac{1}{x+2} > 0\right)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x+2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 - \frac{1}{x+2} \geq \frac{3}{2}.$$

Deci $f(x) \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right)$, pentru $x \geq 0$.

Metoda 2: Vom demonstra inegalităţile: $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+2} \geq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2x+3}{x+2} < 2 \end{cases}$

Pentru prima inegalitate, ţinând cont de faptul că numărătorul şi numitorul sunt pozitivi obţinem $\dfrac{2x+3}{x+2} \geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2(2x+3) \geq 3(x+2) \Leftrightarrow 4x+6 \geq 3x+6 \Leftrightarrow x \geq 0, (A)$

Pentru a doua: $\dfrac{2x+3}{x+2} < 2 \Leftrightarrow 2x+3 < 2(x+2) \Leftrightarrow 2x+3 < 2x+4, (A)$.

Observaţie. Bineînţeles ca se poate da şi o a trei metodă, în care să folosim monotonia funcţiei (descoperită de exemplu cu ajutorul semnului primei derivate).

74. a) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

b) f este o sumă de funcţii strict crescătoare, deci crescătoare.

c) Fie $A(x_0, y_0)$ punctul căutat. Panta tangentei este $f'(x_0)$.

Rezultă ecuaţia: $f'(x_0) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = 1$, $y_0 = f(1) = 2 \Rightarrow$ A(1,2).

75. a) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2}$.

b) Limita din enunţ este $f'(1) = 0$.

c) Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x = 1, -1$. Se constată uşor că pe $(-\infty, -1)$ funcţia e crescătoare; pe $(-1, 0)$ şi $(0, 1)$ descrescătoare şi pe $(1, \infty)$ crescătoare.

76. a) Funcţia f este continuă în x_0=1 dacă $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{2x+a}{x^2+2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{2+a}{1+2} = 2 \Leftrightarrow 2+a=6 \Rightarrow a=4.$

b)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{x^2+1} = 1 \Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală a graficului funcţiei către $-\infty$.

c) $m = f'(2)$. Pentru $x>1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2+2)-2x(2x+a)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2-2ax+4}{(x^2+2)^2}$

$f'(2)=1 \Leftrightarrow \frac{-8-4a+4}{36} = 1 \Leftrightarrow -4-4a=36 \Rightarrow a=-10.$

77. a) $h(x) = \frac{((x-1)(x-2))'}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-2+x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

b) $\frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-1}$ sau $\frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x=0$.

c) $f'(x) = h(x)f(x), f''(x) = h'(x)f(x) + h(x)f'(x)$ sau

$\frac{f''(x)}{f(x)h(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{f'(x)}{f(x)}$ dar din calcul rezultă

$f(x)h(x) = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)\left((x-1)(x-2)\right) = (x-2)+(x-1) = f'(x)$

78. a) $l_s(0)=1=_d(0)=f(0) \Rightarrow$ f este continuă în $x_0=0$;

b) $x\in(-\infty,0)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} > 0, \forall x\in(-\infty,0) \Rightarrow$ f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$;

c) $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$; $y-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1) \mid \cdot 2 \Rightarrow x-2y+2=0$;

79. a) $f'(x) = (x-3)'\cdot \ln x + (x-3)\cdot(\ln x)' = \ln x + \frac{x-3}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = \ln 1 + \frac{-2}{1} = -2$.

c) f convexă pe $(0,\infty) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, $(\forall)x\in(0,\infty)$

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} > 0$, $(\forall)x\in(0,\infty)$, deci f convexă pe $(0,\infty)$.

80. a) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 + 3^x(\ln 3)^2 > 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$

Scanned with OKEN Scanner

81. a) $f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=1$, deci dreapta de ecuaţie $y=x+1$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) $f\left(e^x+1\right)=e^x+\frac{1}{e^x}+2\geq 4$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

82. a) Se utilizează $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $\forall x>0$.

b) Pentru $x_0=1$, se obţine, $y_0=f(x_0)=-1$.

Ecuaţia tangentei este $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y+1=0\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=-1$.

c) $f'(x)=x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{2}{3}}=x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right)$, de unde 1 este punct de minim absolut, adică

$f(x)\geq f(1)=-1,\forall x>0$.

83. a) $f'(x)=(x-3)'\sqrt{x}+(x-3)(\sqrt{x})'=\sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}},\forall x\in(0,\infty)$.

b) Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii în punctul de abscisă x_0 (punct de derivabilitate pentru funcţie) este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, iar în cazul de faţă, $y+2=0$

c) Se cunoaşte inegalitatea mediilor $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc},\forall a,b,c>0$.

$$x+\frac{2}{\sqrt{x}}=x+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 3\sqrt[3]{x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}}=3,\forall x\in(0,\infty).$$

Inegalitatea se poate trata şi elementar.

84. a) $f'(x)=3^x\ln 3-\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=3^0\ln 3-\left(\frac{1}{2}\right)^0\ln\frac{1}{2}=\ln 3-\ln\frac{1}{2}=\ln 3+\ln 2=\ln 6$

c) $f'(x)=3^x\ln 3+\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln 2>0$

85. a) $f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot e^x-e^x\cdot\left(x^2-x+1\right)}{e^{2x}}=\frac{-x^2+3x-2}{e^x}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{e^x}=0$ (se poate aplica succesiv regula l'Hospital) deci dreapta y=0 este asimptota orizontala la infinit pentru G_f.

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,2\}$.Tabelul de variaţie al lui f este:

Scanned with OKEN Scanner

x	$-\infty$		1		2		∞
$f'(x)$	- - - - - - -		0	+	0	- - - - - - - - -	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$\frac{3}{e^2}$	$\searrow$	0

Din tabel rezultă $f(x) \geq \frac{1}{e}$, pentru $x \leq 2$.

86. a) $f'(x) = \frac{(x^2+1)'x-(x^2+1)\cdot x'}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty$ rezultă că funcţia f nu are asimptotă orizontală. $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$. $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = x$ asimptotă oblică spre ∞ la graficul funcţiei.

c) $f''(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \frac{(x^2-1)'x^2-(x^2-1)(x^2)'}{x^4} = \frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4}$

dar $x \in (0,\infty) \Rightarrow f''(x) > 0$, $\forall\ x \in (0,\infty)$, deci f este convexă pe $(0,\infty)$

87. a) Calculul conduce la $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $(\forall) x > 0$.

b) Ecuaţia tangentei la grafic în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$ este

$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, adică $y = \frac{1}{e}$.

c) Avem $f'(e) = \frac{1-\ln e}{e^2} = 0$. Mai mult, e este abscisa unicului punct de maxim pentru f

(a se vedea tabelul de semn al lui f'), deci $f(x) \leq f(e)$, adică $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$, $(\forall) x > 0$.

88. a) $f'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

b) Panta dreptei este $f'(1) = 0$ şi trece prin punctul $(1,-1)$ de unde este dreapta de ecuaţie $y = -1$.

c) $f''(x) = \frac{1}{x}$ şi pentru $x > 0$ avem $f''(x) > 0$ de unde f este convexă pe $(0;\infty)$.

89. a) $f'(x) = 3x^2 - 3$ de unde $f'(1) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $f''(x)=6x$ de unde f este convexă pe $[0;\infty)$ şi concavă pe $(-\infty;0]$.

c) Dacă ne uităm la f' se observă uşor că $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1;1)$ şi în rest derivata este pozitivă.. Aşadar funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty;-1]$ şi pe $[1;\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-1;1)$. Pe intervalul $(-\infty;1]$ avem $f(x)\le f(-1)=3$ şi pentru $x\in(1;2]$ avem $f(x)\le f(2)=3$.

90. a) $f'(x)=6x^2-6x$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. Găsim $f'(1)=0$

b) Avem $f''(x)=12x-6\ge 0$, dacă $x\ge\frac{1}{2}$ şi $f''(x)\le 0$ dacă $x\le\frac{1}{2}$. Atunci f e concavă pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ şi convexă pe $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

c) Se verifică imediat că $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. Deci pentru $x\ge-\frac{1}{2}$ avem $2x+1\ge 0$ deci $f(x)\ge 0$, $(\forall)\,x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$.

91. a) $f'(x)=\left(2\sqrt{x}-\ln x\right)'=2(\sqrt{x})'-\left(\ln x\right)'=\frac{2}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x},(\forall)x>0.$

b) Ecuaţia tangentei la grafic în $A(1,f(1))$ este $\left.\begin{matrix}y-f(1)=f'(1)(x-1)\\ f'(1)=0,\,f(1)=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=2$.

c) $2\sqrt{x}\ge 2+\ln x\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-\ln x\ge 2,(\forall)x>0$ (1)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\underbrace{\boxed{2}}_{\min}$	$\nearrow$	$+\infty$

Din tabelul de variaţie se observă că $x=1$ este punct de minim, iar $f(1)=2$ este valoare minimă, deci $f(x)\ge 2,(\forall)x>0$, deci (1).

Obs. Am folosit că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x}-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(2-\underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{\to 0\,(L'H)}\right)=\infty$.

92. a) $f'(x)=\frac{\left(e^x\right)'x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

b) Funcţia nu este definită în $x=0$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=+\infty$, deci dreapta $x=0$ este asimptota verticală a graficului.

c) Din punctul a) deducem că punctul $x=1$ este un punct de minim global pentru f, deci $f(x)\ge f(1)=e$, $\forall x>0$ şi astfel $e^x\ge ex$, $\forall x>0$.

93. a) $f'(x)=(x^2+1)'\cdot e^x+(x^2+1)\cdot(e^x)'=(x^2+2x+1)e^x=(x+1)^2\cdot e^x\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = 1\cdot(x-0) \Rightarrow y = x$.

c) Din 1.a) $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

x	$-\infty$	-1	0	∞
f'(x)	++++++	0	+++++++++++++	
f(x)	↗ ↗ ↗ ↗ ↗	0	↗ ↗	
f(x)	- - - - - - - - - - - -	0	+++++++	

Caz I $x<0 \Rightarrow f(x)<0 \Rightarrow xf(x)>0$
Caz II $x>0 \Rightarrow f(x)>0 \Rightarrow xf(x)>0$
Caz III $x=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow xf(x)=0$
Deci $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

94. a) $f'(x) = (x)'\cdot e^x + (x)\cdot(e^x)' = (x+1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f''(x) = (x+2)e^x \quad e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$.

x	$-\infty$	-2	∞
$2+x$	----------	0	++++++++++
$f''(x)$	----------	0	++++++++++

Pentru $x \in (-\infty, -2]$ f este concavă şi pentru $x \in [-2, \infty)$ f este convexă.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\frac{1}{e^x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-\frac{1}{e^x}} = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$

95. a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

b) A. Ob. $y = mx + n$, $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-x} = 1 \Rightarrow m = 1$.

$n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x^2+x}{x-1}\right) = 1 \Rightarrow n = 1$

În consecinţă $y = x+1$ este asimptotă oblică.

c)

x		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		|	- - -	0	+ + +	
$f(x)$		|	↘	4	↗	

f este descrescătoare pe $(1,2) \Rightarrow \sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{3}$ implică $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$.

Scanned with OKEN Scanner

96. a) $f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; $y=1$ asimptota orizontală spre $+\infty$

c) $f'(x)=0$ are rădăcinile $x_1=1$ şi $x_2=-1$.

Din tabelul de variaţie :

x	-∞		-1		1		+∞
f(x)	+		0	-	0	+	+
f'(x)	1	↑	3	↓	⅓	↑	1

f este strict crescătoare pe $[1,+\infty)$ şi $1<\sqrt[3]{2007}<\sqrt[3]{2008}\Rightarrow f\left(\sqrt[3]{2007}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2008}\right)$.

97. a) $f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x-1}\right)'=\dfrac{\left(e^x\right)'(x-1)-e^x(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2},(\forall)x>1.$

b) Ecuaţia tangentei la grafic în $A(2,f(2))$ este $\left.\begin{array}{l} y-f(2)=f'(2)(x-2)\\ f'(2)=0, f(2)=e^2\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{y=e^2}$.

c)

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	|	−	0	+	
$f(x)$	∞	↘	$\underbrace{\boxed{e^2}}_{\min}$	↗	∞

. Din tabelul de variaţie se observă că $x=2$ este punct de minim, iar $f(2)=e^2$ este valoare minimă, deci $f(x)\ge f(2)=e^2,(\forall)x>1$.

Obs. $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{e^x}{x-1}=\dfrac{e}{0_+}=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x(x-1)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x-1}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2}=\infty$.

98. a) $f'(x)=x'+2'-3\cdot(\sqrt[3]{x})'=1-3\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

b) Ecuaţia tangentei este: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=0(x-1)\Leftrightarrow y=0$.

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow 1=\sqrt[3]{x^2}\Leftrightarrow x=1(x>0)$

Din tabelul de variaţie al lui f

x	0		1		∞
f'(x)	− − − − − −		0	+ + + + + + + + + + + +	
f(x)	↘ ↘ ↘ ↘		0	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	

avem că $f(x)\ge 0\forall x\ge 0\Rightarrow x+2\ge 3\cdot(\sqrt[3]{x})\forall x\ge 0\Rightarrow\dfrac{x+2}{3}\ge\sqrt[3]{x}\forall x\ge 0$

99. a) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

b) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1; n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x=0\Rightarrow y=x$ este asimptotă oblică la ∞

Scanned with OKEN Scanner

c) $f''(x)=\dfrac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2x}{x^4}=\dfrac{2}{x^3}>0 \Rightarrow f$ este convexă

3.3. PRIMITIVE. INTEGRALE DEFINITE

100. a) $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)\,dt=\int_0^x e^t dt=e^t\Big|_0^x=e^x-1$.

b) Calculăm integrala prin părţi cu alegerea
$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ şi $g'(x)=e^x\Rightarrow g(x)=e^x$.

Obţinem: $\int_0^1 xe^x dx=xe^x e\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big|_0^1=e-e+1=1$.

c) Prin calcul obţinem $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x\left(e^t-1\right)dt=\left(e^t-t\right)\Big|_0^x=e^x-x-1$

Realizăm un tabel de variaţie a funcţiei. Avem $f_2'(x)=e^x-1, f_2'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$				0					$+\infty$
f_2'		-	-	-	0	+	+	+	+	
f_2		↘			$f(0)=0$				↗	

Din tabel reiese că $f_2(x)\geq 0,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

101 a) $\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^e(x)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^e=\dfrac{e^2-1}{2}$

b) $\int_1^e\left(f(x)\right)dx=\int_1^e\dfrac{\ln x}{x}dx+\int_1^e x dx=\dfrac{t^2}{2}\Big|_0^1+\dfrac{x^2}{2}\Big|_1^e=\dfrac{e^2}{2}, t=\ln x$.

c) $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-x\right)dx=\left(\dfrac{\ln^2 x}{2}\right)\Big|_{e^n}^{e^{n+1}}=\dfrac{2n+1}{2}$.

Obţinem $I_{n+1}-I_n=\dfrac{2(n+1)+1}{2}-\dfrac{2n+1}{2}=1$, valoare ce reprezintă raţia progresiei aritmetice $(I_n)_{n\geq 1}$.

102. a) Primitivele lui $f+g$ sunt $H(x)=e^x+\ln x+C$

b) $\int_1^2 f^2(x)+g^2(x)dx=\int_1^2\left(e^{2x}+x^{-2}\right)dx=\left(\dfrac{e^{2x}}{2}-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^2}{2}+1=\dfrac{e^4-e^2+1}{2}$

c) $\int_1^2 e^x\dfrac{1}{x}dx=\int_1^2 f(x)g(x)dx\leq\dfrac{1}{2}\int_1^2\left[f^2(x)+g^2(x)\right]dx=\dfrac{e^4-e^2+1}{4}$.

103. a) $\int f_1(x)\,dx=\int\left(x^2+x+1\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\int_0^1 e^x f_0(x)dx = \int_0^1 e^x (x+1)dx = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e-1-e+1 = e$.

c) $\int_0^1 f_m(x)dx = \left(m^2\frac{x^3}{3} + (m^2-m+1)\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{m^2}{3} + \frac{m^2-m+1}{2} + 1$. Condiţia din enunţ devine : $\frac{m^2}{3} + \frac{m^2-m+1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ adică $5m^2 - 3m = 0$ cu soluţiile $m=0$ şi $m=\frac{3}{5}$.

Întrucât $m \in \mathbb{R}^*$ deducem că $m = \frac{3}{5}$.

104. a) $\int_1^e x\left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = 1$.

b) Fie F o primitivă a funcţiei f. Atunci rezultă că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (0,+\infty)$.

De aici obţinem că $F'(x) = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} > 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$.

Rezultă că F este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ deci este funcţie monotonă.

c) Folosim metoda integrării prin părţi şi obţinem:

$I = \int_1^2 f'(x)f(x)dx = f^2(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)f'(x)dx$.

Rezultă că $2I = f^2(x)\Big|_1^2 \Rightarrow 2I = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$,

adică $2I = -\frac{44}{81}$ de unde rezultă că $I = -\frac{22}{81}$ adică $\int_1^2 f'(x)f(x)dx = -\frac{22}{81}$.

105. a) $I_0 = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) $I_1 = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

c) $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 \frac{x^{n+2}}{x^2 1}dx - \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx = \int_2^3 \frac{x^2\cdot x^n - x^n}{x^2-1}dx =$

$= \int_2^3 \frac{x^n(x^2-1)}{x^2-1}dx = \int_2^3 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.

106. a) $F(x) = -e^{-x} + 1$ şi relaţia se verifică.

b) Se calculează: $h(x) = -2e^{-x} + 1$ $h'(x) = 2e^{-x}$ $h''(x) = -2e^{-x} < 0$ Rezultă h concavă.

c) Se calculează:

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

$$\int_0^x tf(t^2)dt = \int_0^x te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^x (-2t)e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}$$

Deci: $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x tf(t^2)dt = \lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

107. a) $F'(x) = (x+1)'\ln x + (x+1)(\ln x)' - x' = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} - 1 = \ln x + \frac{x+1-x}{x}$

$\Rightarrow F'(x) = \ln x + \frac{1}{x} = f(x) \Rightarrow$ F este o primitivă a lui f

b) $f(e^x) = \ln(e^x) + \frac{1}{e^x} = x + e^{-x}$

$$\int_1^2 f(e^x)dx = \int_1^2 (x+e^{-x})dx = \left(\frac{x^2}{2} - e^{-x}\right)\Big|_1^2 = (2-e^{-2}) - (\frac{1}{2} - e^{-1}) = \frac{3e^2+2e-2}{2e^2}$$

c) Pentru că F primitivă a lui f avem $\int_1^x f(t)dt = F(t)\Big|_1^x = F(x) - F(1)$

Atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = F'(1) = f(1)$

108. a) $I_0 = \int_1^2 x^0 - e^x dx = \int_1^2 e^x dx = e^x\,|_1^2 = e^2 - e..$

b) $I_1 = \int_1^2 xe^x dx = \int_1^2 x(e^x)'dx = xe^x\,|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$

c) $I_{n+1} = \int_1^2 x^{n+1}e^x dx = \int_1^2 x^{n+1}(e^x)'dx = x^{n+1}e^x\,|_1^2 - \int_1^2 (n+1)x^n e^x dx = 2^{n+1}e^2 - e - (n+1)I_n$ ceea ce încheie demonstraţia.

109. a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Atunci $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^3 - 3x + 2)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$,

b) Cum $f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$ avem $f'(-1) = 3 - 2m + n = 0$ şi $f'(1) = 3 + 2m + n = 0$.

Obţinem $m = 0$ şi $n = -3$. Ştim că $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x + p)dx = 4$, de unde

$$\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + px\right)\Big|_{-1}^1 = 4 \Leftrightarrow 2p = 4 \Leftrightarrow p = 2.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x (t^3 + mt^2 + nt + p)dt = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{mx^3}{3} + \frac{nx^2}{2} + px\right) = \frac{1}{4}$.

110. a) $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $f'(x)=(x+1)e^x, f''(x)=(x+2)e^x,$

$\int_0^1 f''(x)dx=\int_0^1 (x+2)(e^x)'dx=(x+2)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=2e-1;$

c) $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx=\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 e^{x^2}(x^2)'dx=\frac{1}{2}\int_1^{2^2} e^x dx=\frac{1}{2}(e^4-e).$

111. a) $\int f(x)dx=\frac{x^{1005}}{1005}+\frac{2008^x}{\ln 2008}+C, C$ constantă reală.

b) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)>0\Rightarrow F$ strict crescătoare.

c) $\int_0^1 xf(x^2)dx=\int_0^1 x\left(x^{2008}+2008^{x^2}\right)dx=\int_0^1\left(x^{2009}+x2008^{x^2}\right)dx=$

$=\frac{x^{2010}}{2010}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\frac{2008^{x^2}}{\ln 2008}\Big|_0^1=\frac{1}{2010}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2007}{\ln 2008}.$

112. a) $\int_0^1 (x^2+2x+1)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+x^2\Big|_0^1+x\Big|_0^1=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}.$

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=x\Big|_0^1+\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=1+\ln 2=\ln(2e).$

c) $\int_0^1 f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}\Big|_0^1=e^{f(1)}-e^{f(0)}=e^2-e^1=e(e-1).$

113. a) $I+J=\int_0^1\frac{e^x}{1+x}dx+\int_0^1\frac{xe^x}{1+x}dx=\int_0^1\frac{e^x(1+x)}{1+x}dx=\int_0^1 e^x dx=e-1$

b) Avem $xe^x\geq x(x+1)$, deci $\frac{xe^x}{x+1}\geq\frac{x(x+1)}{x+1}=x$. Deci $J=\int_0^1\frac{xe^x}{1+x}dx\geq\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$

c) $I=\int_0^1\frac{e^x}{1+x}dx=e^x\cdot\frac{1}{1+x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\cdot\left(\frac{1}{1+x}\right)'dx=\frac{e-2}{2}+\int_0^1\frac{e^x}{(1+x)^2}dx.$

114. a) $F'(x)=e^x+3x^2+2=f(x)\Rightarrow F$ este o primitivă a lui f.

b) Pentru a calcula integrala folosim metoda de integrare prin părţi, utilizând rezultatul de la subpunctul anterior.

Astfel $I=\int_0^1 f(x)F(x)dx=\int_0^1 F'(x)F(x)dx=F(x)F(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)F'(x)dx$

deci $2I=F^2(x)\Big|_0^1$ $\quad I=\frac{F^2(x)}{2}\Big|_0^1=\frac{\left(e^x+x^3+2x-1\right)^2}{2}\Big|_0^1=\frac{(e+2)^2}{2}.$

Scanned with OKEN Scanner

Soluții

c) $\int_0^1 \left(xf(x)+F(x)\right)dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 xF'(x)dx + \int_0^1 F(x)dx =$

$= xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx + \int_0^1 F(x)dx = xF(x)\Big|_0^1 = F(1).$

115. a) f este continuă pe $R\setminus\{0\}$

$f(0-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x+2 = 2$

$f(0+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x+1 = 2$

$f(0) = 2$

Rezultă că f este continuă în $x=0$, deci continuă pe R, adică f admite primitive pe R.

b) $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x+2)dx + \int_0^1 \left(e^x+1\right)dx = e+\frac{3}{2}.$

c) $x^2 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow f\left(x^2\right) = e^{x^2}+1$

$\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx = \int_0^1 (xe^{x^2}+x)dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx + \int_0^1 xdx = \frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e}{2}$

116. a) $\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

b) Avem $\int g(x)dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx = \ln\left(x^2+1\right)+C = f(x)+C,$

c) Avem $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)}dx = \int_1^2 \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^2}dx = \int_1^2 \frac{\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'}{\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^2}dx =$

$= -\frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}\Big|_1^2 = -\frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{\ln 5 - \ln 2}{\ln 2 \cdot \ln 5}.$

117. a)

$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x}dx = \int_1^4 \frac{1}{x}dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \ln x\,|_1^4 + 2\sqrt{x}\,|_1^4 = \ln 4 + 2\sqrt{4} - 2 = \ln 4 + 2.$

b) $\int_1^4 g(x)dx = \int_1^4 \frac{1}{4}\ln x = \frac{1}{4}\int_1^4 x'\ln x = \frac{1}{4}x\ln x\,|_1^4 - \frac{1}{4}\int_1^4 x\cdot\frac{1}{x}dx = \ln 4 - \frac{x}{4}\Big|_1^4 = \ln 4 - \frac{3}{4}.$

c) Notăm

$h(x) = f(x)-g(x), h:(0,\infty)\to\mathbb{R}.\ h'(x) = f'(x)-g'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' - \left(\frac{1}{4}\ln x\right)' =$

Scanned with OKEN Scanner

$=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{4x}=-\frac{4+2\sqrt{x}+x}{4x^2}<0\Rightarrow h$ strict descrescătoare.

Întocmim tabelul de variaţie pe $(1,\infty)$:

X	1		4		∞
$h'(x)$	|- - - -

Soluţii

b) Fie $u=2x-1$; $du=2$. Atunci $\int_1^5 \sqrt{2x-1}dx=\int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}|_1^9=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$

c) Integrare prin părţi. $I_n=\int_1^5 f\cdot F^n=\int_1^5 F'\cdot F^n=F^{n+1}|_1^5-\int_1^5 F\cdot nF^{n-1}F'=F^{n+1}|_1^5-nI_n$.

Deci $I_n=\frac{F^{n+1}|_1^5}{n+1}$.

Atunci $I_{2008}=\frac{1}{2009}\left[F(5)^{2009}-F(1)^{2009}\right]=\frac{1}{2009}\left[9^{2009}-\frac{1}{3^{2009}}\right]=\frac{3^{6027}-1}{2009\cdot 3^{2009}}$.

121. a) $I_0=\int_2^3 \frac{1}{x^2-1^2}\,dx=\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3})=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

b) $I_1=\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx$; $u(X)=X^2-1\Rightarrow u'(X)=2x$;

$\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{u'(x)}{u(x)}dx=\frac{1}{2}\ln|u(x)|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

c) $I_{n+2}-I_n=\int_2^3 \frac{x^{n+2}}{x^2-1}dx-\int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx=\int_2^3\left(\frac{x^{n+2}}{x^2-1}-\frac{x^n}{x^2-1}\right)dx=$

$=\int_2^3 \frac{x^n(x^2-1)}{x^2-1}dx=\int_2^3 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_2^3=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

122. a) $I_0+I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}|_1^{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}+1=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

b) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x}dx-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^2+1}dx=\ln x\Big|_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$=\ln\sqrt{3}-\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)=\ln\sqrt{3}-\ln\sqrt{2}=\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

c) $I_n+I_{n-2}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n\left(x^2+1\right)}dx+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^{n-2}\left(x^2+1\right)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1}{x^n\left(x^2+1\right)}dx=$

$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n}dx=\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}}\right)$.

123. a) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}+2}{2x}$

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem $\left(\frac{1}{2}f^2\right)' = ff'$.

Atunci $\int_1^4 f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}f^2|_1^4 = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(1) = \frac{1}{2}(2+\ln 4)^2 - \frac{1}{2}$

c) Avem $\left(\frac{1}{2}f'^2\right)' = f'f'' = gf''$ Atunci $\int_1^4 g(x)f''(x)dx = \frac{1}{2}f'^2|_1^4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

124. a) $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

b) $\int_0^1 e^{x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}(e-1)$.

c) $\int_0^1 e^{x^{2n}}\cdot x^{2n-1}\,dx = \frac{1}{2n}\int_0^1 e^{x^{2n}}\cdot 2n\cdot x^{2n-1}\,dx = \frac{1}{2n}e^{x^{2n}}\Big|_0^1 = \frac{1}{2n}(e-1)$.

125. a) f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ deoarece este sumă de funcţii continue.

$l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x+1) = 1$; $l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{x+1} - \sqrt{x}\right) = 1$;

$f(0) = 0+1 = 1 \Rightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow f$ continuă în 0.

Aşadar f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left(\ln|x+1| - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{2}{3}..$

c) Aria este $A = \int_1^2 |g(x)|\,dx = \int_1^2 \left|-x\left(\frac{1}{x^2+1} - \sqrt{x^2}\right)\right|dx = \int_1^2 \left|\frac{x}{x^2+1} - x^2\right|dx$

Deoarece $x\in[1,2] \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < 1 \le x^2 \Rightarrow$

$A = \int_1^2 x^2 - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2}\ln 5\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$.

126. a) $F(x)$ primitivă a funcţiei $f(x)$ dacă: F derivabilă pe $[0,\infty)$ şi $F'(x) = f(x), \forall x\in[0,\infty)$. Calculând derivata funcţiei F se obţine: $F'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-2x-3}{(x+1)^2(x+2)^2}$, aceasta fiind funcţia căutată $f(x)$.

b) Se determină semnul funcţiei $f(x) = F'(x)$, pe intervalul $[0,\infty)$.

Deoarece $-2x-3<0, \forall x\in[0,\infty)$ şi $(x+1)^2(x+2)^2 > 0$, $\forall x\in[0,\infty)$ se obţine că $f(x)<0, \forall x\in[0,\infty)$. Prin urmare F este strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă $0 \le x \le 1$, întrucât F este strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$, are loc relaţia $F(0) \ge F(x) \ge F(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge F(x) \ge \frac{1}{6}$, $\forall x \in [0,\infty)$. Din proprietatea de monotonie a integralei definite se obţine că

$\int_0^1 F(0)dx \ge \int_0^1 F(x)dx \ge \int_0^1 F(1)dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{2}dx \ge \int_0^1 F(x)dx \ge \int_0^1 \frac{1}{6}dx$, deci

$\frac{x}{6}\Big|_0^1 \le \int_0^1 F(x)dx \le \frac{x}{2}\Big|_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le \int_0^1 F(x)dx \le \frac{1}{2}$.

127. a) $\int_0^2 (x+1)\frac{x^3}{x+1}dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} = 4$.

b) $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f''(x)dx = f'(x)\Big|_0^1 = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}\Big|_0^1 = \frac{5}{4}$.

c) Fie G primitiva lui g adică $\int g(x)dx = \int f''(x)dx = f'(x) + C$ ·

şi $y = 2x$ ecuaţia asimtotei funcţiei G. Atunci $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = 2$, iar

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[G(x) - 2x\right] = C - 1 = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow G(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} + 1$.

128. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^3 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x + \sqrt{x}\right) = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 \left(x + \sqrt{x}\right)dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{12}$.

c) $F(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_b^c \Leftrightarrow F(b) - F(a) = F(c) - F(b) \Leftrightarrow F(b) = \frac{F(a) + F(c)}{2}$

deci $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

129. a) $I_1 = \int_0^1 e^{-x} f_1(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

b) $I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$.

Deoarece $0 \le x \le 1$ şi $0 \le x^n \le 1 \Rightarrow 0 \le x^n \cdot e^x \le e^x$ şi atunci

$$\int_0^1 x^n e^x dx \le \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1 < e.$$

c) Deoarece $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - nI_{n-1}$, deducem relaţia de recurenţă $I_n + nI_{n-1} = e$, $\forall n \ge 2$.

Scanned with OKEN Scanner

130. a) $\left.\begin{matrix} f(-1-0)=4 \\ f(-1+0)=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$, $f(-1)=4 \Rightarrow f$ cont. in x=-1

$f|_{(-\infty,-1)}$ *cont.* $f|_{(-1,+\infty)}$ *cont.* , Deci f cont pe $R \Rightarrow f$ admite primitive

b) $\int\limits_{-3}^{-2} f(x)dx = \int\limits_{-3}^{-2} (x+5)dx = \left(\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big|_{-3}^{-2} = \frac{5}{2}.$

c) $m>-1 \Rightarrow f(x)=3x^2+1>0$

$A=\int_m^{m+1}(3x^2+1)dx = x^3\,|_m^{m+1} + x|_m^{m+1} = 3m^2+3m+2$ Fie $A(m)=3m^2+3m+2$

$A'(m)=6m+3=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$ $A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+3\left(-\frac{1}{2}\right)+2=\frac{5}{4} \Rightarrow$ aria minimă este $\frac{5}{4}$.

131 a) Descompunem $\frac{1}{x(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+2}$, obţinând $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln|x+2|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

b) $\frac{x}{x+1}<1, \forall x\in[0,1]$ şi prin integrare, obţinem

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx < \int_0^1 1dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx < x\Big|_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx < 1.$$

Se observă că, de fapt, inegalitatea este strictă.

c) $\int\limits_1^2 f(x)dx, \int\limits_1^b f(x)dx, \int\limits_1^c f(x)dx$ sunt în progresie aritmetică, dacă $\ln a, \ln b, \ln c \div$, adică

$\ln a+\ln c=2\ln b$, de unde $\ln ac=\ln b^2 \Rightarrow ac=b^2$, adică a,b,c sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

132.a) Se observă că f este continuă pe $(-\infty;1)$ şi $(1;\infty)$ din modul definire mai rămâne problema continuităţii în 1.Avem ca $f(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x+1}{x-2}=-2$ şi $f(+1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\ln x-2=-2$

de unde f este continua in 1 asadar pe $\mathbb{R}$ de unde admite primitive.

b) $\int_0^1 (x-2)f(x)dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x-2}(x-2)dx = \int_0^1 x+1dx = \frac{x^2}{2}+x\,|_0^1 = \frac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x (f(t)+2)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x (\ln t-2+2)dt = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x \ln t dt =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x \ln t\cdot(t)'dt = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[t\ln t\Big|_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\cdot t dt\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x\ln x-x+1] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)}{x}=+\infty$

133. a) $\int_1^2 (x+1)^2dx = \frac{(x+1)^3}{3}\,|_1^2 = \frac{3^3-2^3}{3}=\frac{19}{3}$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)\Big|_0^a = \ln(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Obs. $x \in [0,\infty)$

c) Integrala nu are sens pentru ca f este definita pe $[0,\infty)$.

134 a) $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}dx = \ln(x^2+1)\Big|_0^{\sqrt{e-1}} = 1$

b) Fie F o primitivă. Atunci $F'(x)=\frac{2x}{1+x^2} > 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow$ F strict crescătoare.

c) Inegalitatea este echivalentă cu

$\int_0^2 f(x)dx > \int_2^4 f(x)dx \Leftrightarrow \ln(x^2+1)\Big|_0^2 > \ln(x^2+1)\Big|_2^4 \Leftrightarrow \ln 5 > \ln 17 - \ln 5 \Leftrightarrow \ln 25 > \ln 17$

adevărat.

135. a) $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e-1.$

b) $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2\right)' e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$

c) $f'(x) = 2x\cdot e^{x^2} > 0, \ \forall x \in (0,\infty) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$.

Aplicând teorema de medie $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)(1-0) \le \int_0^1 f(x)dx \le f(1)(1-0) \Leftrightarrow 1 \le \int_0^1 f(x)dx \le e.$

136. a) $f_1(x)\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow f_1(\sqrt{x-1}) = \frac{1}{x}, \ x \neq 0 \Rightarrow \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = 1.$

b) $f_2(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow g(x) = x^4+2x^2+1 \ ; \ G(x) = \int (x^4+2x^2+1)dx = \frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x+c;$

$G(1) = \frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1+c = \frac{28}{15}+c; \ \frac{28}{15}+c = \frac{13}{15}; \ c = -1; \ G(x) = \frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x-1.$

c) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^{-n}dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{-n+1}}{-n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)$

137. a) Condiţia revine la $2x+1 = ax+1, \forall x \Leftrightarrow a = 2.$

b) $\int_0^1 e^x f_1(x)dx = \int_0^1 e^x\cdot(x+1)dx = e^x\cdot(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e-1-e^x\Big|_0^1 = 2e-1-e+1 = e.$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\int_0^1 f_a^2(x)dx \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \int_0^1 (a^2x^2+2ax+1)dx \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2}{3}+a+1 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2+12a+9 \geq 0 \Leftrightarrow (2a+3)^2 \geq 0.$

138. a) Cum F este continuă şi derivabilă fiind suma a două funcţii derivabile mai rămâne să verificăm că $F'(x)=f(x)$. Într-adevăr $F'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ şi F este primitivă a lui f.

b) Aria cerută este $\int_1^2 f(x)dx = F(x)|_1^2 = F(2)-F(1)=\frac{1}{2}$.

c) Avem că $\int_1^e F'(x)\ln x dx = F(x)\ln x|_1^e - \int_1^e \frac{F(x)}{x}dx = F(e)-\int_1^e 1dx - \int_1^e \frac{1}{x^2}dx =$

$= F(e)-e+1+\frac{1}{x}|_1^e = e+\frac{1}{e}-e+1+\frac{1}{e}-1=\frac{2}{e}.$

3.4. APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE

139. a) $A=\int_0^1 (x+e^{-x})dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}+1 \Rightarrow A=\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$

b) Din $x+e^{-x}\geq 1$ obţinem prin inlocuirea lui x cu x^2 ca $x^2+e^{-x^2}\geq 1$, adică $e^{-x^2}\geq 1-x^2$. Integrând avem $\int_0^1 e^{-x^2}dx \geq \int_0^1 (1-x^2)dx$

$\int_0^1 (1-x^2)dx = (x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

c) $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt = \int_0^x \frac{t+e^{-t}}{e^t}dt = \int_0^x \frac{t}{e^t}dt + \int_0^x \frac{t+e^{-t}}{e^t}dt =$

$= \int_0^x t\cdot e^{-t}dt + \int_0^x e^{-2t}dt$

Prima integrală se rezolvă prin parţi

$\int_0^x t\cdot e^{-t}dt = \int_0^x t(-e^{-t})'dt = -te^{-t}\Big|_0^x + \int_0^x e^{-t}dt =$

$= -xe^{-x}-e^{-x}+1$

A doua integrală este $\int_0^x e^{-2t}\,dt = \frac{e^{-2t}}{-2}\Big|_0^x = -\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}$

$V=\pi\int_0^1 \left(x+e^{-x}-x+e^x\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(e^{-x}+e^x\right)^2 dx =$

Scanned with OKEN Scanner

$$=\pi\int_0^1\left(e^{-2x}+2+e^{2x}\right)dx=\pi\cdot\left[\frac{e^{-2x}}{-2}+2x+\frac{e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1=$$

$$=\pi\cdot\left[-\frac{e^{-2}}{2}+2+\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]=\pi\cdot\left[-\frac{e^2}{2}+2-\frac{1}{2e^2}\right].$$

140. a) $\int_0^1 e^x f_1(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

b) $g_1(x)=\frac{1}{1!}\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^1 te^{-t}dt=(-te^{-t}-e^{-t})\Big|_0^x=-e^{-x}(x+1)+1$.

Rezultă că $\lim_{x\to\infty}g_1(x)=1-\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}$. Aplicând regula lui Hopital avem $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=0$ de unde $\lim_{x\to\infty}g_1(x)=1$.

c) $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 e^{-x}x^n dx=-e^{-x}x^n\Big|_0^1+n\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$.

141. a) $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=e^0=1\quad\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=2-1=1$

Deci f este continuă în x=-1.
Restricţiile lui f la intervalele (-∞,-1) respectiv (-1,∞) sunt continue.
Rezultă f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b)) $g:[0,2]\to\mathbb{R},\ g(A)_2=x+2>0\ Vol=\pi\cdot\int_0^2(x+2)^2dx=\pi\int_0^2\left(x^2+4x+4\right)dx=\frac{56\pi}{3}$

c) $\int_{-2}^0 xf(x)dx=\int_{-2}^{-1}xe^{x+1}dx+\int_{-1}^0 x(2+x)dx$

$$\int_{-2}^{-1}xe^{x+1}dx=(xe^{x+1})/_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}e^{x+1}dx=-1+\frac{2}{e}-e^{x+1}/_{-2}^{-1}=$$

$$=-1+\frac{2}{e}-1+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}-2$$

$\int_{-1}^0(2x+x^2)dx=(x^2+\frac{x^3}{3})/_{-1}^0=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$. Deci $\int_{-2}^0 xf(x)dx=\frac{3}{e}-\frac{8}{3}$.

142. a) $I_1(x)=\int_0^x 1dt=x$

b) $I_2(x)=\int_0^x I_1(t)dt=\int_0^x tdt=\frac{t^2}{2}|_0^x=\frac{x^2}{2}$ Atunci $\int_0^1 I_2(x)=\frac{x^3}{6}|_0^1=\frac{1}{6}$

c) $1+x+\frac{x^2}{2}\le e^x$. Fie $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}-e^x, f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$..

Scanned with OKEN Scanner

Avem $f'(x)=1+x-e^x, f''(x)=1-e^x$. Din tabelul de variaţie al funcţiei obţinem $x=0$ punct de maxim, deci $f(x)\le f(0)=0$

Deci f e crescătoare. Atunci $f(x)\ge f(0)=0$.

143. a) F este o primitivă a lui f dacă F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ si $F'=f$.

Cum $F'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x=f(x)$ şi F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind produs de funcţii derivabile rezultă că F este o primitivă a lui f.

b) Aria este $\int_0^1 f(x)dx=F(x)|_0^1=F(1)-F(0)=0+1=1$.

c) Avem $\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'=\frac{f''(t)f(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}$ şi deci

$$\int_1^x \frac{f''(t)f(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\int_1^x\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'dt=\frac{f'(t)}{f(t)}|_1^x=\frac{e^t(t+1)}{e^t t}|_1^x=\frac{t+1}{t}|_1^x=\frac{x+1}{x}-2.$$

144. a) $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\left((x+1)^3-3\cdot x^2-1\right)dx=\left(\frac{(x+1)^4}{4}-3\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1=\frac{16}{4}-1-1=2.$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x g(t-1)dt}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{-1}^{x-1} g(u)du}{x^4}=L$

$g:[-1,x-1]\to\mathbb{R}, g$ continuă$\Rightarrow$ admite primitivă Fie $G:[-1,x-1]\to\mathbb{R}$ primitivă a sa

$\int_{-1}^{x-1} g(u)du=G(x-1)-G(-1),\ G'(x-1)=(x-1)'g(x-1)=1\cdot g(x-1)$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{G(x-1)-G(-1)}{x^4}\overset{T'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{g(x-1)}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3\cdot(x-1)^2-1}{4x^3}=\frac{1}{4}$$

c) $\int_{-1}^1 g^5(x)dx=\int_{-1}^0 g^5(x)dx+\int_0^1 g^5(x)dx=\int_0^1 g^5(x)dx+\int_0^1 g^5(-x)d(-x)=$

$\int_0^1 g^5(x)dx-\int_0^1 g^5(x)dx=0$

145. a) $\int_1^e f'(x)dx=f(x)|_1^e=\frac{1}{e(1+\ln e)}-\frac{1}{1(1+\ln 1)}=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$

b) Pentru $x>1$ avem $f(x)=F'(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}>0$ deci F e crescătoare.

c) Trebuie să găsim a astfel încât $\int_a^{e^2} f(x)dx=\ln\frac{3}{2}$

146. a) $I_1=\int_0^1\frac{x+1}{x+1}dx=1$

Scanned with OKEN Scanner

b) Deoarece pe $[0,1], x^2 \le x$, avem $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x+1} \le \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} = 1$

c) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+1+x^n+1}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)+2}{x+1}dx = x^n\,|_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{x+1}dx =$

$= \frac{1}{n+1} + 2(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$

147. a) $I_0 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_e^{e^2} = 1.$

b) $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_e^{e^2} = \frac{3}{2}.$

c) Din faptul că $1 \le \ln x \le 2,\ \forall\ x \in [e, e^2]$, obţinem $1 \le \ln^n x \le 2^n$, , de unde, prin aplicarea proprietăţii de monotoniei a integralei definite rezultă $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx \le \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x}dx \le \int_e^{e^2} \frac{2^n}{x}dx$. Dar, $I_n = \frac{\ln^n x}{n+1}\Big|_e^{e^2} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ şi $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx = 1$, de unde obţinem relaţia cerută.

148. Se consideră funcţia $f:[-4,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

a) $\int_0^4 f^2(x)dx = \int_0^4 (16-x^2)dx = \left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$

b) Notăm $h:[-\sqrt{5},\sqrt{5}] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$; h este impară deoarece

$h(-x) = -h(x),\ \forall\ x \in [-\sqrt{5},\sqrt{5}]$ şi deci $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} h(x)\,dx = 0$.

Obs: Egalitatea se mai poate demonstra şi prin calcul direct.

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(-\sqrt{16-x^2}\right)' dx = \left(-\sqrt{16-x^2}\right)\Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = 0$$

c) Avem $0 \le \sqrt{16-x^2} \le \frac{4+x+4-x}{2}$. Integrăm pe [0,m] şi obţinem

$0 \le \int_0^m f(x)dx \le 4x\Big|_0^m \Rightarrow 0 \le \int_0^m f(x)dx \le 4m \le 8$ deoarece $\max_{m\in[0,2]} m = 2$.

149. a) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e-1$

b) $A = \int_0^1 |g(x)|\,dx = \int_0^1 xe^{-x}e^x\sqrt{x^2+1}dx = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x^2+1}(x^2+1)'dx$

Scanned with OKEN Scanner

$$=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

c) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1(x^2+1)e^{2x}dx=\pi\int_0^1(x^2+1)\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=$

$$=\pi\left[(x^2+1)\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_0^1-\int_0^1 xe^{2x}dx\right]=\pi\left[e^2-\frac{1}{2}-x\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}dx\right]=$$

$$=\pi\left[e^2-\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{e^{2x}}{4}\Bigg|_0^1\right]=\pi\left(e^2-\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\pi\left(\frac{3e^2-3}{4}\right)$$

150. a) Înlocuind pe f (x) în integrală se obţine:

$$\int_1^2 4x^2dx=4\int_1^2 x^2dx=4\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2=\frac{4}{3}(8-1)=\frac{28}{3}.$$

b) Fie F o primitivă a lui f. Pentru determinarea convexităţii se studiază a doua derivată a lui F pe intervalul $(1,\infty)$. Dar F'(x)=f(x) iar F''(x)=f'(x)=$\frac{1}{x}$-1. Pentru x>1 fracţia $\frac{1}{x}$ este subunitară, deci diferenţa $\frac{1}{x}$-1 este totdeauna negativă. Dacă F''(x)<0 pe acest interval rezultă că orice primitivă este concavă pe intervalul specificat.

c) Funcţia $h(x)=\ln x-x+x=\ln x$. Pe intervalul [1,e] funcţia h(x)=lnx este pozitivă deci aria este dată de $\int_1^e \ln x dx$; $J=\int \ln x dx$; prin părţi: $u=\ln x$, $dv=1$; $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$;

$J=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+k$.

Rezultă $S=\int_1^e \ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_1^e=(e-e)-(0-1)=1$.

151. $I_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, I_0(x)=e^x$ şi $I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)dt, \forall n\in\mathbb{N}$.

a) $I_1(x)=\int_0^x I_0(t)dt=\int_0^x e^t dt=e^t\Big|_0^x=e^x-1$. Atunci $I_1(1)=e-1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{I_2(x)}{x+1}$, $I_2(x)=\int_0^x(e^t-1)dt=(e^t-t)\Big|_0^x=e^x-x-1\Rightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x-1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x+1}-1=0-1=-1.$$

c) Am văzut că $I_2(x)=e^x-x-1$. Fie $g(x)=I_2(x)$. $g'(x)=e^x-1\geq 0$ cu egalitate doar pentru $x=0$. Atunci $g=I_2$ este crescătoare, deci $g(x)\geq g(0)=0$

152. a) $\int_{-1}^1 f(x)dx=(\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{\ln 3})\Big|_{-1}^1=\frac{16}{3\ln 3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

b) $Vol=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1 3^{-2x}dx=\pi\dfrac{-3^{-2x}}{2\ln 3}\Big|_0^1=\dfrac{4\pi}{9\ln 3}$.

c) $F''(x)=f'(x)=3^x\ln 3-3^{-x}\ln 3=\dfrac{9^x-1}{3^x}\ln 3$, pentru orice număr real x. Deoarece pentru $x\le 0$ avem $9^x-1\le 0$ şi pentru $x\ge 0$ avem $9^x-1\ge 0$, rezultă că F'' este negativă pe intervalul $(-\infty,0]$ şi pozitivă pe intervalul $[0,+\infty)$, deci F este concavă pe $(-\infty,0]$ şi convexă pe $[0,+\infty)$.

153. a) $\int_2^e\left(f(x)-\dfrac{1}{x-1}\right)dx=\int_2^e\dfrac{1}{x}dx=\left(\ln|x|\right)\Big|_2^e=\ln e-\ln 2=1-\ln 2$.

b) $\int_2^x f(t)dt=\int_2^x\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t-1}\right)dt=\left(\ln|t|+\ln|t-1|\right)\Big|_2^x\overset{x\ge 2}{=}\ln x+\ln(x-1)-\ln 2$ (1)

Deci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_2^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x+\ln(x-1)-\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 2}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{x}\overset{l'Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$.

c) $\Gamma_f=\int_2^a|f(x)|dx=\int_2^a f(x)dx\underset{a>2}{\overset{(1)}{=}}\ln a+\ln(a-1)-\ln 2=\ln\dfrac{a(a-1)}{2}$; $S=\ln 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln\dfrac{a(a-1)}{2}=\ln 3\Rightarrow\dfrac{a(a-1)}{2}=3\Leftrightarrow a^2-a-6=0$ cu rădăcinile $a_1=-2\notin(2,\infty)$ si $a_2=3\in(2,\infty)$. Soluţia este: $a=3$.

154. a) $I_1=\int_0^1 x(1+x)dx=\int_0^1\left(x^2+x\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\dfrac{5}{6}$

b) Deorece $(1+x)^{2008}\ge(1+x)^{2007}\Rightarrow x(1+x)^{2008}\ge x(1+x)^{2007}$, $\forall x>0$ şi prin integrare se obţine inegalitatea cerută.

c) $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n dx=\int_0^1\left[(1+x)^{n+1}-(1+x)^n\right]dx=\left(\dfrac{1}{n+2}(x+1)^{n+2}-\dfrac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}\right)\Big|_0^1$

$=\dfrac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

155. a) Funcţia g este elementară, deci derivabilă pe $(0,\infty)$ şi

$g'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1=f(x)$, $\forall x>0$.

b) Avem $\int_1^e f(x)g(x)dx=\int_1^e g'(x)g(x)dx=\dfrac{g^2(x)}{2}\Big|_1^e=\dfrac{g^2(e)}{2}-\dfrac{g^2(1)}{2}=\dfrac{e^2}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Aria cerută este aria subgraficului funcţiei g pe intervalul $[1,e]$, adică

$$A(\Gamma_g)=\int_1^e|g(x)|dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2+1}{4}.$$

156. a) $\int_0^1 f_1(x)dx=(x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

b) $V=\pi\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{\pi}{3}$.

c) $\int_0^1(x+1)f_{2008}(x)dx=\int_0^1(x+1)\frac{x^{2009}+1}{x+1}dx=\frac{x^{2010}}{2010}+x\Big|_0^1=\frac{2011}{2010}$.

157. a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$

b) $I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 x^n dx=$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$$

c) Integrând inegalitatea din enunţ pe intervalul $[0,1]$, obţinem

$$\int_0^1\frac{x^n}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}.$$

Pentru n = 2008 avem $\frac{1}{2\cdot 2009}\le I_{2008}\le\frac{1}{2009}\Rightarrow\frac{1}{2}\le 2009\cdot I_{2008}\le 1$.

158: a) f este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $f'(x)=2x+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=2x+\ln x+1=g(x)$, rezultă că f este o primitivă a lui g

b) $\int_1^e f(x)g(x)dx=\int_1^e f(x)f'(x)dx=\frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^e=\frac{f^2(e)-f^2(1)}{2}=\frac{(e^2+e)^2-1}{2}$

c) $S=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(x^2+x\ln x\right)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^e+\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=$

$$=\frac{e^3-1}{3}+\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^3-1}{3}+\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}=\frac{4e^3+3e^3-1}{12}$$

159.a) $I_0=\int_e^{e^2}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_e^{e^2}=\frac{e^4-e^2}{2}$.

b) $f:[e,e^2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ este strict crescătoare, $\ln x\ge 1,\forall x\in[e,e^2]\Rightarrow$

$\Rightarrow x\ln^n x\le x\ln^{n+1}x,\forall x\in[e,e^2]\Rightarrow\int_e^{e^2}x\ln^n xdx\le\int_e^{e^2}x\ln^{n+1}xdx\Rightarrow I_n\le I_{n+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $I_n=\int_e^{e^2}\ln^n x\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx=\frac{x^2}{2}\ln^n x\Big|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}n\left(\ln^{n-1}x\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}$

$=\frac{e^2\left(e^2 2^n-1\right)}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$.

160. a) $\int_1^2(x-1)dx=2-\frac{1}{2}-2+1=\frac{1}{2}$.

b) Pentru $a\in(0,1)$ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}(-x+1)dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a}+x\Big|_{-a}^{a}=2a$.

Avem $2a=1$, adică $a=\frac{1}{2}$.

c) Pentru $x\geq 0, e^x\geq 1$ rezultă $f\left(e^x\right)=e^x-1$.

Avem de calculat $\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=\int_0^1 xe^x dx-\int_0^1 xdx=\int_0^1 x\left(e^x\right)'dx-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=$

$=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx-\frac{1}{2}=e-e^x\Big|_0^1-\frac{1}{2}=e-e+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

161. a) $F'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}=f(x)\Rightarrow F$ este o primitivă a lui f.

b) $\int_1^2 F(x)dx=\int_1^2 F(x)F'(x)dx=\frac{F^2(x)}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{2}[F^2(2)-F^2(1)]=\frac{1}{2}[(2-\ln 2)^2-1]=$

$=\frac{1}{2}(4-4\ln 2+\ln^2 2-1)=\frac{1}{2}(3-4\ln 2+\ln^2 2)$.

c) $A=\int_1^e F(x)dx=\int_1^e(x-\ln x)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^e-\int_1^e x'\ln x dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-x\ln x|_1^e+\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$

$=\frac{e^2-1}{2}-e\ln e+1\ln 1+x|_1^e=\frac{e^2-1}{2}-e+e-1=\frac{e^2-3}{2}$.

162.a) $\int_1^e g(x)dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$.

b) $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e g(x)dx-\int_1^e\frac{x}{x^2+1}dx=1-\int_1^e\frac{x}{x^2+1}dx=1-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^e=$

$1-\frac{1}{2}(\ln(e^2+1)+\frac{1}{2}\ln(1^2+1))=1-\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$.

c) $f(x)\leq\frac{1}{2x^2}\Rightarrow$

$\int_1^e f(x)dx\leq\int_1^e\frac{1}{2x^2}dx=\frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^e=-\frac{1}{2}\frac{1}{x}\Big|_1^e=-\frac{1}{2}\frac{1}{e}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{e}+1)=\frac{1}{2}(\frac{e-1}{e})$

Scanned with OKEN Scanner

$1-\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}\le\frac{1}{2}\frac{e-1}{e}\Rightarrow$

$-\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{e}\le\frac{1}{2}\frac{e-1}{e}-1\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{e}\le\frac{1}{2}(\frac{e-1-2e}{e})\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{e}\le\frac{1}{2}(\frac{-1-e}{e})\Leftrightarrow$

$\ln\frac{e^2+1}{e}\ge\frac{e+1}{e}$. q.ed.

163.a) $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=(\frac{x^2}{2}-\ln x)\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\ln e-\frac{1}{2}+\ln 1=\frac{e^2}{2}-1-\frac{1}{2}+0=\frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}$.

b) F primitivă a lui f => $F'(x)=f(x)$.

$F''(x)=f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0\Rightarrow$ F convexa pe $(0,\infty)$.

c) $V_{C(f)}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$;

$V_{C(g)}=\pi\int_1^e g^2(x)dx=\pi\int_1^e(x^2+\frac{1}{x^2}-2)dx$;

$V_{C(h)}=\pi\int_1^e\left(\frac{1}{x}-x\right)^2dx=\pi\int_1^e(x^2+\frac{1}{x^2}-2)dx$;

$h(x)=\frac{1}{x}-x\Rightarrow V_{C(g)}=V_{C(h)}$;

164. a) $F'(x)=\left(e^x+\frac{x^3}{3}+x^2+1\right)'=e^x+x^2+2x=f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=e+\frac{1}{3}+2-1=e+\frac{4}{3}$.

c) $h(x)=\frac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Aria căutată $=\int_0^1 h(x)dx=\ =\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln(e^x+1)\Big|_0^1=\ln(e+1)-\ln 2=\ln\frac{e+1}{2}$..

165. a) $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt=\int_0^x dt=t\Big|_0^x=x$;

b) $f_0(x)+f_1(2x)\le e^{2x}\ <=>\ 1+2x\le e^{2x}$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{2x}-2x-1$

$h'(x)=2e^{2x}-2$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow x=0$

Din tabelul de variaţie al lui h

| x | 0 $\quad\quad\quad

b) $f_n(x)>0,(\forall)x\in[1;2]\Rightarrow A(\Gamma_f)=\int_1^2 f_n(x)dx=\int_1^2\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right)dx=\sum_{k=0}^{n}\int_1^2\frac{1}{x+k}dx=$

$=\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\Big|_1^2=\sum_{k=0}^{n}\ln(k+2)-\sum_{k=0}^{n}\ln(k+1)=$

$=\cancel{\ln 2}+\cancel{\ln 3}+\ldots+\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln 1-\cancel{\ln 2}-\cancel{\ln 3}-\ldots-\cancel{\ln(n+1)}=\ln(n+2).$

c) $f_1(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$. Fie F o primitivă a lui f_1

Calculăm $G'(x)=F'(x)-\frac{5}{6}=f_1(x)-\frac{5}{6}=\frac{-5x^2+7x+6}{6x(x+1)}$.

Din tabelul de semne $\Rightarrow G'(x)\geq 0(\forall)x\in[1;2]\Rightarrow G$ crescătoare.

169. a) $\int e^x dx=e^x+C$..

b) $V=\pi\int_1^e g^2(x)dx=\pi\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\pi\int_1^e\ln x\cdot(\ln x)'dx=\pi\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=\frac{\pi}{2}$

c) $I=\int_1^3\frac{1}{x(x+2)}dx=\int_1^3(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2})dx$. Se găseşte. $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$

Deci: $I=\frac{1}{2}\int_1^3(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2})dx=\frac{1}{2}(\ln x-\ln(x+2))\Big|_1^3=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 5)-\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

170. a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2.$

b) $V=\pi\int_0^2 h^2(x)dx=\pi\int_0^2\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{\pi}{x+1}\Big|_0^2=\frac{2\pi}{3}$.

c) Din $a\leq x\leq a+1\Rightarrow a+1\leq x+1\leq a+2\Rightarrow\frac{1}{a+2}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{a+1}$. Integrând ultima dublă inegalitate obţinem cerinţa din enunţ.

171. a) $f(x)=1+\frac{2}{x^2+4x+3}$ $f(x)=1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3})dx=(x+\ln|x+1|-\ln|x+3|)/_0^1=\ln\frac{3e}{2}$

c) $k>0$ $\int_0^k f(x)dx=k+\ln k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_0^k\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=k+\ln k\Leftrightarrow\ln\frac{3(k+1)}{k+3}+k=k+\ln k\Rightarrow k=\pm\sqrt{3}$

$k>0\Rightarrow k=\sqrt{3}.$

Scanned with OKEN Scanner

172. a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x+2)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{5}{2}$

b) folosim integrarea prin părţi:

$$\int_0^1 e^x(x+2)dx = \int_0^1 (e^x)'(x+2)dx = e^x(x+2)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x(x+2)'dx =$$

$$3e-2-\int_0^1 e^x dx = 3e-2-e^x\Big|_0^1 = 3e-2-e+1 = 2e-1.$$

c) $h(x) = px+2$

$V = \pi\int_0^1 h^2(x)dx = \pi\int_0^1 (p^2x^2+4px+4)dx \Rightarrow V = \pi\left(\frac{1}{3}p^2+2p+4\right)$ este minim.

O funcţie de gradul doi are minimul în vârf, deci V este minim dacă p este abscisa vârfului. $p = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\cdot\frac{1}{3}} = -3$.

173. a) F este derivabilă ca sumă de funcţii derivabile (elementare) şi $F'(x) = e^x + 1 - \frac{1}{x} = e^x + \frac{x-1}{x} = f(x)$.

b) $\int_1^2 x(F(x)-x+\ln x)dx = \int_1^2 x(e^x+x-\ln x-x+\ln x)dx = \int_1^2 xe^x dx$

$$\int_1^2 xe^x dx = \int_1^2 x(e^x)'dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2-e-e^x\Big|_1^2 = 2e^2-e-(e^2-e) = e^2.$$

Rezultă că $\int_1^2 x(F(x)-x+\ln x)dx = e^2$.

c) Condiţia revine la $\int_1^e \left|e^x + \frac{x-1}{x}\right|dx = e^m - 2 \Leftrightarrow \int_1^e \left(e^x + \frac{x-1}{x}\right)dx = e^m - 2 \Leftrightarrow$

$$\int_1^e \left(e^x + 1 - \frac{1}{x}\right)dx = e^m - 2 \Leftrightarrow e^x\Big|_1^e + x\Big|_1^e - \ln x\Big|_1^e = e^m - 2 \Leftrightarrow$$

$e^e - e + e - 1 - \ln e = e^m - 2 \Leftrightarrow e^e = e^m \Leftrightarrow m = e$.

174. a) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{(x^2+3x+2)'}{(x^2+3x+2)}dx = \ln(x^2+3x+2)\Big|_0^1 = \ln 3$

c) $f(x) - f(x+1) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \Rightarrow h(x) = -\frac{1}{x+3}$

Volumul este $\pi\int_0^1 h^2(x)dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}dx = -\pi\frac{1}{x+3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$

Scanned with OKEN Scanner

175. a) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 x^2(2-x^2)dx=\pi\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{7\pi}{15}$

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx$. Substituim $t=2-x^2, dt=-2xdx$. Atunci

$$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_2^1-\frac{\sqrt{t}}{2}dt=-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_2^1=\frac{-1+2\sqrt{2}}{3}$$

c) Fie F o primitivă a lui f. Atunci limita din enunţ este $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x^2}$. Ambii termeni tind la 0. Aplicăm L'Hospital şi avem că limita este $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{2-x^2}}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

176. a) $V=\pi\int_1^3 x^2dx=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\pi\frac{26}{3}$.

b) $F(x)=\int f(x)dx=\frac{x^{2008}}{2008}+\frac{x^2}{2}+x+c$, $F(0)=1$ rezultă c= 1.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^{2008}}{2008}+\frac{x^2}{2}+x}{x^{2008}}=\frac{1}{2008}$

177. a) $\int(x+4)^2\cdot\frac{1}{x+4}dx=\int(x+4)dx=\frac{x^2}{2}+4x+C$;

b) $f_2(x)=\frac{1}{x^2+4}$

$$\int_0^1 x f_2(x)dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$$

c) $x\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{5}\le\frac{1}{x^{2008}+4}\le\frac{1}{4}\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{5}dx\le\int_0^1\frac{1}{x^{2008}+4}dx\le\int_0^1\frac{1}{4}dx\Rightarrow\frac{1}{5}\le A(\Gamma_f)\le\frac{1}{4}$.

178. a) F derivabilă (funcţie elementară) şi $F'(x)=e^x+x\cdot e^x=(x+1)\cdot e^x=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ F este o primitivă a funcţiei f.

b) $F(x)\ge 0$, $(\forall)x\in[0,1]$.

$$\text{Aria}=\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x\cdot(e^x)'dx=x\cdot e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=(x-1)e^x\Big|_0^1=0-(-1)e^0=1.$$

c) $\int_0^1\frac{F(x)-f(x)}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{-e^x}{e^x+1}dx=-\int_0^1\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=-\ln(e^x+1)\Big|_0^1=$

$$=-\ln(e+1)+\ln 2=\ln\frac{2}{e+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

179. a) $\int f(x)dx=\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

b) Funcţia g este continuă şi pozitivă pe intervalul $[0;1]$ şi deci, aria suprafeţei este

$A=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 xe^x dx$.

Integrând prin părţi, obţinem $A=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-0-e^x\Big|_0^1=e-e+1=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2^t dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2^t}{\ln 2}\Big|_0^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 2}=\ln 2\cdot\frac{1}{\ln 2}=1$.

180. a) $\int(x+1)\cdot\frac{x^2}{x+1}dx=\frac{x^3}{3}+C$.

b) $\int_0^1 f_1(x)=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

c) $\forall x\in[0,1]\Rightarrow x^{2008}\le 1\Rightarrow\int_0^1 f_{2008}(x)dx\le\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$.

181. a) $\int f_0(x)dx=\int\frac{e^x}{2}dx=\frac{e^x}{2}+C$.

b) $\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln(e^x+1)\Big|_0^1=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

c) $\forall x\in[0,1]\Rightarrow e^{nx}\le e^{(n+1)x},\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow f_{n+1}(x)\le f_n(x),\forall n\in\mathbb{N}$ şi aplicând proprietatea de monotonie a integralei, obţinem $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx\le\int_0^1 f_n(x)dx,\forall n\in\mathbb{N}$.

182. a) $\int e^x dx=e^x+C, x\in[0,1]$

b) $\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x(e^x)'dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big|_0^1=e-e+1=1$.

c) Sunt îndeplinite condiţiile relaţiei

$\text{vol}(C_f)=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1 x^2e^{2x^3}dx=\frac{\pi}{6}\int_0^1 6x^2e^{2x^3}dx=$

$\frac{\pi}{6}\int_0^1(e^{2x^3})'dx=\frac{\pi}{6}e^{2x^3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(e^2-1)$.

183. a) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\ln x+C, x>0$.

b) $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)=\pi\left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=$

Scanned with OKEN Scanner

$\pi\left(\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}\right)-\pi\left(\frac{1}{3}+2-1\right)=\pi\left(\frac{7}{3}+2+\frac{1}{2}\right)=\frac{29\pi}{6}$.

c) $\int_1^e f(x)\ln x\,dx=\int_1^e\left(x\ln x+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx+\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=$

$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{e^2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{e^2+3}{4}$.

184. a) $\int f^2(x)dx=\int(x+2)dx=\frac{x^2}{2}+2x+c$.

b) Aria este $\int_0^1\sqrt{x+2}dx=\left.\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{8}\right)=\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$.

c) $\int_0^1 x^{2008}\sqrt{x+2}dx\le\int_0^1 x^{2008}\sqrt{3}dx=\sqrt{3}\frac{x^{2009}}{2009}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{2009}$.

185. a) $\int e^x dx=e^x+C$.

b) $\int_0^1 x\cdot e^x dx=\int_0^1 x\cdot\left(e^x\right)'dx=x\cdot e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big|_0^1=e-(e-1)=1$

c) $V=\pi\int_0^1(e^x+e^{-x})^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx=\pi\left(\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_0^1+2x\Big|_0^1\right)=$

$=\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^{-2}}{2}+2\right)$.

186. a) $\int f(x)=x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$.

b) Volumul este $\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=\pi\left(x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$.

c) Avem $f(x)=1-\sqrt{x}\le 1-x$, $(\forall)\,x\in[0,1]$.

Atunci $\int_0^1 f^{2008}(x)dx\le\int_0^1(1-x)^{2008}dx=\int_0^1 x^{2008}dx=\frac{x^{2009}}{2009}\Big|_0^1=\frac{1}{2009}$.

187. a) $\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 x+1dx=\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^1=\frac{3}{2}$.

b) Avem că aria suprafeţei este $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\sqrt{x+1}dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

c) Se observă uşor că $\sqrt{x^k+1}\le\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[0;1]$ de unde

$\int_0^1\sqrt{x^k+1}dx\le\int_0^1\sqrt{2}dx=\sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

188. a) Se calculează cu uşurinţă $\int e^x dx = e^x + C$, $x \in [0, 1]$.

b) Trebuie calculată integrala $\int_0^1 xe^x dx = (x-1)e^x\Big|_0^1 = (1-1)e^1 - (0-1)e^0 = 1$.

c) Pentru $0 \le x \le \frac{1}{2}$ observăm că $x \le 1-x$, deci $f(x) = e^x \le g(x) = e^{1-x}$, $(\forall)\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Conform proprietăţii de monotonie a integralei, $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx \ge \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$, adică

$\int_0^{\frac{1}{2}} [g(x) - f(x)]dx \ge 0$.

189. a) $\int f_2(x)dx = \int \left(x^2 + (1-x)^2\right)dx = \int (2x^2 - 2x + 1)dx = \frac{2x^3}{3} - x^2 + x + C$.

b) $A_{\Gamma_g} = \int_0^1 e^x f_2(x)dx = \int_0^1 (e^x)'(2x^2 - 2x + 1)dx = = e^x(2x^2 - 2x + 1)\Big|_0^1 - \int_0^1 (e^x)'(4x-2)dx =$

$= e^x(2x^2 - 2x + 1)\Big|_0^1 - \left[e^x(4x-2)\Big|_0^1 - 4\int_0^1 e^x dx\right] = 3e - 7$.

c) $\left.\begin{array}{rcl} 0 \le x \le 1 & \Rightarrow & x^{n+1} \le x^n \\ 0 \le 1-x \le 1 & \Rightarrow & (1-x)^{n+1} \le (1-x)^n \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sumând}} f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$.

Folosind monotonia integralei pe intervalul $[0, 1] \Rightarrow \int_0^1 f_n(x)dx \ge \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$ .q.e.d.

190. a) $\int f_1(x)dx = \int (2-x)dx = 2x - \frac{x^2}{2} + c$

b) $\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 (2-x)\cdot e^x dx$; $\begin{array}{ll} f = 2-x & f' = -1 \\ g' = e^x & g = e^x \end{array}$

$= (2-x)e^x\Big|_0^2 + \int_0^2 e^x dx = (2-x)e^x\Big|_0^2 + e^x\Big|_0^2 = -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3$.

c) $V = \pi\int_0^2 f_5^2(x) = \pi\int_0^2 (2-x)^{10} dx = \pi\int_0^2 (x-2)^{10} dx = \frac{\pi(x-2)^{11}}{11}\Big|_0^2 = \frac{2^{11}\pi}{11}$.

191. a) $\int f(x)dx = \int \left(x + \frac{2}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln x + C$.

b) $V = \pi\int_1^2 f^2(x)dx = \pi\int_1^2 x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}dx = \frac{25\pi}{3}$.

c) $\int_1^2 f(x)\ln x\,dx = \int_1^2 \left(x + \frac{2}{x}\right)\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + (\ln x)^2\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4} + (\ln 2)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

192.a) $\int(x+\sqrt{x})dx=\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

b) $f_1=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\pi\int_0^1\frac{x^2-1+1}{x+1}dx=\pi\int_0^1\frac{x^2-1}{x+1}dx+\pi\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=$

$=\pi\int_0^1(x-1)dx+\pi\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1^2}{2}-1+\ln(1+1)-\frac{0^2}{2}+0\right.$

$\left.-\ln(0+1)\right)=\pi(\ln 2-\frac{1}{2}).$

c) Din $\sqrt{x+1}\geq 1 \Rightarrow \frac{x^{2008}}{\sqrt{x+1}}\leq x^{2008} \Rightarrow \int_0^1\frac{x^{2008}}{\sqrt{x+1}}dx\leq\int_0^1 x^{2008}dx \Rightarrow \int_0^1\frac{x^{2008}}{\sqrt{x+1}}dx<$

$\frac{x^{2009}}{2009}\Big|_0^1=\frac{1}{2009}.$

193. a) $\int\left(\frac{1}{x}-3\sqrt{x}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx=\ln x-2x\sqrt{x}+C$

b) $f_2=\frac{x^2+x+2}{x+1}.$

$\int_0^1 f_2(x)dx=\int_0^1\frac{x^2+x+2}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+x}{x+1}dx+2\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\int_0^1 xdx+2\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}+$

$+2\ln(x+1)\Big|_0^1=\left(\frac{1^2}{2}+2\ln(1+1)-\frac{0^2}{2}-2\ln 1\right)=\left(\frac{1}{2}+2\ln 2\right).$

c) $f_{2008}=\frac{x^{2008}+x+2}{x+1};\ A=\int_0^1\frac{x^{2008}+x+1}{x+1}dx$

Din $0\leq x^{2008}\leq x \Rightarrow \frac{x+2}{x+1}\leq\frac{x^{2008}+x+2}{x+1}\leq\frac{x+x+2}{x+1},\forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow\int_0^1\frac{x+2}{x+1}dx\leq\int_0^1\frac{x^{2008}+x+2}{x+1}\leq\int_0^1\frac{x+x+2}{x+1}\Rightarrow\int_0^1 1+\frac{1}{x+1}dx\leq A\leq\int_0^1 2dx\Rightarrow$

$\left(x+\ln(x+1)\right)\Big|_0^1\leq A\leq(2x)\Big|_0^1\Rightarrow 1+\ln 2\leq A\leq 2\Rightarrow A\in[1+\ln 2;2].$

194. a) $\int f(x)dx=\int(1-x)dx=x-\frac{x^2}{2}+C$

b) $x\in[0,1]\Rightarrow 1-x\in[0,1]\Rightarrow\sqrt{1-x}\in[0,1]\Rightarrow g(x)\geq 0,\forall x\in[0,1]\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii

$$A=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x}dx \overset{\substack{1-x=t\\ -dx=dt\\ x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=0}}{=} -\int_1^0\sqrt{t}dt=\int_0^1\sqrt{t}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1==\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

$$\text{c) } \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)\ln x dx=\int_{\frac{1}{e}}^1(1-x)\ln x dx=\int_{\frac{1}{e}}^1\left(x-\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln x dx=\frac{2}{e}-\frac{3}{4e^2}-\frac{3}{4}.$$

195. a) $\int f(x)dx=\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\zeta=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\zeta.$

b) Deoarece $g(x)\geq 0,\ (\forall)\ x\in[0,1]$, atunci:

$$Aria=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}[\ln 2-\ln 1]=\frac{1}{2}\ln 2$$

c) Funcţia de sub semnul integrală estte integrabilă (deoarece este continuă)

$$V=\pi\int_0^1 h^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}\right)^2=\pi\int_0^1 xe^x dx \qquad \begin{matrix} f(x)=x & f'(x)=1\\ g'(x)=e^x & g(x)=e^x\end{matrix}$$

$$V=\pi\left[xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx\right]=\pi\left(e-e^x\Big|_0^1\right)=\pi(e-e+1)=\pi.\quad V=\pi.$$

196. a) $\int f'(x)dx=f(x)+\zeta=\ln x+\zeta.$

b) $A(\Gamma_f)=\int_1^e\ln x dx=x\ln x\Big|_1^e-x\Big|_1^e=e-(e-1)=1$

c) Tabelul de variaţie al funcţiei f(x)=lnx

x	1			e
$f'(x)$	+	+	+	+
$f(x)$	0	↑		1

Din tabel : $0\leq f(x)\leq 1$ de unde $0\leq e^x f(x)\leq e^x$ $(e^x>0)$ şi $0\leq\int_1^e f(x)\leq e^x\Big|_1^e=e^e-e.$

Prin urmare: $\int_1^e e^x f(x)\leq e^e-e.$

197. a) $\int_1^4 f_1(x)dx=\int_1^4\sqrt{5x}dx=\sqrt{5}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\sqrt{5}\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^4=\frac{14\sqrt{5}}{3}.$

b) $\int_1^4\frac{x+2}{f_2^2(x)}dx=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{2x+4}{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{(x^2+4x)'}{x^2+4x}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x\right)\Big|_1^4=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{32}{5}\right).$

c) $Vol(C_g)=\pi\int_1^4 g^2(x)dx=\pi\int_1^4\frac{1}{x(x+4)}dx=\frac{\pi}{4}\int_1^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx=$

Scanned with OKEN Scanner

$$=\frac{\pi}{4}(\ln x-\ln(x+4))\Big|_1^4=\frac{\pi}{4}\left[(\ln 4-\ln 1)-(\ln 8-\ln 5)\right]=\frac{\pi}{4}\ln\frac{5}{2}.$$

198. a) $\int (x+1)f(x)dx=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$

b) $A=\int_0^1|f(x)|\,dx=\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx=\int_0^1 x^2-x+1-\frac{1}{x+1}dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=$

$=\frac{5}{6}-\ln 2.$

c) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx$

$1\le(x+1)^2\le 4<=>\frac{1}{4}\le\frac{1}{(x+1)^2}\le 1<=>\frac{x^6}{4}\le\frac{x^6}{(x+1)^2}\le x^6 => \frac{x^6}{4}\le f^2(x)\le x^6$

Cum $\int_0^1\frac{x^6}{4}dx=\frac{1}{28}x^7\Big|_0^1=\frac{1}{28}$ şi $\int_0^1 x^6dx=\frac{1}{7}x^7\Big|_0^1=\frac{1}{7}$ avem că $\frac{\pi}{28}\le V\le\frac{\pi}{7}$.

199. a) $\int f_0(x)\cdot e^{-x}dx=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C$

b) $A=\int_0^1|f_2(x)|\,dx=\int_0^1(x^2+1)e^xdx=(x^2+1)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 2xe^xdx=(x^2+1-2x)e^x\Big|_0^1+\int_0^1 2e^xdx=$

$=(x^2+1-2x+2)e^x\Big|_0^1=2e-3$

c) Inegalitatea este echivalentă cu:

$\int_0^1(x^{2008}+1+x^{2010}+1-2x^{2009}-2)e^xdx=\int_0^1 x^{2008}(x-1)^2e^xdx\ge 0$ (A)

(pentru că funcţia de sub integrală este pozitivă pe [0, 1]).

Scanned with OKEN Scanner

TESTE MODEL PENTRU BACALAUREAT 2016

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_ştiinţele naturii*

Model

TESTUL 1

Filiera teoretică: profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Calculaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=2$ şi $a_2=1$.

2. Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $x^2-2x-m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x+\log_2(x-1)=\log_2 12$.

4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.

5. Calculaţi $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ştiind că $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ şi unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(0,1)$ şi $C(3,1)$. Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi suma elementelor matricei A.

b) Determinaţi numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(2n+1,n)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinaţi valorile numărului natural n, $n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu n^2-3..

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=x+ay+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Pentru $a=1$, calculaţi $2011 \circ 2012$.

b) Determinaţi numărul real a pentru care legea de compoziţie „ $\circ$ ” este asociativă.

c) Pentru $a=-1$ rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x \circ 2^x = 1$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctual de abscisă $x=1$.

c) Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+n)e^x$.

a) Calculaţi $\int\limits_0^1 f_1(x)dx$.

b) Arătaţi că funcţia f_{2011} este o primitivă a funcţiei f_{2012}.

c) Demonstraţi că $\int\limits_0^1 f_n(x)dx \geq \dfrac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n, folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

TESTUL 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(3x+2)^2=4$.

2. Determinaţi numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+3mx+1$ are abscisa egală cu $\dfrac{3}{2}$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x}=9$.

4. Calculaţi $5C_4^2-A_5^2$.

Scanned with OKEN Scanner

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,3)$ şi $B(2,5)$.
Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului (AB).

6. Calculaţi lungimea diagonalei BD a rombului $ABCD$ în care $AB=4$ şi $m(\sphericalangle ABC)=120^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & -1 & x \\ x & x & 2 \end{pmatrix}$ şi se notează determinantul ei cu $\Delta(x)$.

a) Calculaţi $\Delta(1)$.

b) Arătaţi că $\Delta(x)=6(x^2-1)$, pentru orice număr real x.

c) Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+b$.

a) Calculaţi $a+b$, ştiind că $f(1)=0$.

b) Pentru $a=-1$ şi $b=1$, determinaţi rădăcinile polinomului f.

c) Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $x_1=1$ şi $x_2=2$ sunt rădăcini ale polinomului f.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

a) Verificaţi dacă $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

c) Demonstraţi că $f(x)\geq-\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

a) Verificaţi dacă funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi $\int_1^e x\cdot f(x^2)dx$.

c) Determinaţi numărul real $a>1$, pentru care $\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 3

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-8x+1$. Să se determine valoarea minimă a funcţiei f.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(3x+4)=2$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\left\{\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},\ldots,\sqrt[3]{30}\right\}$, acesta să fie număr raţional.

5. Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât $\vec{u}\perp\vec{v}$.

6. Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,2^n), n\in\mathbb{N}$.

a) Să se verifice dacă punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

b) Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puţin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, n\in\mathbb{N}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x\circ y=xy+4x+4y+12$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $x\circ(-4)$.

c) Ştiind că operaţia „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $(-2013)\circ(-2012)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2012\circ 2013$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcţiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=xe^x$ şi $F(x)=(x-1)e^x$.

a) Să se verifice că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$ pentru orice $x>1$.

TESTUL 4

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$.

2. Fie funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x+1$ şi $g(x)=x+4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecţie ale graficelor funcţiilor f şi g.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x+2^{x+3}=36$.

4. Să se calculeze $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$.

5. În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u}+3\vec{v}$.

6. Ştiind că $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru fiecare $a\in\mathbb{R}$, se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ şi

sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\end{cases}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(a), a\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul dat poate fi rezolvat prin metoda Cramer.

c) Pentru $a=0$, să se rezolve sistemul.

2. Se consideră mulţimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde $A_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G,\cdot)$.

c) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{Z}\to G$, $f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(G,\cdot)$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=xe^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x)dx=2e-1$, unde f'' este derivata a doua a funcţiei f.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{f(x^2)}{x}dx$.

TESTUL 5

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+2$. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x)\le 0$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{2x-1}=3$.
4. Să se determine numărul funcţiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea $f(0)=f(1)=2$.
5. Se consideră punctele $A(0,2), B(1,-1)$ şi $C(3,4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.
6. Fie $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ cu $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$.

b) Să se verifice dacă $(A(x))^2=A\left((x+1)^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se determine inversa matricei $A(1)$.

2. Fie $G=\left\{a+b\sqrt{3}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},a^2-3b^2=1\right\}$.

a) Să se verifice dacă 0 şi 1 aparţin mulţimii G.

b) Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in G$ avem $x\cdot y\in G$.

c) Să se arate că dacă $x\in G$, atunci $\frac{1}{x}\in G$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=-\frac{x}{e^x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x)\le 1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$ şi $g(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se calculeze $\int f(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$.

TESTUL 6

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $(2+i)^3+(2-i)^3$.
2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreapta de ecuaţie $y=2x+1$ şi parabola de ecuaţie $y=x^2+x+1$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7$.
4. Într-o clasă sunt 25 de elevi dintre care 13 sunt fete. Să se determine numărul de moduri în care se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.
5. În paralelogramul $ABCD$ se cunosc $AB=1$, $BC=2$ şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.
6. Să se rezolve ecuaţia $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde m este un parametru real şi A matricea sistemului.

a) Să se arate că pentru orice m număr real tripletul $(0,3,1)$ este soluţie a sistemului.

b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluţie unică.

c) Pentru $m \neq 3$, să se rezolve sistemul.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă $x \circ y = x+y+1$.

a) Să se calculeze $2012 \circ 2013$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x \circ x^2 \leq 3$.

c) Fie mulţimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \middle| n \geq 2 \text{ şi } C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = n+6 \right\}$. Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi crescătoare pe $[0, +\infty)$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq -1 \\ 2+x, & x > -1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x), x \in [0,2]$.

c) Să se calculeze $\int_{-2}^{0} xf(x)dx$.

TESTUL 7

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $2\overline{z} + z = 3 + 4i$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Să se determine axa de simetrie a graficului funcţiei f.

3. Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+1\right)^9$. Să se determine numărul termenilor iraţionali ai dezvoltării.
5. Fie $\overrightarrow{r_A}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{r_C}=3\vec{i}+2\vec{j}$ vectorii de poziţie ai vârfurilor triunghiului ABC. Să se determine vectorul de poziţie al centrului de greutate a triunghiului ABC.
6. Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ ştiind că $\operatorname{ctg} a=2$ şi $\operatorname{ctg} b=5$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2x-5y+4z=0\\-3x+y+z=-1\\2x-z=a\end{cases}$, $a\in\mathbb{Z}$ şi notăm cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.
b) Pentru $a=1$ să se rezolve sistemul.
c) Să se determine cea mai mică valoare a lui $a\in\mathbb{Z}$ pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere naturale.

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\star y=2xy-6x-6y+21$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x\star y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.
b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x\star 5^x=11$.
c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "$\star$".

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+3, x\le 1\\ \ln x, x>1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.
c) Să se determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(e^x\right)+f\left(e^{x^2}\right)+\cdots+f\left(e^{x^{2008}}\right)}{x^{2008}}$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2+2x$ şi $F(x)=e^x+\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.
b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
c) Să se calculeze aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 8

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$.
2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5-x$. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.
3. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+1$ este injectivă.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n<n!$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(m^2;m)$ şi dreapta de ecuaţie $d:x+y+m=0$. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care punctul A se află pe dreapta d.
6. Să se calculeze aria triunghiului MNP dacă $MN=NP=6$ şi $m(\sphericalangle MNP)=120^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-3x+2=0$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

b) Să se arate că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Fie polinoamele $f=X^3+aX^2+X+\hat{1}$ şi $g=X+\hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

c) Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuaţia $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe $(0,\infty)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{x^n+9}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $\int (x+9)^2 \cdot f_1(x)dx$, unde $x \in [0,1]$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x f_2(x)dx$.

c) Să se arate că aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_{2012}, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$ este un număr din intervalul $\left[\frac{1}{10},\frac{1}{9}\right]$.

TESTUL 9

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=3$ şi $a_3=7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(7)$.
3. Să se rezolve ecuaţia $2^{2x^2+3x-2}=8$.
4. Să se calculeze numărul submulţimilor cu 3 elemente ale unei mulţimi cu 5 elemente.
5. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB, ştiind că $A(5,-4)$ şi $B(-3,6)$.
6. Să se calculeze $\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 160^\circ+\cos 170^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2+A, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se arate că $A^n=\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, unde $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

c) Să se determine matricea $B=A+A^2+\cdots+A^{2013}$.

2. Se consideră polinoamele $f=(X+1)^{2013}+(X-1)^{2013}$ şi $g=X+1$. Polinomul f are forma algebrică $f=a_{2013}X^{2013}+a_{2012}X^{2012}+\cdots+a_1X+a_0$, cu $a_0,a_1,\ldots,a_{2013}\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a_0.

b) Să se calculeze restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ şi crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

c) Să se determine numărul real $a\in(1,e^2)$ astfel încât aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox, dreptele de ecuaţii $x=a$ şi $x=e^2$ să fie egală cu $\ln\dfrac{3}{2}$.

TESTUL 10

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Fie z o rădăcină a ecuaţiei $z^2+2z+4=0$. Să se calculeze modulul numărului complex z.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3-2x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(6)$.

3. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{5-x^2}=2$.

4. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4\}$. Să se determine câte numere formate din 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii A.

5. Se consideră punctele $M(1,2), N(2,5)$ şi $P(3,m)$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=5$.

6. Să se determine cel mai mare element al mulţimii $\{\cos 1,\cos 2,\cos 3\}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se verifice că $AB-2B=O_2$.

c) Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $AXB=O_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3-X-1$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

a) Să se determine a ştiind că $x=1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Pentru $a=1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f_0(x)=e^{-x}-1$ şi $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $f_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcţiei f_0.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)+x-1}{x^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x$.

a) Să se calculeze $\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{\ln x}{x}\right)dx$.

b) Să se verifice că $\int_1^e f(x)\,dx=\dfrac{e^2}{2}$.

c) Să se determine raţia progresiei aritmetice având termenul general

$$I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-x)dx, n\geq 1.$$

TESTUL 11

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se arate că numărul $\dfrac{1+3i}{1-3i}+\dfrac{1-3i}{1+3i}$ este real.
2. Să se rezolve ecuaţia $\cos 2x=\dfrac{1}{2}, x\in\mathbb{R}$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\lg x+\lg(9-2x)=1$.
4. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,4,5\}$ şi M mulţimea funcţiilor f definite pe A cu valori în A. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcţie din mulţimea M, aceasta să fie bijectivă.
5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că dreptele de ecuaţii $x+y=1$ şi $3x-ay=2$, sunt paralele.
6. Să se arate că $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=(1+2\cos 2x)\cdot\sin 3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x-ay-z=0\\x+4y-2z=16\\x-2y+2z=-6\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului

$$A=\begin{pmatrix}1&-a&-1\\1&4&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

b) Să se calculeze A^2, unde $A^2 = A \cdot A$.

c) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$.

2. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2013^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax - 6, x < 4 \\ \sqrt{x}, x \geq 4 \end{cases}$, unde a este parametru real.

a) Să se determine valoarea reală a lui a, astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0 = 4$.

b) Să se calculeze $f'(9)$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(9,3)$.

2. Se consideră funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = m^2x^2 + mx + 1$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Să se demonstreze că primitivele funcţiilor f_m sunt funcţii crescătoare, pentru orice $m \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 (f_1(x) - x^2 - 1)e^x dx$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f_m, axa Ox şi dreptele $x = 0$, $x = 1$ are valoare minimă.

TESTUL 12

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se consideră progresia aritmetică de raţie 2 cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Să se arate că funcţia $f \circ g$ este descrescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$.
4. Câţi termeni ai dezvoltării $(1+2)^7$ sunt divizibili cu 14 ?
5. Se consideră triunghiul ABC şi punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A}=3\overrightarrow{BC'}$. Să se arate că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.
6. Să se calculeze $\cos^2 x$, ştiind că $\operatorname{tg} x=4$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.
b) Să se calculeze A^2 ştiind că $A^2=A\cdot A$.
c) Să se calculeze inversa matricei I_3+A.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+1$, $m\in\mathbb{R}$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Se defineşte $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se determine numărul real m astfel încât $x_1=2$.
b) Să se arate că $S_3+S_2+mS_1+3=0$.
c) Să se arate că pentru orice număr par $m\in\mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raţionale.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcţiei f.
c) Să se demonstreze că $f(x)+f(x^3)\geq -2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+5, & x<-1\\ 3x^2+1, & x\geq -1\end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcţia f admite primitive.
b) Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$.
c) Să se determine valoarea minimă a ariei suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=m$ şi $x=m+1$ cu $m>-1$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 13

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Calculaţi produsul numerelor complexe $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{20}$.

2. Să se arate ca vârful parabolei asociat funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$ se găseşte pe dreapta de ecuaţie $9x-2y=0$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\ln(e^x-1)+\ln(e^x+1)=1$.

4. Să se arate că n^3+5n se divide cu 6, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5. Calculaţi $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ştiind că $|\vec{u}|=2, |\vec{v}|=4$ şi unghiul vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este de 120^0.

6. Calculati $tg\frac{a}{2}$ daca $a\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ si $\cos a=-\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $M=\{X(a)/a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2-a\cdot A\}$.

a) Calculaţi A^2-A.

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)$.

c) Să se calculeze $X^{2013}(1)$.

2. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compozitie „ * ” prin $x*y=\log_{2013}(2013^x+2013^y)$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

a) Arătaţi ca legea „ * ” este asociativă.

b) Demonstraţi că $2013+(y*z)=(2013+y)*(2013+z)$, oricare ar fi $y,z\in\mathbb{R}$.

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x*x*x=\log_{2013}6039$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie functia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Stabiliţi ecuatiile asimptotelor funcţiei f.

c) Arătaţi că $0<f(x)\le\frac{1}{e}, \forall x\in(e;+\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f_n(x)=3x^2+2nx+n$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Determinaţi multimea primtivelor funcţiei f_1.

b) Calculaţi aria suprafetei cuprinse între graficul functiei f_1, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$

Scanned with OKEN Scanner

c) Calculaţi $\int_1^2 \frac{f_{2013}(x)-2013}{x}\cdot e^x dx.$

TESTUL 14

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se afle partea reală a numărului complex $z=(1-i\sqrt{2})^2$.
2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât soluţile ecuaţiei $x^2-(m+1)x+2m=0$ să verifice relaţia $3(x_1^2+x_2^2)=x_1\cdot x_2-2$.
3. Rezolvaţi ecuaţia $2^{x+1}=3^{2x+2}$.
4. Să se afle termenul dezvoltarii binomului $\left(\sqrt{a}+\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^{150}$, $a>0$ care nu conţine pe a.
5. Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j},\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinaţi numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2^{-1}}$.
6. Ştiind că $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ si $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, calculaţi $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Considerăm sistemul: $\begin{cases}3x-y-z=0\\x+y+mz=5\\2x-z=1\end{cases}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&1&m\\2&0&-1\end{pmatrix}$ cu $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine m ştiind că suma pătratelor elementelor matricei A este 54.
b) Să se determine m astfel încât matricea A este inversabilă.
c) Să se rezolve sistemul pentru care $m=0$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+3X^2-2X+m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi m ştiind că restul împărţirii polinomului f la polinomul $X-1$ este 2015.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este un număr natural oricare ar fi m real.

c) Determinaţi m astfel încât $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=\dfrac{1}{x_1x_2x_3}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x-1}, a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=16$.

c) Pentru $a=2$ determinaţi ecuaţia asimptotei către $+\infty$ a graficului functiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-2x+a, x<0\\ e^x+x+2, x\geq 0\end{cases}, a\in\mathbb{R}$

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$ este $e+\dfrac{7}{2}$.

c) Pentru $a=3$ să se demonstreze că $2\int_0^1 xf(x^2)dx=2+\int_0^1 f(x)dx$.

TESTUL 15

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Determinaţi numerele întregi x care verifică relaţia $-1\leq\dfrac{x+1}{3}<1$.

2. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2x+3$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2-\sqrt{2-x}=x$.

4. Calculaţi $\frac{P_5}{C_5^2+A_6^2}$.

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$. Scrieţi ecuaţia dreptei AB.

6. Calculaţi perimetrul triunghiului MNP ştiind că $MN=2$, $MP=3$ şi $m(\sphericalangle NMP)=120^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi determinantul matricei A.

b) Calculaţi A^2-2A+I_2.

c) Determinaţi matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2=A$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-3x-3y+12$.

a) Demonstraţi că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=19$.

c) Ştiind că legea „$*$” este asociativă, calculaţi $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{2011}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

a) Demonstraţi că $f'(x)-f(x)=x-1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$.

a) Calculaţi $\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

b) Calculaţi aria suprafeţei determinate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=2$.

c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 16

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 9 iunie 2010.
Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic-toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Calculaţi $\sqrt[3]{8}+\log_2\frac{1}{4}$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+m$. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care minimul funcţiei f este egal cu 2.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{6-x^2}=25$.
4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $A_x^2=12$.
5. Scrieţi ecuaţia dreptei determinate de punctele $A(2,3)$ şi $B(4,5)$.
6. Calculaţi $\cos x$, ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.
   a) Calculaţi A^2+A.
   b) Demonstraţi că $\det(A)=\det(A+I_2)$.
   c) Calculaţi $A+A^2+A^3+\ldots+A^{10}$.
2. Se consideră ecuaţia $x^3+2x^2+4=0$ cu soluţiile x_1,x_2,x_3.
   a) Demonstraţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$.
   b) Calculaţi $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.
   c) Calculaţi valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & 1:x_2 & 1:x_3\\ x_2 & 1:x_3 & 1:x_1\\ x_3 & 1:x_1 & 1:x_2\end{vmatrix}$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.
   a) Calculaţi $f'(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre ∞ la graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $-\frac{3}{5} \le f(x) \le 0$, oricare ar fi $x \in [1,2]$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1+\sqrt{x}$.

a) Calculaţi $\int_0^{2010} \left(f(x) - \sqrt{x}\right) dx$.

b) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotirea, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 1$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $\sqrt{x} \le x$, adevărată pentru orice $x \in [1,\infty)$, demonstraţi că $\int_1^2 f^{2010}(x)dx \le \frac{3^{2011} - 2^{2011}}{2011}$.

TESTUL 17

Bacalaureat, 30 iunie 2010.
Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic-toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Calculaţi $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$.

2. Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2 - 3^{x^2-1} = 1$.

4. Determinaţi câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4\}$.

5. Se consideră vectorii $\vec{v_1} = 2\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v_2} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Determinaţi coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2}$.

6. Un triunghi dreptunghic are catetele $AB = 3$, $AC = 4$. Determinaţi lungimea înălţimii duse din A.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $A^2 - A$.

b) Determinaţi inversa matricei A.

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezolvaţi ecuaţia $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + X$, $g = X^2 + \hat{2}X + a$, cu $a \in \mathbb{Z}_3$.

a) Calculaţi $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

b) Determinaţi rădăcinile polinomului f.

c) Demonstraţi că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2})$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Demonstraţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[-2, 0]$.

c) Demonstraţi că $0 \le f(x) + f(x^2) \le \frac{e^2 + 1}{e}$, oricare ar fi $x \in [-1, 0]$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Calculaţi $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$.

b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

c) Calculaţi $\int_1^e f(x) \cdot \ln x dx$.

TESTUL 18

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru proba din 30 iunie 2010.
Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic-toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n \ge 1}$, astfel încât $a_3 = 5$ şi $a_5 = 11$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.

2. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + 3$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.

Scanned with OKEN Scanner

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

4. Calculaţi $a\cdot b$, ştiind că $a+b=150$ şi numărul a reprezintă 25% din numărul b.

5. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ şi $C(m+1,m^2)$ sunt coliniare.

6. Calculaţi $\cos x$, ştiind că $\sin x=\frac{1}{3}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} mx+y=-1\\ x+y+z=3\\ x+y+mz=0\end{cases}$$ unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi determinantul matricei A.

b) Rezolvaţi sistemul pentru $m=0$.

c) Verificaţi dacă sistemul este incompatibil pentru $m=1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x*y=(x-4)(y-4)+4$.

a) Demonstraţi că legea „$*$" este asociativă.

b) Demonstraţi că $x*y\in(4,+\infty)$, oricare ar fi $x,y\in(4,+\infty)$.

c) Calculaţi $1*2*3*...*2010$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(2,5)$.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ şi $g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$.

a) Demonstraţi că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi $\int_1^4 f(x)dx$.

c) Calculaţi $\int_1^{e^2} 2^{g(x)}f(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 19

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Ordonaţi crescător numerele $a=-\sqrt[3]{64}$, $b=\log_2\frac{1}{32}$ şi $c=C_2^1-A_5^1$.

2. Determinaţi valorile parametrului real m ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ se află situată deasupra axei Ox.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3\left(\sqrt{2x^2+x-1}\right)=1$.

4. Determinaţi al zecelea termen al progresiei aritmetice definită prin: $2, n, 3n-8, \ldots$.

5. Determinaţi coordonatele simetricului punctului $A(-3;2)$ faţă de mijlocul segmentului determinat de punctele $B(1;-4)$ şi $C(-3;2)$.

6. Să se arate că $\sin 40^\circ\cdot\sin 140^\circ=\cos^2 130^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră mulţimea M a tuturor matricelor pătratice de ordinul 2 având elemente numere reale şi care au proprietatea că suma elementelor aflate pe fiecare linie, respectiv coloană este egală cu 1.

a) Să se arate că dacă $A\in M$ atunci $A\cdot A^t\in M$, unde A^t este transpusa matricei A.

b) Să se arate că dacă $A\in M$ şi $\det A=1$ atunci $A=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Să se determine matricele din mulţimea M care îşi au inversele tot în M.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2aX^2+2\left(a^2-2\right)X-1\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că 1 este rădăcină a polinomului f

b) Să se arate că expresia $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}$ nu depinde de a.

c) Să se determine $a\in\mathbb{N}$ şi să se rezolve ecuaţia $f(x)=0$, ştiind că f admite o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\in(0;1)\\ 1+\ln x, & x\geq 1\end{cases}$.

a) Studiaţi continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$.

b) Arătaţi că $f(x)\geq\frac{3}{4}$, oricare ar fi $x>0$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f\left(e^x\right)-1}{x}$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0;\infty)\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x-\ln x$ şi $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$, oricare ar fi $x>0$.

a) Arătaţi că $\int g(x)\,dx=f(x)+C$.

b) Determinaţi aria suprafeţei mărginite de graficul funcţiei $h:[1,2]\to\mathbb{R}$, $h(x)=x\cdot f\left(e^x\right)$, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=2$.

c) Demonstraţi că $\int_1^e f^{2010}(x)\cdot g(x)\,dx=\dfrac{(e-1)^{2011}-1}{2011}$.

TESTUL 20

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Determinaţi o ecuaţie de gradul doi, ale cărei soluţii x_1, x_2 verifică sistemul $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=13 \\ x_1+x_2=5 \end{cases}$.

2. Determinaţi al zecelea termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_4+a_{16}=20$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{2x+1}+x=7$.

4. Determinaţi numărul elementelor unei mulţimi ştiind că numărul submulţimilor ei cu cel mult două elemente este egal cu 22.

5. În triunghiul ABC se cunosc: $AB=4$, $AC=3$ şi $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$. Determinaţi $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

6. Calculaţi $\sin^2 110^\circ+\sin^2 20^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi submulţimea $M=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\,\middle|\,X\cdot X'=X'\cdot X\right\}$, unde X' este transpusa matricei X.

a) Verificaţi dacă $I_2\in M$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Arătaţi că dacă $X\in M$ atunci elementele aflate pe una din diagonale sunt egale.

c) Determinaţi matricele $X\in M$ pentru care $X^2=I_2$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+4(x+y+3),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Verificaţi că $e=-3$ este elementul neutru al legii de compoziţie $*$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătaţi că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * a = a * x = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) Determinaţi elementele simetrizabile ale mulţimii $M = \mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziţie $*$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = (x+1)^2 e^x$.

a) Verificaţi că $f'(x) = (x+1)(x+3)e^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $f(-2) + f(-4) \leq \frac{8}{e^3}$.

c) Demonstraţi că funcţia f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \int_1^x \frac{t^x - 1}{t+1} dt$, oricare ar fi $x \geq 1$.

a) Verificaţi că $f(2) = \frac{1}{2}$.

b) Demonstraţi că funcţia f este crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.

c) Utilizând eventual faptul că $(1+a)^n \geq 1 + na$, pentru orice $a > -1$ şi $n > 1$, demonstraţi că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

TESTUL 21

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Arătaţi că numerele $a = C_5^2 - C_4^2$, $b = \log_2 64$ şi $c = \sqrt[3]{2^9}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Demonstraţi că pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ parabola asociată funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (a-1)x - a$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.

3. Determinaţi numărul tuturor numerelor formate din trei cifre distincte, divizibile cu 10, care se pot forma cu elemente ale mulţimii $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

4. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\frac{2^x}{27} = \frac{3^{x-1}}{4}$.

5. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $A(-2,1)$ şi este paralelă cu dreapta determinată de punctele $B(0,5)$ şi $C(3,-4)$.

6. Determinaţi măsura unghiului A a triunghiului ABC în care $AB = 4$, $AC = 3$ şi $BC = \sqrt{13}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & 2a-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că matricea A este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

b) Verificaţi că $A+A^{-1}=(a+2)I_2$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

c) Demonstraţi că soluţia sistemului $\begin{cases} ax+(2a-1)y=-1 \\ x+2y=0 \end{cases}$ nu depinde de a.

2. Pe mulţimea $M=(-2,2)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{4(x+y)}{xy+4}$, pentru orice $x,y\in M$. Admitem că $(M,*)$ este grup comutativ, având elementul neutru $e=0$.

a) Determinaţi $x\in M$ astfel încât $(x^2-2)*1=0$.

b) Calculaţi $\left(-\dfrac{1}{2009}\right)*\left(-\dfrac{1}{2008}\right)*\ldots*\left(-\dfrac{1}{1}\right)*\left(\dfrac{1}{1}\right)*\left(\dfrac{1}{2}\right)*\ldots*\dfrac{1}{2009}*\dfrac{1}{2010}$.

c) Arătaţi că funcţia $f:(-2,2)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$ este morfism între grupurile $(M,*)$ şi $((0,\infty),\cdot)$

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x^{2010}+2010^x+2010x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

a) Studiaţi existenţa asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x<1 \\ \ln x, & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Arătaţi că orice primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f este crescătoare pe intervalul $(-\infty,1)$.

b) Calculaţi $\int_0^e f(x)\,dx$.

c) Determinaţi $a>0$ astfel încât $\int_0^a f(e^x)\,dx=4-a$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 22

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Demonstraţi că pentru orice $x>0$, expresiile $\log_2 x$, $\log_2(x+1)$ şi $\log_2(x+2)$ nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Arătaţi că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2-2mx+2m^2-1=0$ verifică relaţia $x_1^2+x_2^2=2$, oricare ar fi $m\in(-1,1)$.

3. Calculaţi $\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\ldots+\log_2\frac{7}{8}$.

4. Pe dreptele paralele d_1 şi d_2 se consideră punctele $A_1, A_2, \ldots, A_6\in d_1$ şi $B_1, B_2, \ldots, B_5\in d_2$. Determinaţi numărul triunghiurilor care se pot forma unind punctele date pe cele două drepte.

5. Determinaţi valorile $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=5$, unde $\vec{u}=a\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+(a+1)\vec{j}$.

6. Demonstraţi că un triunghi care are lungimile laturilor de 3, 4 şi 6 este obtuzunghic.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi submulţimea $G=\left\{M(a)\,\middle|\, M(a)=I_2+aA,\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Verificaţi dacă $\det M(a)=1$, pentru orice $M(a)\in G$.

b) Demonstraţi că inversa matricei $M(a)$ aparţine mulţimii G.

c) Calculaţi $M(-2010)\cdot M(-2009)\cdot\ldots\cdot M(0)\cdot M(1)\cdot\ldots\cdot M(2010)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+(3m+1)X^2+mX-4m-2\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ polinomul f are ca rădăcină pe 1.

b) Demonstraţi că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ avem $g\,|\,f$, unde $g=X^2+(3m+2)X+4m+2$.

c) Determinaţi $m>0$ şi rezolvaţi ecuaţia $f(x)=0$, ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=14$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x\ln(ex)$.

a) Verificaţi că $f'(x)=2+\ln x$, pentru orice $x>0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătaţi că dacă x_0 este punctul de minim al funcţiei, atunci $x_0 + f(x_0) = 0$.

c) Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{xf'(x)} = 1$.

2. Se consideră funcţiile $f, g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x(1+\ln x)$ şi $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} + 1$, $\forall x \in (0,\infty)$.

a) Verificaţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Calculaţi $\int_1^e \dfrac{g(x)}{f(x)}dx$.

c) Determinaţi volumul corpului de rotaţie al funcţiei $h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $h(x) = g(x)$.

TESTUL 23

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi inecuaţia $\dfrac{x^2-x-1}{x^2+1} < \dfrac{1}{2}$.

2. Calculaţi suma elementelor mulţimii $A = \{1,5,9,\ldots,101\}$.

3. Arătaţi că dacă $\log_2 3 = a$, atunci $\log_6 9 = \dfrac{2a}{a+1}$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr n din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_{n+1}^2 \le (n-1)^2$.

5. Aflaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $BC = \sqrt{3}$ şi $m(\angle B) = m(\angle C) = 30^\circ$.

6. Calculaţi $\sin 160^\circ + \cos 110^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră mulţimea $M = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, X^2 = I_2\right\}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $X^2 = X\cdot X$.

a) Verificaţi că $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M$.

b) Arătaţi că dacă $X \in M$, atunci $X^t \in M$, unde X^t este transpusa matricei X.

c) Demonstraţi că pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, matricea $X - X^t$ nu aparţine mulţimii M.

2. Se consideră $a > 0$ şi polinomul $f = X^3 - aX \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile reale

Scanned with OKEN Scanner

x_1, x_2, x_3.

a) Determinaţi $a>0$ ştiind că $(X+1)\,|\,f$.

b) Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, oricare ar fi $a>0$.

c) Determinaţi $a\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(a)=4$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, oricare ar fi $x>0$.

a) Verificaţi că $f'(x)=\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$, oricare ar fi $x>0$.

b) Arătaţi că $2009\sqrt{2011}\le 2010\sqrt{2010}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x^{2010}\right)+x^{2010}+f\left(\dfrac{1}{x^{2010}}\right)}{x^{2010}}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}x^2+x-2, & x<1\\ (x+1)\ln x, & x\ge 1\end{cases}$.

a) Arătaţi că funcţia f admite primitive.

b) Verificaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=-\dfrac{7}{6}$.

c) Calculaţi aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(e^x\right)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

TESTUL 24

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Aflaţi $m\in\mathbb{Z}^*$ ştiind că parabola de ecuaţie $y=mx^2+mx+1$ este situată deasupra axei Ox.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2^2(2x)-\log_4 x=8$

3. Dacă mulţimea $A\cup B$ are 20 de elemente, A are 14 elemente, iar B are 12 elemente, determinaţi numărul elementelor mulţimii $B-A$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\left\{C_7^k\,\middle|\,k=0,1,2,\ldots,7\right\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

5. Aflaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(2,-3)$ şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $2x-y-5=0$.

6. Demonstraţi că $\sin 130^\circ\cdot\cos 140^\circ+\sin^2 50^\circ=0$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -9 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

$G=\left\{M(x)\,\middle|\, M(x)=xA+I_2, x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătaţi că toate elementele mulţimii G sunt matrice inversabile.

b) Demonstraţi că $M(x)\cdot M(y)=M(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Determinaţi inversa matricei $M(2010)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX+m+\hat{4}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Arătaţi că, oricare ar fi $m\in\mathbb{Z}_5$, $\hat{4}$ nu poate fi rădăcină a polinomului f.

b) Determinaţi $m\in\mathbb{Z}_5$ ştiind că $X+\hat{2}\,\big|\, f$.

c) Pentru $m=\hat{1}$ descompuneţi polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Z}_5[X]$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\left(x^2-x-1\right)\cdot e^x$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că pentru orice $a<1$ şi oricare $b>1$ are loc inegalitatea

$f(a)-f(b)<\dfrac{e^3+5}{e^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\ln x$.

a) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(0,\infty)$.

b) Calculaţi $\int_1^e f\left(x\cdot e^x\right)dx$.

c) Determinaţi volumul corpului de rotaţie al funcţiei $g:[1,e]\to\mathbb{R}$,

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

TESTUL 25

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5+11+17+\ldots+x=320$.

2. Determinaţi valorile parametrului real m ştiind că distanţa dintre punctele

Scanned with OKEN Scanner

de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx-m-1$ cu axa Ox este egală cu 6.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr de 3 cifre din mulţimea $\{1,2,3,4,5,6\}$ acesta să nu aibă cifrele distincte.

5. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Calculaţi modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

6. Arătaţi că $\sin 91^\circ+\sin 93^\circ+\ldots+\sin 179^\circ=\cos 1^\circ+\cos 3^\circ+\ldots+\cos 89^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a-b & b-c & c-a \\ c-a & a-b & b-c \\ b-c & c-a & a-b \end{pmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte două câte două.

a) Calculaţi $\det A$.

b) Arătaţi că suma elementelor matricei A^2 este egală cu 0.

c) Demonstraţi că orice minor de ordinul doi al matricei A este nenul.

2. Fie p un număr prim, $p\geq 2$ şi polinomul $f=X^3-(p-2)X-p+1$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi valoarea lui p ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este număr natural divizibil cu 4.

b) Aflaţi valoarea lui p ştiind că $X-p+1\,|\,f$.

c) Demonstraţi că polinomul f nu poate avea o rădăcină dublă întreagă.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln x$.

a) Studiaţi existenţa asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Demonstraţi că funcţia f' este crescătoare pe $(0;\infty)$.

c) Demonstraţi că $\ln(2010!)\leq 1005\cdot 2009$.

2. Se consideră numerele $I_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi I_1.

b) Arătaţi că $I_n+I_{n+1}=\frac{e^n-1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că $\frac{e^{2010}-1}{2010(e+1)}<I_{2010}<\frac{e^{2010}-1}{4020}$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 26

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Determinaţi soluţiile întregi ale inecuaţiei $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} \geq 0,25$.

2. Arătaţi că $\left\{\log_2 \frac{3}{2}\right\} = \left\{\log_2 \frac{3}{4}\right\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real a.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left|x^2 - x - 1\right| = 1$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând o submulţime de 3 elemente din mulţimea $\{0,1,2,\ldots,9\}$, aceasta să conţină numai numere prime.

5. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \| CD)$, de înălţime 4. Calculaţi $\left|\overline{AC} + \overline{BD}\right|$.

6. Calculaţi $\sin^2 130^\circ + \sin^2 140^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$M = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, X + X^t = 2I_2\right\}$.

a) Verificaţi dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2010 \\ -2010 & 1 \end{pmatrix}$ aparţine mulţimii M.

b) Determinaţi matricele $A, B \in M$ astfel încât $A \cdot B \in M$.

c) Pentru $A \in M$ rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\det(A + xI_2) = \det A - 1$.

2. Se consideră mulţimea $H = \left\{a^2 \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}_6\right\}$ şi polinomul

$f = \hat{3}X^2 + \hat{4} \in \mathbb{Z}_6[X]$.

a) Calculaţi suma elementelor mulţimii H.

b) Arătaţi că mulţimea $\left\{f(a) \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}_6\right\}$ este inclusă în mulţimea H.

c) Demonstraţi că polinomul f este reductibil în mulţimea $H[X]$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

b) Arătaţi că funcţia f are un singur punct de extrem.

Scanned with OKEN Scanner

c) Demonstraţi că $x^{2e}\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\geq 1$, oricare ar fi $x>0$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x}-\ln\sqrt{x}$ şi $g(x)=\frac{2-x}{2x^2}$.

a) Arătaţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Calculaţi $\int_1^e f^{2010}(x)\cdot g(x)dx$.

c) Determinaţi aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^x\cdot f\left(e^x\right)$, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

TESTUL 27

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Arătaţi că pentru orice $x\in(-1,1)$ expresia $E(x)=\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{1-2x+x^2}$ este constantă.

2. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(m+1)x+m+1$ să-şi aibă vârful pe dreapta de ecuaţie $x-y=0$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x+3^x=3^{x+1}-2^{x+1}$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un element n din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $\log_2 n+2^n<n!$.

5. Se consideră paralelogramul $ABCD$, în care $AB=4$, $BC=5$, iar $m(\angle DAB)=60^\circ$. Calculaţi $\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|$.

6. Demonstraţi că $\frac{(\sin 1^\circ-\cos 91^\circ)\cdot(\sin 2^\circ-\cos 92^\circ)}{\sin 1^\circ\cdot\sin 2^\circ}\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

a) Verificaţi că $A^2-5A-2I_2=O_2$.

b) Arătaţi că matricea $\frac{1}{2}(A-5I_2)$ este inversa matricei A.

c) Demonstraţi că ecuaţia $AX=XA$ are o infinitate de soluţii.

2. Se consideră mulţimea şi polinomul $f=X^3+aX^2-aX-1\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile reale x_1,x_2,x_3.

a) Arătaţi că polinomul f are o rădăcină independentă de a.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să aibă toate rădăcinile reale.

c) Aflaţi $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

b) Demonstraţi că derivata funcţiei f este crescătoare pe $(0,\infty)$.

c) Arătaţi că $2\ln x \le \frac{1}{x}-x$, oricare ar fi $x\in(0,1]$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ şi $g(x)=\frac{2+\sqrt{x}}{2x}$.

a) Arătaţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Calculaţi $\int_1^e \frac{g(x)}{f^{2010}(x)}dx$.

c) Demonstraţi că $\int_{2010}^{2011} g(f(x))\cdot g(x)dx = f(f(2011))-f(f(2010))$.

TESTUL 28

SUBIECTUL I (30 puncte) .

1. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$, $g(x)=4x+5$.

Demonstraţi că $g(f(x))\ge g(x)-g(1)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Determinaţi $x>0$ ştiind că numerele $\log_2 x$, $\log_2(x+1)$ şi $\log_2(x+3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^{x+2}+2^{-x+1}=9$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând o submulţime a mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$, aceasta să conţină numai elemente impare.

5. Demonstraţi că în hexagonul regulat $ABCDEF$ are loc relaţia $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

6. Demonstraţi că într-un triunghi oarecare ABC are loc egalitatea $AD=\frac{AB\cdot AC}{2R}$, unde D este piciorul înălţimii din A, iar R este raza cercului circumscris triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

$M=\left\{X \mid X=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & -1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{Z}^*\right\}$.

a) Verificaţi că $X^2=\left(a^2+1\right)I_2$, pentru orice $X\in M$.

b) Demonstraţi că dacă $A\in M$, atunci $A^{-1}\notin M$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

c) Determinaţi $A\in M$ şi $x, y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră mulţimea şi polinomul $f=X^3-mX+m-1\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile reale x_1, x_2, x_3.

a) Arătaţi că polinomul f are o rădăcină independentă de m.

b) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să aibă toate rădăcinile reale.

c) Demonstraţi că pentru orice $m\in\mathbb{Z}$ expresia $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ este divizibilă cu 3.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^{2010}}{2010}+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că derivata funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că tangentele duse la graficul funcţiei f în punctele de abscisă $x=1$ şi $x=-1$ sunt perpendiculare.

c) Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 2010}\frac{f'(x)-f'(2010)}{f(x)-f(2010)}=\frac{2009}{2010}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ \sqrt[3]{x} & x<0\end{cases}$.

a) Arătaţi că funcţia f admite primitive.

b) Calculaţi $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

c) Demonstraţi că $\int_{-2010}^{0} f\left(x^{2009}\right)dx\leq\int_{0}^{2010} f\left(x^{2010}\right)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 29

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ are soluţiile reale x_1 şi x_2, iar $b,a,c\in\mathbb{R}^*$ sunt, în această ordine, în progresie geometrică. Determinaţi valoarea expresiei $x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2010x+2009$. Arătaţi că $f(x)\geq f(1005), \forall x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2\left(4^x-2\right)=x$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un element n din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice relaţia $n+C_{n+1}^2<2^n$.

5. Determinaţi ecuaţia medianei din A a triunghiului ABC, ştiind că $A(3,-4), B(0,1)$ şi $C(4,-1)$.

6. Determinaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $\cos A=\frac{3}{5}$, iar raza cercului circumscris triunghiului este $R=10$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

$M=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,X^2+X=I_2\right\}$.

a) Verificaţi dacă matricea $X=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-3\end{pmatrix}$ aparţine mulţimii M.

b) Determinaţi matricele $A\in M$ pentru care $A^{-1}\in M$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

c) Demonstraţi că dacă $A\in M$ atunci $A^t\in M$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy+x+y,\ x,y\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $x*x\geq -1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $\left(\sqrt[3]{2010}-1\right)*\left(\sqrt[3]{2010}-1\right)*\left(\sqrt[3]{2010}-1\right)\in\mathbb{N}$.

c) Determinaţi elementele simetrizabile ale mulţimii $\mathbb{Z}$ în raport legea de compoziţie „$*$”.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\leq 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Demonstraţi că funcţia f este crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty,0)$, respectiv $(0,\infty)$.

c) Arătaţi că $f\left(e^x\right)\le f(x)$, pentru orice $x<0$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$, iar F este o primitivă a funcţiei f.

a) Calculaţi $\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx$.

b) Demonstraţi că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=\frac{2e-1}{2}$.

c) Dacă $F(0)=1$, determinaţi $\int_0^1 \frac{f(x)+f'(x)}{F(x)+f(x)}dx$.

TESTUL 30

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ sunt, în această ordine, în progresie geometrică, atunci ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ nu are soluţii reale.

2. Să se determine cea mai mică valoare a lui $a\in\mathbb{R}$, astfel încât funcţia $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(a+1)x-5$ să fie crescătoare.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2-x-1}+x=3$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând o submulţime a mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă un număr par de elemente.

5. Determinaţi ecuaţia perpendicularei dusă din centrul de greutate al triunghiului ABC pe latura BC, ştiind că $A(3,-4)$, $B(0,1)$ şi $C(6,-3)$.

6. Calculaţi $\left(\sin 1^\circ+\cos 179^\circ\right)\cdot\left(\sin 2^\circ+\cos 178^\circ\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sin 179^\circ+\cos 1^\circ\right)$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

$G=\left\{M(x,y)\,\middle|\,M(x,y)=xA+yI_2,\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Verificaţi că $\det M(x,2010)=2010^2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că dacă $M(x,y),M(z,t)\in G$, atunci $M(x,y)\cdot M(z,t)\in G$.

c) Determinaţi $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $M(x,y)\cdot M(y,x)=M(5,2)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

Scanned with OKEN Scanner

$x*y=xy+3x+3y+a$, $x,y,a\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $e=-2$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

b) Pentru $a=6$ demonstraţi că există $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*b=b*x=b$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie „$*$” este asociativă, calculaţi $\left(-\sqrt{1}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*\ldots*\left(-\sqrt{2010}\right)$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}x-e^x, & x\le 0\\ \sqrt{x}-1, & x>0\end{cases}$

a) Studiaţi continuitatea funcţiei f.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că funcţia f este crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty,0)$, respectiv $(0,\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+e^{-x}$ şi $g(x)=e^x-e^{-x}$.

a) Verificaţi că $\int_0^1 x\cdot e^x\cdot f(x)\,dx=\frac{e^2+3}{4}$.

b) Calculaţi $\int_0^1 \frac{g(x)}{f(x)}dx$.

c) Demonstraţi că $\int_a^b \left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=f(b)g(b)-f(a)g(a)$, pentru orice numere reale a şi b.

TESTUL 31

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Ordonaţi descrescător numerele $a=-\sqrt[3]{16\sqrt{\frac{1}{4}}}$, $b=-\log_4 9\cdot\log_3 2$ şi $c=C_3^1-A_3^2$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+ax+(a-4)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Să se determine a astfel încât $f(x)\le -4$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\frac{2^x}{3^{x-2}}=\frac{9^x}{4^{x-1}}$.

4. Determinaţi suma termenilor distincţi din şirul $C_{2010}^0, C_{2010}^1,\ldots,C_{2010}^{2010}$.

5. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin origine şi este paralelă cu

Scanned with OKEN Scanner

dreapta AB, unde $A(-1,4), B(2,-2)$.

6. Demonstraţi că $\sin^2 160^\circ + \sin^2 110^\circ = \cos^2 130^\circ + \cos^2 140^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2a & b+c \\ 2 & 2b & c+a \\ 2 & 2c & a+b \end{pmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte două câte două.

a) Verificaţi că $\det A = 0$.

b) Arătaţi că există matricele $B,C\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A=B+C$ şi $\det(B+C)=\det B+\det C$.

c) Demonstraţi că dacă $a+b+c=3$, atunci orice soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului $AX=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ verifică relaţia $x_0+y_0+z_0=\frac{1}{2}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X+a\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $X+1\,|\,f$.

b) Arătaţi că $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}=1$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}-\{2\}$.

c) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite o rădăcină dublă.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}(x-1)e^x, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$

a) Studiaţi continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $f(x)\ge -1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ şi $g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x(\ln x-1)$.

a) Verificaţi că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi $\int_{e^2}^{e^4}\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}dx$.

c) Determinaţi volumul corpului de rotaţie al funcţiei $h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 32

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Calculaţi suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice de termen general $a_n = 4n-1, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Determinaţi $a \in \mathbb{Z}$ ştiind că ecuaţia $x^2 - ax + a + 1 = 0$ are ca soluţii două numere întregi consecutive.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{2^x + 1} + 1 = 2^{x-1}$.

4. Determinaţi numărul elementelor mulţimii $\left\{C_{2010}^k \,\middle|\, k = 0,1,\ldots,2010\right\}$.

5. În triunghiul ABC înălţimea AD are lungimea egală cu 4, iar măsura unghiului dintre AD şi mediana AM este de 60°. Calculaţi $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

6. Demonstraţi că $\sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 87^\circ + \sin^2 89^\circ = \frac{45}{2}$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră numerele $a,b,c > 0$ şi matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ şi $M(a,b,c) = A \cdot A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

a) Calculaţi $\det M(1,2,3)$.

b) Determinaţi matricea X astfel încât $M(1,2,3) \cdot X = \begin{pmatrix} 39 \\ 36 \end{pmatrix}$.

c) Demonstraţi că dacă $M(a,b,c)$ nu este inversabilă, atunci $a = b = c$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = (x-2)(y-2)+2$, $x,y \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi mulţimea $M = \left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, x * a = a * x = a,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Arătaţi că ecuaţia $(x+2) * \left(\frac{2x+1}{x}\right) = 3$ admite o infinitate de soluţii.

c) Demonstraţi că pentru orice $x,y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ simetricul elementului $x * y$ în raport legea de compoziţie „$*$” este $\frac{2y-3}{y-2} * \frac{2x-3}{x-2}$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Demonstraţi că $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Demonstraţi că $x+1\le e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ \ln x+\dfrac{1}{x}, & x\ge 1 \end{cases}$.

a) Arătaţi că funcţia f admite primitive.

b) Verificaţi că $\int_0^1 f(e^x)\,dx=\dfrac{3e-2}{2e}$.

c) Determinaţi volumul corpului de rotaţie al funcţiei $g:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

TESTUL 33

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Arătaţi că $\{\log_6 12\}=\{\log_6 2\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

2. Calculaţi $a+\dfrac{1}{a}$, ştiind că a este soluţie a ecuaţiei $2010x^2-2\cdot 2011x+2010=0$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{9^x}=0,(6)\cdot\sqrt[3]{8^x}$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând o submulţime de 4 elemente a mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, acesta să conţină exact 2 numere pare.

5. În triunghiul ABC punctele E,D şi M sunt mijloacele segmentelor AC, AB şi respectiv AD. Demonstraţi că $\overline{CB}+\overline{CA}=4\cdot\overline{EM}$.

6. Demonstraţi că $\sin 70^\circ\cdot\cos 20^\circ=\cos^2 160^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Arătaţi că $A^2\in M$, unde $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

b) Demonstraţi că $\det(X-I_2)=1+\det X$, pentru orice matrice $X\in M$.

c) Determinaţi matricele $X\in M$ pentru care $X^2=I_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+aX+6\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Demonstraţi că expresia $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}$ nu depinde de a.

b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-1$ este egal cu 4.

c) Aflaţi $a\in\mathbb{R}$ şi rădăcinile polinomului f ştiind că $x_1+x_2=x_3$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x-1}{\ln x}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

b) Demonstraţi că $xf'(x)=f(x)+\frac{1}{\ln^2 x}$, oricare ar fi $x\in(1,\infty)$.

c) Demonstraţi că $2009\cdot\ln 2011\le 2010\cdot\ln 2010$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ şi $F(x)=(ax+b)\sqrt{x}$.

a) Calculaţi $\int_1^2 f\left(x^{2010}\right)dx$.

b) Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei f.

c) Pentru $a=\frac{2}{3}$ şi $b=0$ demonstraţi că $\int_e^{e^2}\frac{f(\ln x)}{x}dx=F(2)-F(1)$.

TESTUL 34

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Determinaţi elementele mulţimii $A=\left\{n\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{1}{n^2-n-1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+(1-a)$ şi $g(x)=(1-b)x+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Arătaţi că dacă $f(2010)=g(2010)$, atunci funcţiile sunt egale.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3\left(3^x-6\right)=3-x$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr format din 3 cifre distincte ale mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, acesta să fie multiplu de 5.

5. Demonstraţi că dreptele $d_1:2x+3y-5=0$, $d_2:3x-2y-1=0$ şi $d_3:4x-7y+3=0$ sunt concurente.

6. Determinaţi lungimea laturii BC a triunghiului ascuţitunghic ABC în care $AC=4$, $AB=5$ şi $\sin A=\frac{4}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Verificaţi că $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$.

b) Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A+xB)=\det(B+xA)$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $BX=A$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+5(x+y)+a$, $x,y,a\in\mathbb{R}$.

a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(a-1)*(2a+1)=16$.

b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziţie „$*$” să fie asociativă.

c) Demonstraţi că dacă legea de compoziţie „$*$” admite element neutru, atunci $a=20$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}x^2-x+a, & x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to e} f'(x)$.

c) Demonstraţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(1,\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră funcţia $f_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^n$.

a) Determinaţi volumul corpului de rotaţie al funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f_2(x)$.

b) Calculaţi $\int_0^1 e^x\cdot f_2(x)\,dx$.

c) Demonstraţi că $\int_1^e f_n(x)\,dx=2\cdot\dfrac{2^{\frac{n+2}{2}}-1}{n+2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

TESTUL 35

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Determinaţi $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât ecuaţia $x^2-ax+b=0$ să aibă soluţiile $x_1=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ şi $x_2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

2. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţie $d:y=-3$ să fie tangentă

Scanned with OKEN Scanner

parabolei asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx-m$.

3. Demonstraţi că $4^{\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)}=3-2\sqrt{2}$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr format din 3 cifre distincte din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, produsul cifrelor sale să fie egal cu 8.

5. Aflaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul de intersecţie al dreptelor $d_1:2x+3y-5=0$ şi $d_2:4x-7y+3=0$ şi este paralelă cu dreapta $d_3:x+y+2=0$.

6. Comparaţi numerele $a=\left(\sin 2^\circ+\cos 2^\circ\right)^2$ şi $b=1-2\cos 88^\circ\cdot\cos 178^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Verificaţi că $A^{-1}=-A$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

b) Demonstraţi că $A^4=I_2$.

c) Arătaţi că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ are loc egalitatea $\det(A+xI_2)=\det(I_2-xA)$.

2. Fie $a\geq 1$ şi polinomul $f=X^3+aX^2-aX-1\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $X-1\mid f$, pentru orice $a\geq 1$.

b) Arătaţi că pentru orice $a\geq 1$ polinomul f are două rădăcini inverse una alteia.

c) Determinaţi $a\geq 1$ ştiind că polinomul f are o rădăcină dublă.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}(x-1)\cdot e^x, & x\leq 0\\ 3\cdot\sqrt[3]{x}-1, & x>0\end{cases}$.

a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Aflaţi semnul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $f(x)\geq -1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţiile derivabile $f,F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, unde F este o primitivă a funcţiei f astfel încât $F(0)=0$, $f(0)=f(1)=1$ şi $F(x)=x\cdot f(x)$, pentru orice $x>0$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=1$.

b) Demonstraţi că funcţia F este crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$ dacă şi numai dacă $F(x)\geq 0$, pentru orice $[0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Calculaţi $\int_0^1 F\left(x^{2010}\right)dx$

TESTUL 36

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Arătaţi că $A=B$, unde $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,x^2<1\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{1}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

2. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx-m-1$ să aparţină dreptei $d:x+y+3=0$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^{\sqrt{x}}=\frac{1}{4^{3-x}}$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând o submulţime a mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$, aceasta să aibă un număr impar de elemente.

5. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că vectorii $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{v}=\left(a^2-2\right)\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{w}=-5\vec{i}+(a-3)\vec{j}$ pot forma un triunghi.

6. Determinaţi aria unui triunghi dreptunghic în care înălţimea şi mediana care pleacă din unghiul drept au lungimile egale cu 3 şi respectiv 6.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2&0&3\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

a) Verificaţi că $(A+I_3)\left(A^2-A+I_3\right)=O_3$.

b) Demonstraţi că $A^{-1}=-A^2$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

c) Arătaţi că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ are loc egalitatea $\det\left(A+xI_3\right)=\det\left(I_3-xA^2\right)$.

2. Pe mulţimea numerelor se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-x-y+2$, $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Verificaţi că legea de compoziţie „$*$” admite element neutru.

b) Arătaţi că $x*\frac{1}{x'}=\frac{1}{x}$, unde x' este simetricul elementului $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

c) Determinaţi elementele simetrizabile ale mulţimii $\mathbb{Z}$ în raport legea de compoziţie „$*$”.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră $m>0$ şi funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln(mx)}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}} \dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{m}\right)}{x-\frac{1}{m}}$.

b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Rezolvaţi în intervalul $(0;\infty)$ inecuaţia $(mx)^e \geq e^{mx}$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln x$ şi $g(x)=\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$, $\forall x>0$.

a) Arătaţi că $\int g(x)dx=f(x)+C$.

b) Calculaţi $\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx$

c) Determinaţi volumul corpului de rotaţie al funcţiei $h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $h(x)=g(x)$.

TESTUL 37

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $m(x-m)=x-1$ să aibă două soluţii reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x-1$. Comparaţi numerele $f\left(\sqrt[3]{2010}\right)$ şi $f\left(\sqrt[3]{2011}\right)$.

3. Arătaţi că $\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3 4=\log_5 10-\log_5 2$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr $n\in\{1,2,\ldots,2010\}$ să avem $\log_2 n+\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$.

5. Calculaţi lungimea medianei $\overline{AM}$ în triunghiul ABC, în care $\overline{AB}(3,-5)$ şi $\overline{AC}=-\vec{i}+7\vec{j}$.

6. Determinaţi lungimea segmentului BC din triunghiul ABC, în care $\cos A=\dfrac{4}{5}$ şi $R=10$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi matricele $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b\\ c & b & 0\\ 0 & a & c\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că matricea A este inversabilă, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Verificaţi că matricea $B=\frac{1}{2abc}\left(A^2-(a+b+c)A+(ab+bc+ca)I_3\right)$ este inversa matricei A.

c) Arătaţi că sistemul $\begin{cases} ax+bz=a+b \\ by+cx=b+c \\ cz+ay=c+a \end{cases}$ are o unică soluţie, independentă de $a,b,c\in\mathbb{R}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3+aX^2+(a-14)X+6\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $X+3\,|\,f$.

b) Arătaţi că pentru orice $a\in\mathbb{R}$ are loc relaţia $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)=-9$.

c) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ şi rezolvaţi ecuaţia $f(x)=0$ ştiind că polinomul f are două rădăcini inverse.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x(2-\ln x)$, pentru orice $x>0$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

c) Demonstraţi că pentru orice $x>1$ are loc inegalitatea $e^x(2-x)\le e$.

2. Pentru fiecare $a>0$ se consideră funcţia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=ax+1$.

a) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $\mathbb{R}$.

b) Determinaţi $a>0$ astfel încât $\int_0^a f_1(x)\,dx=4$.

c) Demonstraţi că numerele $\int_{2010}^{2011} f_a(x)\,dx$, $\int_{2010}^{2011} f_{a+1}(x)\,dx$ şi $\int_{2010}^{2011} f_{a+2}(x)\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, oricare ar fi $a>0$.

TESTUL 38

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Determinaţi numărul tuturor numerelor de 5 cifre care încep şi se termină cu cifra 5.

2. Demonstraţi că $\log_2 5-\log_2 7+\log_2\frac{7}{5}$ este număr natural.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $(2x-1)^2\le 9$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Calculaţi $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2010)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+6$.

5. Determinaţi coordonatele simetricului punctului $A(2,-4)$ faţă de punctul $B(1,-2)$.

6. Calculaţi aria unui triunghi care are lungimile laturilor egale cu 5, 5 şi respectiv 8.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & x & 1\\ x & 1 & 1\end{vmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi $D(-1)$.

b) Demonstraţi că $D(x)=-(x-1)^2(x+2)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $D(x)=-4$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă: $x\circ y=2(x-2)(y-2)+2$, $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Verificaţi că legea de compoziţie „$\circ$” admite element neutru.

b) Determinaţi mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\circ 2=2\}$.

c) Calculaţi $(-2010)\circ(-2009)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2009\circ 2010$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$, pentru orice $x\geq 0$.

a) Aduceţi la forma cea mai simplă expresia $f(x)-2+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$, pentru $x\in[0,\infty)$.

b) Determinaţi asimptotele funcţiei f.

c) Calculaţi $f'(x)$, unde $x\geq 0$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ e^x+1, & x\geq 0\end{cases}$.

a) Arătaţi că funcţia f admite primitive.

b) Calculaţi $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

c) Demonstraţi că $\int_{0}^{1} x\cdot f(x^2)\,dx=\frac{e}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUŢII

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi notare

MODEL

TESTUL 1

Filiera teoretică: profilul real, specializările ştiinţe ale naturii.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_2 - a_1 = r \Rightarrow r = -1$ — 2p
   $a_3 = 0$ — 2p
   Finalizare: produsul este egal cu 0 — 1p
2. $\Delta = 4 + 4m < 0$ — 3p
   $m \in (-\infty, -1)$ — 2p
3. $x(x-1) = 12 \Rightarrow x = -3$ sau $x = 4$ — 3p
   $x = 4$ convine, $x = -3$ nu convine — 2p
4. $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ — 1p
   Numărul numerelor $\overline{abc}$ pentru care $a \cdot b \cdot c = 3$ este egal cu $3 \Rightarrow 3$ cazuri favorabile — 2p
   Numărul numerelor naturale de trei cifre este de $900 \Rightarrow 900$ cazuri posibile — 1p
   $p = \dfrac{1}{300}$ — 1p
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2}$ — 3p
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ — 2p
6. $B(0,1)$ şi $C(3,1) \Rightarrow BC \parallel Ox$, deci $x_H = x_A = 1$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC — 2p

Scanned with OKEN Scanner

$BH \perp AC \Rightarrow m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{y_H - 1}{1} \cdot \frac{-2}{2} = -1$ **2p**

$y_H = 2$ **1p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a) Suma elementelor matricei A este egală cu **3p**

$1+(2n+1)+n+1+(2n^2+1)+n^2+1=$ **2p**

$=3n^2+3n+5$

b) $\det A = n^2-n$ **2p**

Finalizare: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. **3p**

c) $A = \frac{1}{2}|\Delta|$ **1p**

$n^2+n-6=0 \Rightarrow n=2$ sau $n=-3$ **3p**

Finalizare: $n=2$ **1p**

2.a) $2011 \circ 2012 = 2011+2012+1=$ **3p**

$=4024$ **2p**

b) $(x \circ y) \circ z = x+ay+az+2$ pentru orice $x,y,z \in \mathbb{R}$ **2p**

$x \circ (y \circ z) = x+ay+a^2z+a+1$ pentru orice $x,y,z \in \mathbb{R}$ **2p**

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pentru orice $x,y,z \in \mathbb{R} \Rightarrow a=1$ **1p**

c) $2^x = t \Rightarrow t^2 - t = 0$ **2p**

Finalizare: $x=0$ **3p**

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$ **2p**

$f'(x) = (x+\ln x)' = 1+\frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$ **2p**

Finalizare **1p**

b) $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ **2p**

$f(1)=1, f'(1)=2$ **2p**

Ecuaţia tangentei este $y=2x-1$ **1p**

c) $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$ **2p**

$f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$ **2p**

Finalizare **1p**

2.a) $\int_0^1 f_1(x)dx = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$ **2p**

$= \left((x+1)e^x - e^x\right)\Big|_0^1 = e$ **3p**

Scanned with OKEN Scanner

b) f_{2011} derivabilă şi $f_{2011}'(x)=\left((x+2011)e^x\right)'=e^x+(x+2011)e^x=(x+2012)e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ — 3p

$f_{2011}'=f_{2012}$ — 2p

c) $(x+n)e^x\geq(x+n)(x+1)$, pentru orice $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ — 1p

$\int_0^1(x+n)e^x dx\geq\int_0^1(x+n)(x+1)dx$ — 1p

$\int_0^1(x+n)(x+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+(n+1)\frac{x^2}{2}+nx\right)\Big|_0^1=\frac{9n+5}{6}$ — 2p

Finalizare — 1p

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi notare

MODEL

TESTUL 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $9x^2+12x=0$ — 3p

$x=0$ sau $x=-\frac{4}{3}$ — 2p

2. $-\frac{b}{2a}=\frac{3m}{2}$ — 2p

$\frac{3m}{2}=\frac{3}{2}$ — 2p

$m=1$ — 1p

3. $3^{2x}=3^2$ — 2p

$2x = 2 \Rightarrow x = 1$ 3p

4. $C_4^2 = 6$ 2p

$A_5^2 = 20$ 2p

$5C_4^2 - A_5^2 = 10$ 1p

5. C mijlocul lui $(AB) \Rightarrow x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$ 1p

$x_C = -2$ 2p

$y_C = 4$ 2p

6. $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$ 2p

ΔABD este echilateral 1p

$BD = 4$ 2p

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a) $\Delta(1) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2p

$\Delta(1) = 0$ 3p

b) $\Delta(x) = 2 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 + x^2 + x^2 - 8$ 3p

Finalizare. 2p

c) $\Delta(0) = -6$ 2p

$(A(0))^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2p

2.a) $f(1) = 1^3 - 1^2 + a \cdot 1 + b$ 3p

$a + b = 0$ 2p

b) $f = X^3 - X^2 - X + 1 \Rightarrow f = (X-1)^2(X+1)$ 3p

Finalizare: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$ 2p

c) $f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$ 1p

$f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = -4$ 2p

Finalizare: $a = -4, b = 4$ 2p

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$ 3p

Finalizare 2p

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ 2p

Scanned with OKEN Scanner

$f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ **3p**

c) $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \Rightarrow f$ descrescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ **3p**

Din tabelul de variaţie al funcţiei obţinem $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$ **2p**

2.a) $F'(x) = \left(x - \frac{1}{x} + \ln x\right)' = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ **3p**

F este derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi $F' = f$ **2p**

b) $\int_1^e x \cdot f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^e f(x^2) \cdot 2xdx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} f(t)dt =$ **3p**

$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t} + \ln t\right)\Big|_1^{e^2} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2} + 2\right)$ **2p**

c) $\int_1^e \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx = \left(x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^a = a - \frac{1}{a}$ **2p**

$a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2$ sau $a = -\frac{1}{2}$ **2p**

Finalizare: $a = 2$ **1p**

TESTUL 3

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1-2i-1}{2} = -i$; $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{24} = \left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{12} = (-i)^{12} = 1$.

2. Valoarea minimă a funcţiei este $f_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow f_{\min} = -3$.

3. Condiţia de existenţă: $3x + 4 > 0$. Atunci $x \in \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$. Ecuaţia devine $3x + 4 = 25$, de unde se obţine $x = 7 \in \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

4. În mulţimea A={1, 2,.....30} există 3 cuburi perfecte, astfel extrăgând radical de ordinul 3 din celelalte, vom obţine numai numere iraţionale, deci avem $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ probabilitate ca numărul să fie raţional.

5. $\bar{u}\perp\bar{v}\Leftrightarrow\bar{u}\cdot\bar{v}=0\Leftrightarrow m(m-2)-3=0$ şi $m\in\{-1,3\}$. Cum $m>0$, convine $m=3$.

6. Vom avea $\cos\frac{23\pi}{12}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Avem $O(0,0)$, $A_1(1,2)$, $A_2(2,4)$. Din faptul că $\begin{vmatrix}0&0&1\\1&2&1\\2&4&1\end{vmatrix}=0$

avem că punctele $O(0,0)$, $A_1(1,2)$, $A_2(2,4)$ sunt coliniare.

b) Reprezentând punctele într-un sistem ortogonal de axe, observăm că dreptele obţinute sunt A_1A_2, OA_0, A_0A_1, A_0A_2 adică 4 drepte.

c) Calculăm determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}n&2^n&1\\n+1&2^{n+1}&1\\n+2&2^{n+2}&1\end{vmatrix}=2^n$

Atunci aria triunghiului este egală cu 2^{n-1}

2.

a) $x\circ y=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$.

b) Din relaţia de mai sus rezultă că $x\circ(-4)=(x+4)(-4+4)-4=-4=(-4)\circ x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Cum $x\circ(-4)=(-4)\circ x=-4$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că

$(-2013)\circ(-2012)\circ\ldots\circ(-1)\circ0\circ1\circ\ldots\circ2012\circ2013=$

$=\left[(-2013)\circ(-2012)\circ\ldots\circ(-5)\right]\circ(-4)\circ\left[(-3)\circ(-2)\circ(-1)\circ0\circ1\circ\ldots\circ2012\circ2013\right]=-4$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

b) Rădăcinile derivatei sunt $x=-2$ şi $x=0$. Derivata este negativă între $[-2;0]$ şi pozitivă în rest. Aşadar funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty;-2]$ şi pe $[0;\infty)$ şi strict descrescătoare pe $[-2;0]$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Din $f(-2)=-4$ şi din intervalele de monotonie obţinute la la punctul b) avem că -2 este punct de maxim pentru funcţia f pe intervalul $(-\infty;-1)$ de unde $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$.

2.

a) Funcţia F este o primitivă a lui f dacă F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'=f$. Cum $F'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x=f(x)$ şi F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind produs de funcţii derivabile rezultă că F este o primitivă a lui f.

b) Aria este $\int_0^1 f(x)dx=F(x)\big|_0^1=F(1)-F(0)=0+1=1$.

c) Avem $\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'=\frac{f''(t)f(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}$ şi, prin urmare,

$$\int_1^x \frac{f''(t)f(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\int_1^x\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'dt=\frac{f'(t)}{f(t)}\Big|_1^x=\frac{e^t(t+1)}{e^t t}\Big|_1^x=\frac{t+1}{t}\Big|_1^x=\frac{x+1}{x}-2.$$

TESTUL 4

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Avem $\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$. Atunci $\sqrt{2}<\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}$.
2. În punctele de intersecţie avem $f(x)=g(x)$, adică $x^2-2x-3=0\Leftrightarrow(x+1)(x-3)=0$. Deci punctele de intersecţie sunt $(-1,3),(3,7)$.
3. Avem $2^x\left(1+2^3\right)=36$, adică $2^x=4$, de unde rezultă că $x=2$.
4. Avem $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2=\left(\frac{2i}{(1-i)(1+i)}\right)^2=i^2=-1$.
5. Avem $5\vec{u}+3\vec{v}=5(-3\vec{i}+2\vec{j})+3(5\vec{i}-\vec{j})=-15\vec{i}+10\vec{j}+15\vec{i}-3\vec{j}=0\cdot\vec{i}+7\vec{j}$, deci vectorul $5\vec{u}+3\vec{v}=0\cdot\vec{i}+7\vec{j}\Rightarrow A(0,7)$.
6. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Avem $\det A(a)=a^3+2-3a$.

b) Trebuie ca $\det A(a)\neq 0$, adică $a^3-3a+2\neq 0\Leftrightarrow(a-1)^2(a+1)\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$.

c) Pentru $a=0,\det A(a)=2$, deci sistemul are soluţie unică, care este $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.

a) Avem $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}$.

b) Deoarece $A_x A_e = A_e A_x = A_{x+e}$, avem $e = 0$ şi $A_e = I_3$.

c) Elementul neutru în $(Z,+)$ este 0, iar $f(0) = A_0$ este element neutru în $(G,\cdot)$. Trebuie să mai verificăm că $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, adică $A_x A_y = A_{x+y}$, adică **a)**.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Avem $f'(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - (\sqrt{x})' \ln x}{x} = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$.

b) Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ şi obţinem $x = e^2$. Obţinem tabelul de variaţie:

x	0		∞
$f'(x)$	+ + + + + +	0	- - - - - - -
$f(x)$	↗		↘

Deci f este crescătoare pe $(0, e^2)$ şi descrescătoare pe (e^2, ∞).

c) Logaritmând inegalitatea obţinem:
$\ln 3^{\sqrt{5}} < \ln 5^{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{5}\ln 3 < \sqrt{3}\ln 5$, adică $f(3) < f(5)$. Cum $3 \in (0, e^2)$, $5 \in (0, e^2)$ şi f crescătoare pe $(0, e^2)$, avem că $f(3) < f(5)$. .

2.

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

b) Avem $f'(x) = xe^x + e^x \Rightarrow f''(x) = xe^x + 2e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $\displaystyle\int_0^1 f''(x)dx = 2e - 1$.

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx = \int_1^2 xe^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2}\Big|_1^2 = \frac{e^4 - e}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 5

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Avem $|z|=\left|(3+4i)^4\right|=\left|3+4i\right|^4=\left(\sqrt{9+16}\right)^4=5^4=625$.
2. $2x^2-5x+2\le 0;\ x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$.
3. Condiţii: $2x-1\ge 0$. Deci $x\ge\frac{1}{2}$. Prin ridicare la pătrat se obţine x=5.
4. $f(0)=f(1)=2$, $f(2)\in\{0;1;2;3\}, f(3)\in\{0;1;2;3\}\Rightarrow 4^2=16$ funcţii.
5. Coordonatele centrului de greutate ale unui triunghi ABC sunt : $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$ şi respectiv $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$. Deci $x_G=\frac{4}{3}$ şi $y_G=\frac{5}{3}$.
6. Avem $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Avem $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}6&-2\\10&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&2\\-10&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2\\-10&5\end{pmatrix}=A(-1)$.

b) $\left(A(x)\right)^2=A(x)\cdot A(x)=A\left(x^2+2x\right)=A\left((x+1)^2-1\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

c) $\det A(1)=\begin{vmatrix}6&-2\\10&-3\end{vmatrix}=2\ne 0\Rightarrow\exists A^{-1}(1); A(1)\cdot A^{-1}(1)=A^{-1}(1)\cdot A(1)=I_2$. Atunci

$A^{-1}(1)=\frac{1}{\det A(1)}\cdot A^*\Rightarrow A^{-1}(1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&2\\-10&6\end{pmatrix}$.

2.

a) Avem $0=0+0\sqrt{3}$, dar $0^2-3\cdot 0^2\ne 1\Rightarrow 0\notin G$. Pe de altă parte, $1=1+0\sqrt{3}$ şi $1^2-3\cdot 0^2=1\Rightarrow 1\in G$.

b) $\left.\begin{array}{l}x\in G\Rightarrow x=a+b\sqrt{3}\text{ cu }a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\\ y\in G\Rightarrow y=c+d\sqrt{3}\text{ cu }c,d\in\mathbb{Z},\ c^2-3d^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow x\cdot y=ac+3bd+\sqrt{3}(ad+bc)$.

$ac+3bd, ad+bc\in\mathbb{Z}$ şi $(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2=\left(a^2-3b\right)\left(c^2-3d^2\right)=1\Rightarrow x\cdot y\in G$.

c) $x\in G\Rightarrow x=a+b\sqrt{3}$ cu $a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=a-b\sqrt{3}\in G$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $f'(x)=-\frac{xe^x}{e^{2x}}=-\frac{x}{e^x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) Rezolvând ecuaţia $f'(x)=0$, obţinem soluţia $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)	$+++++$		0	$-----$	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$x=0$ este punct de maxim. Deci $f(x)\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2.

a) Avem $\int f(x)dx=\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

b) Funcţia g este continuă şi pozitivă pe intervalul $[0;1]$ şi deci, aria suprafeţei este $A=\int\limits_0^1 g(x)dx=\int\limits_0^1 xe^x dx$. Integrând prin părţi, obţinem

$A=xe^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x dx=e-0-e^x\Big|_0^1=e-e+1=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x 2^t dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2^t}{\ln 2}\Big|_0^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 2}=\ln 2\cdot\frac{1}{\ln 2}=1$.

TESTUL 6

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $(2+i)^3+(2-i)^3=8+12i+6i^2+i^3+8-12i+6i^2-i^3=16+12i^2=16-12=4$.

2. Coordonatele punctelor de intersecţie se obţin din rezolvarea sistemului $\begin{cases}y=2x+1\\y=x^2+x+1\end{cases}$. Avem $x^2+x+1=2x+1$ cu $x_1=0$ şi $x_2=1$. Corespunzător $y_1=1$ şi $y_2=3$. Punctele sunt $(0,1)$ şi $(1,3)$.

3. Notăm cu $y=3^x>0$. Obţinem $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7\Leftrightarrow 2y+\frac{3}{y}=7\Leftrightarrow 2y^2-7y+3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=3$ sau $y=\frac{1}{2}$. În final avem că $x=1$ sau $x=\log_3\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Avem $C_{13}^3 \cdot C_{12}^2 = \frac{13!}{10!\cdot 3!}\cdot\frac{12!}{2!\cdot 10!} = \frac{11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{11\cdot 12}{1\cdot 2} = 11\cdot 2\cdot 13\cdot 11\cdot 6 = 18876$.

5. În ΔADC avem $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD\cdot DC\cdot\cos(\sphericalangle ADC)$ deci $AC = \sqrt{7}$. Atunci $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = AC\cdot AD\cdot\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD} = 5$.

6. Din $arctgx = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{3}$ obţinem $x = tg\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{3}\right) = ctg\left(arcctg\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Verificare directă înlocuind $x=0, y=3, z=1$.

b) Sistemul are soluţie unică dacă $\det A \neq 0$. Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{pmatrix}$ cu $\det A = 5(3-m)$. Din condiţia pusă rezultă $m \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

c) Dacă $m \neq 3$, conform punctului b), sistemul are soluţie unică, şi conform punctului **a)** soluţia este $(0,3,1)$.

2.

a) $2012 \circ 2013 = 2012 + 2013 + 1 = 4026$.

b) $x \circ x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x + x^2 + 1 \leq 3 \Leftrightarrow x + x^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,1]$.

c) $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = n+6 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + 2 = n+6 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + 2 = n+6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \in \{-2,3\} \cap \mathbb{N}^*$ şi $n \geq 2 \Rightarrow n = 3$. În concluzie, $Card\ A = 1$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $f'(x) = 1 - e^{-x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$

b) Avem

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	↘		1	↗	

Dacă $x \in (-\infty, 0]$ rezultă f este monoton descrescătoare. Dacă $x \in (0,\infty)$ rezultă f este monoton crescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

c) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)=1$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)-x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$. Atunci $y=x$ este asimptotă oblică la ∞.

2.

a) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=e^{0}=1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=2-1=1$. Restricţiile lui f la intervalele $(-\infty,-1)$ respectiv $(-1,\infty)$ sunt continue. Rezultă f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2>0$. Atunci $Vol=\pi\cdot\int_0^2(x+2)^2dx=\int_0^2\left(x^2+4x+4\right)dx=\dfrac{56\pi}{3}$.

c) $\int_{-2}^{0}xf(x)dx=\int_{-2}^{-1}xe^{x+1}dx+\int_{-1}^{0}x(2+x)dx$.

$\int_{-2}^{-1}xe^{x+1}dx=(xe^{x+1})\Big|_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}e^{x+1}dx=-1+\dfrac{2}{e}-e^{x+1}\Big|_{-2}^{-1}=$

$=-1+\dfrac{2}{e}-1+\dfrac{1}{e}=\dfrac{3}{e}-2,$

iar $\int_{-1}^{0}(2x+x^2)dx=\left(x^2+\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}=-1+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{3}$.

Prin urmare, $\int_{-2}^{0}xf(x)dx=\dfrac{3}{e}-\dfrac{8}{3}$.

TESTUL 7

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $z=x+iy$; ecuaţia devine $3x-yi=3+4i$, deci $x=1,y=-4\Rightarrow z=1-4i$.
2. Avem $x=-\dfrac{b}{2a}=1;x=1$.
3. Avem $\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}+\sin\dfrac{3\pi}{3}+\sin\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $T_{k+1}=C_9^k\cdot3^{\frac{9-k}{2}}$ unde $k\in\{0,1,...,9\}$ de unde deducem că dezvoltarea are 5 termeni iraţionali.
5. Folosind $\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}=3\overrightarrow{r_G}$ obţinem că $\overrightarrow{r_G}=2\vec{i}+2\vec{j}$.
6. Avem $tg(a+b)=\dfrac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a\cdot tg\,b}$ şi cum $tg\,a=\dfrac{1}{2}$, $tg\,a=\dfrac{1}{5}$ deducem că $tg(a+b)=\dfrac{7}{9}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5$.

b) Folosind Cramer se obţine $\Delta_x = -4$, $\Delta_y = -4$, $\Delta_z = -3$, de unde soluţia sistemului este $\left(\frac{-4}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$.

c) Se observă că cele trei numere sunt naturale dacă $a \geq \frac{5}{9}$ şi în plus a trebuie să fie multiplu de 5. Soluţia problemei $a = 5$.

2.

a) Calcul direct: $2(x-3)(y-3)+3 = 2xy-6x-6y+18+3 = x \star y$.

b) Conform punctului **a)** avem $2(5^x-3)^2+3=11$ de unde rezultă $(5^x-3)^2=4$ şi obţinem $5^x-3=\pm 2$. Avem două soluţii: din $5^x=1 \Rightarrow x=0$ şi din $5^x=5 \Rightarrow x=1$. Deci $x \in \{0;1\}$.

c) Trebuie să aflăm mai întâi elementul neutru al legii date: $x \star e = e \star x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ unde am notat cu „e" elementul neutru al legii date. Din $x \star e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ obţinem $2(x-3)(e-3)+3=x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2(x-3)(e-3)=x-3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2(e-3)=1 \Rightarrow e=\frac{7}{2}$. Notez cu x' elementul simetrizabil a lui x în raport cu legea „$\star$". Trebuie să se verifice relaţia: $x' \star x = x \star x' = e$ din ecuaţia $x' \star x = e \Rightarrow 2(x'-3)(x-3)+3=\frac{7}{2} \Rightarrow 2(x'-3)(x-3)=\frac{1}{2}$ există x' dacă $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Deci toate elementele lui $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ sunt simetrizabile, simetricele lor sunt $x' = \frac{1}{4(x-3)}+3 \Leftrightarrow x' = \frac{12x-35}{4(x-3)}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (2x+3) = 5$; $l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \ln x = 0$. Avem $l_s(1) \neq l_d(1) \Rightarrow f$ este discontinuă în $x_0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

c) Este suficient să evaluăm limita pentru x>1 deoarece x devine oricât de mare.

Scanned with OKEN Scanner

Limita de evaluat devine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2+..+x^{2008}}{x^{2008}}=1$.

2.

a) $F'(x)=\left(e^x+\frac{x^3}{3}+x^2+1\right)'=e^x+x^2+2x=f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=e+\frac{1}{3}+2-1=e+\frac{4}{3}$.

c) Avem $h(x)=\frac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Atunci aria căutată este

$$A=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big|_0^1=\ln(e+1)-\ln 1=\ln(e+1).$$

TESTUL 8

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Avem $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}=\frac{25(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}+\frac{25(4+3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{25(4-3i)}{25}+\frac{25(4+3i)}{25}=8$.

2. Trebuie ca $f(x)=g(x)$, ceea ce este echivalent cu $3x+1=5-x$, sau $x=1$.

3. Funcţia de gradul al treilea este strict crescătoare. Adunată cu o constantă rămâne strict crescătoare, deci injectivă.

4. Inegalitatea este verificată doar pentru $n=4$. Deci probabilitatea este egală cu $\frac{1}{4}$.

5. Trebuie să avem $m^2+m+m=0\Leftrightarrow m(m+2)=0$, de unde obţinem $m=0, m=-2$.

6. Aria este $\frac{1}{2}MN\cdot NP\cdot\sin(MNP)=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Din relaţiile lui Viète obţinem $x_1+x_2+x_3=0$.

b) Se înlocuiesc rădăcinile x_1,x_2,x_3 în ecuaţie şi se obţin relaţiile: $x_1^3-3x_1+2=0$, $x_2^3-3x_2+2=0$, $x_3^3-3x_3+2=0$, de unde prin însumare obţinem: $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3(x_1+x_2+x_3)+6=0$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3(x_1+x_2+x_3)-6=-6$.

c) Avem $d=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3-x_3^3-x_1^3-x_3^3=3x_1x_2x_3-\left(x_3^3+x_1^3+x_3^3\right)$.

Din relaţiile lui Viète obţinem $x_1x_2x_3=2$ şi, ţinând cont de faptul că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, avem $d=0$.

Scanned with OKEN Scanner

2.

a) Trebuie să avem $f(\hat{2})=\hat{0}$, adică $\hat{3}+\hat{4}a+\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}\Leftrightarrow \hat{4}a+\hat{1}=\hat{0}$, atunci $a=\hat{4}$.

b) $f=X^3+X^2+X+\hat{1}=X^2(X+\hat{1})+(X+\hat{1})=(X^2+\hat{1})(X+\hat{1})$.

c) Ţinând cont de punctul **b)**, ecuaţia $f(x)=\hat{0}$ este echivalentă cu $(x^2+\hat{1})(x+\hat{1})=\hat{0}$. Rezolvând ecuaţiile $x^2+\hat{1}=\hat{0}$ şi $x+\hat{1}=\hat{0}$, obţinem $x\in\{\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $f'(x)=(x-3)'\cdot\ln x+(x-3)\cdot(\ln x)'=\ln x+\frac{x-3}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\ln 1+\frac{-2}{1}=-2$.

c) $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}>0$, $\forall x\in(0,\infty)$. Deci funcţia f este convexă pe $(0,\infty)$.

2.

a) $\int(x+9)^2\cdot\frac{1}{x+9}dx=\int(x+9)dx=\frac{x^2}{2}+9x+C.$

b) Avem $f_2(x)=\frac{1}{x^2+9}$

$$\int_0^1 x\,f_2(x)dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 9)=\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}.$$

c) $\frac{1}{10}\le\frac{1}{x^{2012}+9}\le\frac{1}{9},\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{10}dx\le\int_0^1\frac{1}{x^{2012}+9}dx\le\int_0^1\frac{1}{9}dx\Rightarrow\frac{1}{10}\le A(\Gamma_f)\le\frac{1}{9}.$

TESTUL 9

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Avem $a_3-a_1=2r\Rightarrow 2r=4\Rightarrow r=2$. Atunci $a_{10}=a_1+9r\Rightarrow a_{10}=3+18=21$. Prin urmare, $S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=\frac{24\cdot 10}{2}=120$.
2. Cum $f(7)=0$, rezultă că $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(7)=0$.
3. Avem $2^{2x^2+3x-2}=8\Leftrightarrow 2^{2x^2+3x-2}=2^3\Leftrightarrow 2x^2+3x-2=3\Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0$. Atunci $x\in\left\{-\frac{5}{2},1\right\}$.
4. Avem $C_5^3=10$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Avem $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$ şi $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1$, deci $M(1,1)$.

6. Avem $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos(180^\circ - 20^\circ) +$
$+ \cos(180^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ - \cos 10^\circ = 0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $A^2 + A = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Vom demonstra egalitatea prin metoda inducţiei matematice. Notăm cu $P(n)$ egalitatea din enunţ.

1) Conform punctului **a)**, propoziţia $P(2)$ este adevărată.

2) Pentru $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, presupunem că propoziţia $P(k)$ este adevărată. Arătăm că propoziţia $P(k+1): A^{k+1} = \begin{pmatrix} 4^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este adevărată. Avem

$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 4^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n.

Deci $A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

c) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 4^{2013} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 4^2 + \cdots + 4^{2013} & 0 \\ 0 & \underbrace{1+1+\cdots+1}_{2013 \text{ ori}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\left(4^{2013} - 1\right) & 0 \\ 0 & 2013 \end{pmatrix}$

deoarece $4 + 4^2 + \cdots + 4^{2013} = \frac{4^{2014} - 4}{3} = \frac{4}{3}\left(4^{2013} - 1\right)$.

2.

a) Folosind forma algebrică a polinomului f, avem $a_0 = f(0)$. Pe de altă parte, $f(0) = (0+1)^{2013} + (0-1)^{2013} = 1 - 1 = 0$. Deci $a_0 = 0$.

b) Avem că $x = -1$ este rădăcină a polinomului g. Conform teoremei lui Bézout, restul împărţirii polinomului f la polinomul g este egal cu $f(-1) = -2^{2013}$.

c) Suma coeficienţilor polinomului f este egală cu $f(1) = 2^{2013}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Avem $f'(x)=1-e^{-x}=\frac{e^x-1}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Tabelul de variaţie a funcţiei

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	↘		1		↗

Din acest tabel rezultă că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ şi crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

c) Avem $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)=1$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)-x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$. Prin urmare, $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

2.

a) $\int\limits_1^e f'(x)dx=f(x)\Big|_1^e=\frac{1}{e(1+\ln e)}-\frac{1}{1(1+\ln 1)}=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$.

b) Funcţia f este continuă pe intervalul $[1,+\infty)$, deoarece se obţine din operaţii cu funcţii continue. Atunci funcţia f admite primitive pe intervalul $[1,+\infty)$. Să notăm cu F o primitivă oarecare a funcţiei f. Pentru $x>1$ avem $f(x)=F'(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}>0$, deci F e crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$.

c) Trebuie să găsim a astfel încât $\int\limits_a^{e^2}f(x)dx=\ln\frac{3}{2}$. Această integrală o putem calcula folosind metoda substituţiei. Avem

$\int\limits_a^{e^2}\frac{1}{x(\ln x+1)}dx=\int\limits_a^{e^2}\frac{(\ln x+1)'}{\ln x+1}dx=\int\limits_{\ln a}^{2}\frac{(t+1)'}{t+1}dt=\ln(t+1)\Big|_{\ln a}^{2}=\ln\frac{3}{1+\ln a}$. Aşadar,

$\ln\frac{3}{1+\ln a}=\ln\frac{3}{2}$, de unde se obţine că $1+\ln a=2$. Prin urmare, $a=e$.

TESTUL 10

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $z^2+2z+4=0\Rightarrow\Delta=-12\Rightarrow z_{1,2}=-1\pm i\sqrt{3}\Rightarrow|z_1|=|z_2|=\sqrt{1+3}=2$.

2. $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=(3-2\cdot0)+(3-2\cdot1)+\cdots+(3-2\cdot6)=-21$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Se impune condiţia de existenţă a radicalului: $5-x^2\geq 0$; adică $x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$. După ridicarea la pătrat se obţine: $5-x^2=4\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$.

4. Avem $A_4^3=24$.

5. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=(\vec{i}+3\vec{j})(2\vec{i}+(m-2)\vec{j})=2+3(m-2)=3m-4=5\Rightarrow m=3$.

6. $1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos 1>0;\ 2,3\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos 2<0,\cos 3<0$. Cel mai mare element al mulţimii este $\cos 1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Avem $A^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

b) $AB-2B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=O_2$.

c) $AXB=O_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=O_2\Leftrightarrow x+y+z+t=0$

$\Leftrightarrow x=\alpha,y=\beta,z=\gamma,t=-\alpha-\beta-\gamma,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

2.

a) $f(1)=0\Leftrightarrow 1+a-1-1=0\Leftrightarrow a=1$;

b) $a=1\Rightarrow f=X^4+X^3-X-1=(X+1)(X^3-1)=(X+1)(X-1)\left(X^2+X+1\right)$. Cum $x^2+x+1\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x=-1$ sau $x=1$.

c) $\left\{x\in\mathbb{Q},f(x)=0\right\}\subset\{-1,1\}\Rightarrow f$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $f_1(x)=f_0'(x)=(e^{-x}-1)'=-e^{-x}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f_0(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}-1=-1\Rightarrow y=-1$ asimptotă orizontală spre ∞.

c) Avem $f_2(x)=f_1'(x)=(-e^{-x})'=e^{-x}$. Atunci, aplicând de două ori regula lui l'Hôpital, obţinem

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)+x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}.$$

2.

a) $\int_1^e\left(f(x)\right)dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx+\int_1^e xdx=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2},\ t=\ln x$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\int_1^e \left(f(x)-\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^e (x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^e=\frac{e^2-1}{2}$.

c) $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-x\right)dx=\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)\Big|_{e^n}^{e^{n+1}}=\frac{2n+1}{2}$. Obţinem $I_{n+1}-I_n=\frac{2(n+1)+1}{2}-\frac{2n+1}{2}=1$, valoare ce reprezintă raţia progresiei aritmetice $(I_n)_{n\geq 1}$.

TESTUL 11

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Avem $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}=\frac{(1+3i)^2+(1-3i)^2}{10}=\frac{2(1+9i^2)}{10}=-\frac{8}{5}$.
2. Din condiţiile de existenţă ale logaritmului $\Rightarrow 0<x<\frac{9}{2}$. Ecuaţia devine $\lg\left[x\cdot(9-2x)\right]=\lg\left(9x-2x^2\right)=1\Leftrightarrow 9x-2x^2=10\Leftrightarrow x\in\left\{2,\frac{5}{2}\right\}$. Cum ambele valori verifică condiţiile $\Rightarrow S=\left\{2,\frac{5}{2}\right\}$.
3. $\cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left\{\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}+k\pi,k\in\mathbb{N}\right\}\Rightarrow x\in\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{N}\right\}$.
4. Există 5^5 funcţii. Dintre ele $5!$ sunt bijective (permutările). Probabilitatea este $\frac{5!}{5^5}=\frac{24}{625}$.
5. Dreptele sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă, $a=-3$.
6. Avem $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=\sin 3x(2\cos 2x+1)$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Avem $\det A=4a+10$. Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}-a & -5a+2 & 2a-3\\ 3 & -a+20 & -13\\ 1 & -a-12 & 7\end{pmatrix}$.

c) $a=1\Rightarrow \det A=14\Rightarrow x=2,\ y=3,\ z=-1$.

Scanned with OKEN Scanner

2.

a) $I_3=\begin{pmatrix} 2013^0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A_0\in G$, deoarece $0\in\mathbb{R}$.

b) $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix} 2013^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2013^y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2013^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x+y & 1\end{pmatrix}=A_{x+y}$, $(\forall)\,x,y\in\mathbb{R}$.

c) Deoarece $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$ şi $x+y\in\mathbb{R},(\forall)x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow A_x\cdot A_y\in G$ pentru orice $A_x,A_y\in G$, deci G este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor.
Asociativitatea: $(\forall)A_x,A_y,A_z\in G\Rightarrow(A_x\cdot A_y)\cdot A_z=A_x\cdot(A_y\cdot A_z)$ este proprietate cunoscută a înmulţirii matricelor.
Elementul neutru: $A_0\cdot A_x=A_x\cdot A_0=A_{x+0}=A_x,(\forall)A_x\in G$ şi $A_0\in G$ deoarece $0\in\mathbb{R}$, atunci A_0 este element neutru.
Elemente simetrizabile: $A_x\cdot A_{-x}=A_{-x}\cdot A_x=A_0,(\forall)x\in\mathbb{R}$ şi $A_{-x}\in G$, deoarece $-x\in\mathbb{R}$, atunci orice element A_x din G are simetricul $A_{-x}\in G$.
Deci $(G,\cdot)$ grup. (Evident grupul este comutativ deoarece $A_x\cdot A_y=A_{x+y}=A_{y+x}=A_y\cdot A_x,(\forall)A_x,A_y\in G$).

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $l_s(4)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(ax-6)=4a-6$; $l_d(4)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\sqrt{x}=2$;

$f(4)=\sqrt{4}=2$. f continuă în $x_0=4\Leftrightarrow l_s(4)=l_d(4)=f(4)\Leftrightarrow 4a-6=2\Leftrightarrow a=2$.

b) Pentru x > 4 avem $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, de unde $f'(9)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$.

c) Ecuaţia tangentei la G_f în punctul x_0 este $d:\ y-y_0=m\left(x-x_0\right)$,

unde $x_0=9$, $y_0=f\left(x_0\right)=3$ şi $m=f'(9)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow d:\ y-3=\dfrac{1}{6}(x-9)$.

2.

a) Fie $F_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f_m. Atunci $F_m'(x)=f_m(x)=\left(mx+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$. Rezultă că F_m este crescătoare pentru orice $m\in\mathbb{R}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\int_0^1\left[f_1(x)-x^2-1\right]dx=\int_0^1\left(x^2+x+1-x^2-1\right)e^x dx=\int_0^1 xe^x dx=$

$=\int_0^1 x\left(e^x\right)'dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big|_0^1=e-e+1=1.$

c) $A\left(\Gamma_f\right)=\int_0^1 f_m(x)dx=\left(m^2\frac{x^3}{3}+m\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{2}m+1$. Aria este minimă pentru $m=-\frac{3}{4}$.

TESTUL 12

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_3+a_4=8\Rightarrow a_1+2r+a_1+3r=8\Rightarrow 2a_1+10=8\Rightarrow a_1=-1$.
2. Avem $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=2-2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Pentru orice $x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1<x_2\Rightarrow$ $2-2x_1>2-2x_2\Rightarrow f\circ g$ este strict descrescătoare.
3. $arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ şi, prin urmare, $arctg\,x=\frac{\pi}{6}$, iar de aici rezultă că $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. $T_{k+1}=C_7^k\cdot 2^k,k=1,2,...,7$. Avem $C_7^k=\frac{7!}{k!(7-k)!}\Rightarrow C_7^k\vdots 7$ pentru $k=1,2,...,6$.

   Pentru $k=1,2,...,6$, $T_{k+1}=C_7^k\cdot 2^k$ este divizibil cu 2 şi $7\Rightarrow T_{k+1}\vdots 14$, deci 6 termeni ai dezvoltării sunt divizibili cu 14.
5. Putem scrie că $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}=1$ şi, conform teoremei reciproce a teoremei lui Ceva obţinem că dreptele AA',BB',CC' sunt concurente.
6. Avem $\frac{\sin x}{\cos x}=4\Rightarrow\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=16$; obţinem $\cos^2 x=\frac{1}{17}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=0$.

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Avem $I_3+A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $\det(I_3+A)=1\neq 0$, ceea ce înseamnă că matricea I_3+A este inversabilă şi $(I_3+A)^{-1}=\frac{1}{\det(I_3+A)}\cdot(I_3+A)^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.

a) Dacă o rădăcină este egală cu 2 rezultă că f(2)=0 $\Leftrightarrow 13+2m=0\Leftrightarrow m=-\frac{13}{2}$.

b) Calculând $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ şi ţinând cont că numerele x_1,x_2,x_3 sunt rădăcini ale polinomului dat, se obţine că: $x_1^3+x_1^2+mx_1+1=0$, $x_2^3+x_2^2+mx_2+1=0$ şi $x_3^3+x_3^2+mx_3+1=0$. Prin însumarea membru cu membru a celor trei relaţii, rezultă că: $S_3+S_2+mS_1+3=0$.

c) Presupunem prin absurd că $x=\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$, este rădăcină raţională a polinomului f. Atunci p este divizor întreg al termenului liber, iar q este divizor întreg al coeficientului termenului de grad maxim; prin urmare $\frac{p}{q}\in\{-1,1\}$. Dacă $x=1$ este rădăcină, se obţine $m=-3$ (impar), şi dacă $x=-1$ este rădăcină, se obţine $m=-1$ (impar), contradicţie cu m par.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$.

b) Determinăm rădăcinile derivatei : $f'(x)=0\Rightarrow -2x^2+2=0\Rightarrow x=\pm 1$, posibile puncte de extrem. Pentru a fi siguri, verificăm dacă funcţia îşi schimbă monotonia în punctele ± 1. Cum semnul derivatei este dat de numărător, iar acesta este o funcţie de gradul al doilea, obţinem că: în stânga lui -1 este negativă iar în dreapta este pozitivă, adică funcţia este descrescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi crescătore pe $(-1,1)$, adică -1 este punct de minim. Analog se obţine că 1 este punct de maxim. Deci punctul $A(-1,f(-1))=A(-1,-1)$ este punctul de minim al graficului funcţiei iar $B(1,f(1))=A(1,1)$ este punctul de maxim al graficului.

c) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ deducem că punctul de minim $A(-1,f(-1))=A(-1,-1)$ obţinut la punctul anterior este de fapt punct de minim global. Deci

Scanned with OKEN Scanner

$f(x)\geq -1,\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x^3)\geq -1,\forall x\in\mathbb{R}$

2.

a) $\left.\begin{matrix} f(-1-0)=4 \\ f(-1+0)=4 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$. Cum $f(-1)=4$, rezultă că funcţia f este continua în punctul $x_0=-1$. Funcţia f este continuă pe intervalul $(-\infty,-1)$ ca funcţie de gradul întâi. Funcţia f este continuă pe intervalul $(-1,+\infty)$ ca funcţie de gradul doi. Prin urmare, funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar de aici rezultă că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int\limits_{-3}^{-2} f(x)dx=\frac{5}{2}$.

c) $m>-1\Rightarrow f(x)=3x^2+1>0$.

$A=\int_m^{m+1}(3x^2+1)dx=x^3\,|_m^{m+1}+x\,|_m^{m+1}=3m^2+3m+2$. Fie $A(m)=3m^2+3m+2$. Atunci

$A'(m)=6m+3=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$.

$A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+3\left(-\frac{1}{2}\right)+2=\frac{5}{4}\Rightarrow$ aria minimă este $\frac{5}{4}$.

TESTUL 13

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{20}=i^{\frac{20\cdot 21}{2}}=i^{210}=i^2=-1$

2. $V(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}),V(-\frac{1}{2};-\frac{9}{4}),9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)=0$

3. $x>0$

$\ln[(e^x-1)(e^x+1)]=1$

$e^{2x}-1=e,x=\frac{\ln(e+1)}{2}=\ln\sqrt{e+1}$

4. Notăm cu $P(n)$ enunţul dat. Pentru $n=0$ obţinem propoziţia $P(0):6\,|\,0^3+5\cdot 0$ care este o propoziţie adevărată. Să demonstrăm acum implicaţia $P(k)\Rightarrow P(k+1),k\geq 1$.

Presupunem că propoziţia $P(k):6\,|\,k^3+5k$ este adevărată şi demonstrăm că propoziţia $P(k+1)$ este adevărată. Notăm $E(k)=k^3+5k$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $E(k+1)=(k+1)^3+5(k+1)=k^3+5k+3k^2+3k+6=E(k)+3k(k+1)+6$, care este o sumă de trei termeni care se divid cu 6. Prin urmare, propoziţia $P(k+1)$ este adevărată. Conform metodei inducţiei matematice, rezultă că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$. În concluzie, $6\,|\,n^3+5n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$

$\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}=\frac{3}{5}$

6. $tg\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=3$

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. **a)** $A^2=A, A^2-A=O_2$,

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2-a\cdot A)(I_2-b\cdot A)=I_2-(a+b-ab)\cdot A=X(a+b-ab)$.

c) $X^{2013}(1)=X(1)=I_2-A$

2. **a)** $x*x*x=\log_{2013}(3\cdot 2013^x)$

b) $\log_{2013}(3\cdot 2013^x)=\log_{2013}6039$

c) $x=1$

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. **a)** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$ ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-\infty\Rightarrow x=0$ ecuaţia asimptotei verticale

c) Se arată că f este strict crescatoare pe (0,e) şi strict descrescatoare pe $(e;+\infty)$

$f(x)\le\frac{1}{e}\forall x\in(0;+\infty)$

Scanned with OKEN Scanner

$y=0$ asimptota orizontala spre $+\infty \Rightarrow f(x)>0, \forall x \in (e;+\infty)$

$0<f(x)\leq \frac{1}{e} \forall x \in (e;+\infty)$

2. a) $\int (3x^2+2x+1)dx = x^3+x^2+x+C$

b) $A=\int_0^1 |f_1(x)| = 3$

c) $\int_1^2 \frac{3x^2+4026x}{x}\cdot e^x dx = \int_1^2 (3x+4026)e^x dx = 4029e^2-4026e$

TESTUL 14

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.

$z=(1-i\sqrt{2})^2=-1-2\sqrt{2}i$

$\text{Re}(z)=-1$

2. $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=m+1, x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=2m$

$3[(m+1)^2-4m]=2m-2 \Leftrightarrow 3m^2-8m+5=0$

$m_1=1, m_2=\frac{5}{3}$

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}=1, x=-1$

4. $T_{k+1}=C_{150}^k 4^k \cdot a^{\frac{450-5k}{6}}$

$\frac{450-5k}{6}=0,\ k=90$

5. $a=4$

6. $\cos^2 a=1-\sin^2 a=\frac{16}{25}, \sin 2a=2\sin a\cos a=\frac{24}{25}$

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $m^2+18=54, m=\pm 6$

b) $\det A \neq 0, -2m-2 \neq 0, m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\det A=-2, \Delta_x=-4, \Delta_y=-6, \Delta_z=-6$

c)

$x=2, y=3, z=3$

2. a) $f(1)=2015, m=2013$

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(-3)^2-2\cdot(-2)=13$

$f(1)=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=2+m$

$x_1x_2x_3=-m$

c)

$$2+m=\frac{1}{-m}$$

$m=-1$

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a) $$f'(x)=\frac{2x(x^2+x+2a)}{(x-1)^2}$$

b) $$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4(6+2a)$$

$a=-1$

c) f un are asimptote orizontale

$y=x+2$ asimprota oblica catre $+\infty$

2.a) a=3

b) $$A=\int_0^1 (e^x+x+4)dx=e+\frac{7}{2}$$

c) $$2\int_0^1 xf(x^2)dx=e+\frac{7}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 15

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $-1 \le \frac{x+1}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 \le x+1 < 3$ — 2p

$-4 \le x < 2$ — 2p

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$ — 1p

2. $f(x) = g(x) \Rightarrow 2x-1 = x^2-2x+3$ — 1p

$\Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$ — 2p

punctul de intersecţie este $A(2,3)$ — 2p

3. $\sqrt{2-x} = 2-x$ — 1p

Condiţie $2-x \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$ — 1p

Ecuaţia dată este echivalentă cu: $2-x = 4-4x+x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ — 2p

$x \in \{1,2\}$ — 1p

4. $P_5 = 5! = 120, C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10, A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$ — 3p

$\frac{P_5}{C_5^2 + A_6^2} = \frac{120}{40} = 3$ — 2p

5. $\frac{y-3}{0-3} = \frac{x-2}{-1-2}$ — 3p

Ecuaţia dreptei $AB: y = x+1$ — 2p

6. Prin aplicarea teoremei consinusului în triunghiul MNP se obţine — 2p

$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos(\sphericalangle NMP)$

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \Rightarrow NP^2 = 19 \Rightarrow NP = \sqrt{19}$ — 2p

Perimetrul este egal cu $5+\sqrt{19}$ — 1p

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ — 2p

$= 1-0 = 1$ — 3p

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — 2p

$A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ — 2p

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 1p

Scanned with OKEN Scanner

c) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$ **1p**

$X^2=A \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=2 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ a=d \\ ab=1 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ a=d \\ ab=1 \\ c=0 \end{cases}$ **3p**

Se obţin soluţiile $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **1p**

2.a) $(x-3)(y-3)+3=xy-3x-3y+9+3$ **3p**

$=x*y, \forall x,y \in \mathbb{R}$ **2p**

b) $x*x=19 \Rightarrow (x-3)^2+3=19$ **2p**

$(x-3)^2=16 \Rightarrow x \in \{-1,7\}$ **3p**

c) $x*3=3*x, \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

$\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{2011}=\left(\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{26}\right)*3*\left(\sqrt[3]{28}*\sqrt[3]{29}*...*\sqrt[3]{2011}\right)$ **2p**

$=3$ **1p**

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a) $f'(x)=(e^x-x)'=e^x-1$ **3p**

$f'(x)-f(x)=(e^x-1)-(e^x-x)=x-1$ **2p**

b) $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ **2p**

$f(0)=1, f'(0)=0$ **2p**

Ecuaţia tangentei este $y=1$ **1p**

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-x}{x}=-1$ **2p**

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ **2p**

Ecuaţia asimptotei este $y=-x$ **1p**

2.a) $\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_1^e\dfrac{1}{x}dx$ **2p**

$=\ln x\Big|_1^e$ **2p**

$=1$ **1p**

b) $A=\int_1^2|f(x)|dx=$ **2p**

$=(\ln x+\ln(x+1))\Big|_1^2=$ **2p**

Scanned with OKEN Scanner

$= \ln 3$ 1p

c) $V = \pi \int_1^2 g^2(x)dx =$ 1p

$= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x(x+1)} \right) dx =$ 1p

$= \pi \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 2\ln \frac{x}{x+1} \right) \Big|_1^2 =$ 2p

$= \pi \left(\frac{2}{3} + 2\ln \frac{4}{3} \right)$ 1p

TESTUL 16

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\sqrt[3]{2^3} + \log_2 (2)^{-2} = 2 - 2 = 0.$
2. $f(-1) = 2 \Leftrightarrow m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3.$
3. $6 - x^2 = 2 \Rightarrow x \in \{-2, 2\}.$
4. $x(x-1) = 12, x \in \mathbb{N}, x \geq 2 \Rightarrow x = 4.$
5. $\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-2}{4-2} \Leftrightarrow x - y + 1 = 0.$
6. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{16}{25}, \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}.$

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) $A^2 + A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = O_2.$

b) $\det(A) = 0 = \det(A + I_2).$

c) $A + A^2 + A^3 + ... + A^{10} = A + A^2 + A^2(A + A^2) + ... + A^8(A + A^2) = O_2.$

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 4 - 2 \cdot 0 = 4.$

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = 0.$

c) $\Delta = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}{x_1x_2x_3} = -1.$

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}.$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}=1$, deci ecuaţia este $y=1$.

c) Din a) rezultă că f este strict crescătoare pe intervalul $[1,2]$ deci $-\dfrac{3}{5}=f(1)\le f(x)\le f(2)=0$ oricare ar fi $x\in[1,2]$.

2. a) $\int_0^{2010}1dx=2010$.

b) $\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2 xdx=\dfrac{3\pi}{2}$.

c) $\int_1^2 f^{2010}(x)dx\le\int_1^2(1+x)^{2010}dx=\dfrac{3^{2011}-2^{2011}}{2011}$.

TESTUL 17

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\log_2 2^{-3}+3=0$.
2. $V(1,2)$.
3. $x\in\{-1,1\}$.
4. $A_4^3=24$.
5. $\overline{w}(3,-5)$.
6. $h=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{12}{5}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) $A^2-A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=I_2$.

b) $A(A-I_2)=(A-I_2)A=I_2\Rightarrow A^{-1}=A-I_2$.

c) $X=A^{-1}\begin{pmatrix}2010&2010\\2009&2010\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2010&2010\\2009&2010\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2009&2010\\1&0\end{pmatrix}$.

2. a) $\hat{2}$. b) $\hat{0},\hat{2}$. c) fiecare termen este egal cu $\hat{2}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=(x^2+2x)e^x$.

b) $f'(x)\le 0$ oricare ar fi $x\in[-2,0]$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $x \in [-1,0]$ şi din b) rezultă că $f(x) \le f(-1)$ iar $x^2 \in [0,1]$, deci din a) rezultă că $f(x^2) \le f(1)$ (f crescătoare pe $[0,1]$) şi atunci $f(x)+f(x^2) \le f(-1)+f(1) = \frac{e^2+1}{e}$.

2. a) $\int_1^3 x dx = 4$.

b) $V = \pi \int_1^2 g^2(x)dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{29\pi}{6}$.

c) $\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx + \frac{1}{2}\int_1^e 2(\ln x)' \ln x dx = \frac{e^2+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{e^2+3}{4}$.

TESTUL 18

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_1 = -1, r = 3, S_7 = 56$.

2. $f(x) = g(x) \Rightarrow A(4,7)$.

3. $x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x \in \{-3,3\}$.

4. $a + 4a = 150 \Rightarrow a = 30, b = 120 \Rightarrow ab = 3600$.

5. $m + 1 - 2 = m^2 - 3 \Rightarrow m \in \{-1,2\}$.

6. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{8}{9}, \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) $\det A = m^2 - 2m + 1$.

b) $x = 1,\ y = -1, z = 3$.

c) din ultimele două ecuaţii rezultă $0 = 3$, deci sistemul este incompatibil.

2. a) $x * (y * z) = (x-4)(y-4)(z-4)+4 = (x * y) * z$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) $x * y = (x-4)(y-4)+4 > 4$ pentru $x, y > 4$.

c) Deoarece $a * 4 = 4, \forall a \in \mathbb{R}$, expresia are valoarea 4.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$.

b) $y - 5 = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x - 2$.

c) $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta.

2. a) $g'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x > 0$.

b) $\int_1^4 f(x)dx = g(x)|_1^4 = g(4) - g(1) = 8\ln 2 - 4$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $\int_1^{e^2} 2^{g(x)} f(x)dx = \frac{1}{\ln 2} 2^{g(x)} \Big|_1^{e^2} = \frac{1}{\ln 2}(2^{g(e^2)} - 2^{g(1)}) = \frac{15}{16\ln 2}$.

TESTUL 19

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a = -\sqrt[3]{64} = -4, b = \log_2 \frac{1}{32} = -5$ şi $c = C_2^1 - A_5^1 = -3$. Deci $b < a < c$.

2. Este necesar ca $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (-8,0)$.

3. Condiţia de existenţă (a radicalului şi a logaritmului): $2x^2 + x - 1 > 0$. Din ecuaţie obţinem $\sqrt{2x^2 + x - 1} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 10 = 0$, cu soluţiile $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{5}{2}$, ambele verificând condiţia de existenţă.

4. $2, n, 3n-8, \div \Leftrightarrow 2n = 2 + (3n-8) \Leftrightarrow n = 6$. Deci $a_1 = 2$ şi $r = 4 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9r = 38$.

5. Dacă $D(x_D, y_D)$ este punctul cerut, atunci $ABDC$ este paralelogram, deci diagonalele (AC) şi (BD) au acelaşi mijloc. Rezultă de aici că $\begin{cases} x_A + x_D = x_B + x_C \\ y_A + y_D = y_B + y_C \end{cases} \Rightarrow D(-5,0)$.

6. Avem $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 140^\circ) = \sin 40^\circ \Rightarrow \sin 140^\circ \cdot \sin 40^\circ = \sin^2 40^\circ$ şi $\cos^2 130^\circ = \left(-\cos(180^\circ - 130^\circ)\right)^2 = \cos^2 50^\circ = \sin^2(90^\circ - 50^\circ) = \sin^2 40^\circ$. De aici concluzia.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow A^t = A$. Deci

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2a^2 - 2a + 1 & 2a - 2a^2 \\ 2a - 2a^2 & 2a^2 - 2a + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^t \in M.$$

b) $\det A = 1 \Rightarrow a^2 - (1-a)^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A = I_2$.

c) $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \in M$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A = 2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$. În acest caz

$$A^{-1} = \frac{1}{2a-1}\begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} \in M \Leftrightarrow \frac{a}{2a-1} + \frac{a-1}{2a-1} = 1,$$ adevărat pentru oricare $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. a) $f(1) = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \{-1, 2\}$.

b) Scriem relaţiile lui Viète: $S_1 = 2a$, $S_2 = 2(a^2 - 1)$, $S_3 = 1$. Deci suma

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=\frac{S_1^2-2S_2}{S_3}=4$ nu depinde de a.

c) Dacă $\alpha\in\mathbb{Z}$ este rădăcină a lui f atunci $\alpha\,|\,-1\Rightarrow\alpha\in\{-1,1\}$. Pentru $\alpha=1\overset{\text{cf. a)}}{\Rightarrow}a=1$, iar pentru $\alpha=1\Rightarrow a^2+a-1=0\Rightarrow a\notin\mathbb{N}$. Deci $a=1$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x^2-x+1\right)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(1+\ln x\right)=f(1)=1$. Deci f este continuă în punctul $x_0=1$.

b) Dacă $x\in(0,1)\Rightarrow f(x)=x^2-x+1\geq f_{\min}(x)=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{3}{4}$, iar dacă

$x\geq1\Rightarrow f(x)=1+\ln x\geq1>\frac{3}{4}$.

c) $x>0\Rightarrow e^x>1\Rightarrow f\left(e^x\right)=1+\ln\left(e^x\right)=1+x$. Deci limita va fi $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f\left(e^x\right)-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x}{x}=1$.

2. a) $\int g(x)\,dx=f(x)+C\Leftrightarrow f'(x)=g(x)$, propoziție adevărată (prin calcul direct).

b) Avem $h(x)=x\cdot f\left(e^x\right)=xe^x-x^2$. Deci $A=\int_1^2h(x)\,dx=\int_1^2\left(xe^x-x^2\right)dx=\frac{3e^2-7}{3}$.

c) $\int_1^e f^{2010}(x)\cdot g(x)\,dx=\int_1^e f^{2010}(x)\cdot f'(x)\,dx=\left.\frac{f^{2011}(x)}{2011}\right|_1^e=\frac{(e-1)^{2011}-1}{2011}$.

TESTUL 20

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Din sistem obținem $S=5$ și $S^2-2P=13$, deci $P=6$. O ecuație de gradul 2, cu soluțiile x_1,x_2, va fi $x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-5x+6=0$.

2. $a_4+a_{16}=20\Rightarrow2a_1+18r=20\Rightarrow a_1+9r=10\Rightarrow a_{10}=10$.

3. Condiții de existență: $\begin{cases}2x+1\geq0\\7-x\geq0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},7\right]=D$. Din ecuație obținem

$\sqrt{2x+1}=|7-x|^2\Leftrightarrow x^2-16x+48=0\Rightarrow x\in\{4,12\}$. Din cele două soluții doar $x_1=4\in D$.

4. Numărul submulțimilor cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente este C_n^k. Din enunț rezultă că $C_n^0+C_n^1+C_n^2=22\Rightarrow n=6$.

5. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD$, unde $ABDC$ este paralelogram, în care $BD=4$ și $m(\angle ABD)=120^\circ$. Din teorema cosinusului obținem

Scanned with OKEN Scanner

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow AD = \sqrt{37}$.

6. Avem $\sin^2 110^\circ + \sin^2 20^\circ = \sin^2(180^\circ - 110^\circ) + \cos^2(90^\circ - 20^\circ) = \sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ = 1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $I_2 \cdot I_2' = I_2' \cdot I_2 = I_2$, deci $I_2 \in M$.

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Din $X \cdot X' = X' \cdot X$ obţinem $\begin{cases} b^2 = c^2 \\ ac + bd = ab + cd \end{cases}$.

Din a doua ecuaţie rezultă $(a-d)(c-b) = 0$, adică $a = d$ sau $b = c$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. În primul caz, din $X^2 = I_2$

obţinem $\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ 2ac = 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow b = c = 0$ şi $a = d = \pm 1 \Rightarrow X_{1,2} = \pm I_2$, iar în cazul al doilea

obţinem $\begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 + b^2 = 1 \\ b(a+d) = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$ şi $|a| = |d| = 1 \Rightarrow X_{3,4} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$ sau

$a = d = 0$ şi $|b| = 1 \Rightarrow X_{5,6} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$. Deci ecuaţia are 6 soluţii.

2. a) Din calcul $x * (-3) = (-3) * x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) $x * a = a * x = a$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+3)(a+4) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = -4$.

c) Fie $x \in U(\mathbb{Z}) \Rightarrow x'(x+4) = -4x - 15$ (x' fiind simetricul lui x în raport cu $*$). E clar că $x = -4 \notin U(\mathbb{Z})$, iar pentru $x \neq -4$ obţinem $x' = \dfrac{-4x-15}{x+4} = -4 + \dfrac{1}{x+4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+4) \in \{\pm 1\}$, adică $U(\mathbb{Z}) = \{-5, -3\}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Din calcul se obţine $f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x = (x+1)(x+3)e^x$.

b) Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-3, -1\}$, iar din tabelul de variaţie rezultă că $x = -3$ este punct de maxim local şi $x = -1$ este punct de minim local; deci $f(x) \leq f(-3) = \dfrac{4}{e^3}, \forall x \in (-\infty, -1)$.

Prin urmare $f(-4) \leq \dfrac{4}{e^3}$ şi $f(-2) \leq \dfrac{4}{e^3}$, de unde, prin însumare, se obţine concluzia.

c). Avem $f''(x) = (x^2 + 6x + 7)e^x > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deoarece trinomul $x^2 + 6x + 7$ are discriminantul negativ, iar $e^x > 0$. Prin urmare funcţia f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $f(2)=\int_1^2 \frac{t^2-1}{t+1}\,dt=\int_1^2 (t-1)\,dt=\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}$.

b) Funcţia f este crescătoare pe $[1,\infty) \Leftrightarrow f'(x)\geq 0,\ \forall x\geq 1$. Cum

$f'(x)=\left(\int_1^x \frac{t^x-1}{t+1}\,dt\right)'=\frac{x^x-1}{x+1}\geq 0$, oricare ar fi $x\geq 1$, rezultă imediat concluzia.

c) Conform inegalităţii din enunţ avem: $t^x\geq 1+(t-1)x \Rightarrow \frac{t^x-1}{t+1}\geq \frac{x(t-1)}{t+1}$; integrând pe intervalul $[1,x]$ obţinem: $f(x)\geq \int_1^x \frac{t-1}{t+1}\cdot x\,dx=x^2-x-2x\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$ şi cum

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x-2x\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)=+\infty$ concluzia reiese imediat.

TESTUL 21

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a=4, b=6$ şi $c=2^3=8$; cum $2b=a+c$ obţinem cerinţa.

2. Trebuie de fapt să demonstrăm că $\Delta>0,\ \forall a\neq -1$. Într-adevăr

$\Delta=(a+1)^2>0,\ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

3. $\overline{abc}:10\Rightarrow c=0$. Cum cifrele $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$ sunt distincte, ele pot fi alese în $A_6^2=30$ moduri. Deci vor exista 30 de numere cu proprietatea din enunţ.

4. Ecuaţia devine $2^{x+2}=3^{x+2}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}=1=\left(\frac{2}{3}\right)^0\Rightarrow x=-2$.

5. Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=-3$, deci şi panta dreptei d, a cărei ecuaţie se cere, va fi tot $m_d=-3$. Prin urmare $d: y-y_A=m_d(x-x_A)\Rightarrow d: 3x+y+5=0$.

6. Din teorema cosinusului obţinem

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow m(\angle A)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $\det A=1\neq 0,\ \forall a\in\mathbb{R}$, deci matricea A este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

b) Conform relaţiei lui Hamilton Cayley $A^2-(2+a)A+I_2=O_2\Leftrightarrow A^2+I_2=(2+a)A\,\big|\cdot A^{-1}$ şi de aici rezultă concluzia.

c) Sistemul are ca matrice asociată pe A, care, conform lui a), este inversabilă, prin urmare este sistem Cramer, iar soluţia sa unică va fi $(x,y)=(-2,1)$; aşadar ea este independentă de

Scanned with OKEN Scanner

a.

2. a) În primul rând $x \in M \Leftrightarrow (x^2-2) \in M$ şi cum $1 \in M$, va avea sens compunerea numerelor (x^2-2) şi 1. Înlocuind legea „$*$” obţinem ecuaţia $x^2-1=0$, cu soluţiile $x_{1,2} = \pm 1 \in M$.

b) Din calcul, simetricul elementului $x \in M$ este $x' = -x \in M$. Prin urmare $x*(-x) = (-x)*x = e = 0$, $\forall x \in M$. Folosind acum comutativitatea şi asociativitatea legii „$*$” obţinem succesiv: $\left(-\frac{1}{2009}\right)*\left(-\frac{1}{2008}\right)*\ldots*\left(-\frac{1}{1}\right)*\left(\frac{1}{1}\right)*\left(\frac{1}{2}\right)*\ldots*\frac{1}{2009}*\frac{1}{2010} =$

$\left(\left(-\frac{1}{2009}\right)*\frac{1}{2009}\right)*\left(\left(-\frac{1}{2008}\right)*\frac{1}{2008}\right)*\ldots*\left(\left(-\frac{1}{1}\right)*\frac{1}{1}\right)*\frac{1}{2010} = 0*\frac{1}{2010} = \frac{1}{2010}$

c) Cerinţa este echivalentă cu demonstrarea egalităţii $f(x*y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in M$, adică echivalent cu $\frac{2-(x*y)}{2+(x*y)} = \frac{2-x}{2+x}\cdot\frac{2-y}{2+y} \Leftrightarrow \frac{2-\frac{4(x+y)}{xy+4}}{2+\frac{4(x+y)}{xy+4}} = \frac{xy-2x-2y+4}{xy+2x+2y+4}$, afirmaţie adevărată.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, deci nu există asimptotă orizontală. Studiem existenţa asimptotei oblice: $d: y = mx+n$, unde $m = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, fals. Deci graficul funcţiei f nu admite asimptotă spre $-\infty$.

b) Din definiţia derivatei $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$; cum $f'(x) = 2010x^{2009} + 2010^x \ln 2010 + 2010$ obţinem că valoarea limitei este egală cu $\ln 2010 + 2010$.

c) $f''(x) = 2010\cdot 2009x^{2008} + 2010^x \ln^2 2010$, $\forall x \in \mathbb{R}$; evident că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem: $2010\cdot 2009x^{2008} \geq 0$ şi $2010^x \ln^2 2010 \geq 0$, deci $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. a) Funcţia f, fiind continuă pe $\mathbb{R}$, va avea primitive. O primitivă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \geq 0$, $\forall x < 1$, echivalent cu $x^2-3x+2 > 0$, $\forall x < 1$, adevărat.

b) $\int_0^e f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 + (x\ln x - x)\Big|_1^e = \frac{11}{6}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $x>0\Rightarrow e^x>1\Rightarrow f\left(e^x\right)=\ln e^x=x$.

Deci $\int_0^a f\left(e^x\right)dx=4-a\Rightarrow\int_0^a x\,dx=4-a\Rightarrow\frac{a^2}{2}=4-a\overset{a>0}{\Rightarrow}a=2$.

TESTUL 22

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. În caz contrar am avea $2\log_2(x+1)=\log_2 x+\log_2(x+2)\Rightarrow(x+1)^2=x(x+2)$, afirmaţie falsă.

2. Avem $S=x_1+x_2=2m$ şi $P=x_1x_2=2m^2-1$. Deci

$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(2m)^2-2\left(2m^2-1\right)=2$.

3. $\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\ldots+\log_2\frac{7}{8}=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{7}{8}\right)=\log_2\frac{1}{8}=-3$.

4. Există triunghiuri care au 2 vârfuri pe d_1 şi un vârf pe d_2, în număr de $C_6^2\cdot C_5^1=75$, sau triunghiuri care au 2 vârfuri pe d_2 şi un vârf pe d_1, în număr de $C_5^2\cdot C_6^1=60$. În total vor fi 135 de triunghiuri.

5. $\vec{u}+\vec{v}=(a+1)\vec{i}+(a+2)\vec{j}\Rightarrow\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{(a+1)^2+(a+2)^2}=5\Rightarrow a\in\{-5,2\}$.

6. Fie triunghiul ABC în care $AB=3$, $AC=4$ şi $BC=6$. Din teorema cosinusului obţinem

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A\Rightarrow\cos A=-\frac{11}{24}<0\Rightarrow m(\angle A)\in(90^\circ,180^\circ)$, deci $\angle A$ este obtuz.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $M(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & a\\ -4a & -2a+1\end{pmatrix}\Rightarrow\det M(a)=1$, oricare ar fi $M(a)\in G$.

b) $\det M(a)=1\neq 0,\ \forall M(a)\in G$, deci matricea $M(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$. Din calcul $M^{-1}(a)=M(-a)\in G$, oricare ar fi $M(a)\in G$.

c) Se verifică uşor că $M(a)\cdot M(b)=M(b)\cdot M(a)=M(a+b)$, pentru orice matrice $M(a),M(b)\in G$. Folosind şi asociativitatea înmulţirii matricelor obţinem:

$M(-2010)\cdot M(-2009)\cdot\ldots\cdot M(0)\cdot M(1)\cdot\ldots\cdot M(2010)=$

$=\left(M(-2010)\cdot M(2010)\right)\cdot\left(M(-2009)\cdot M(2009)\right)\cdot\ldots\cdot\left(M(-1)\cdot M(1)\right)\cdot M(0)=M(0)=I_2$

.

2. a) $f(1)=1+3m+1+m-4m-2=0\Rightarrow x_1=1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Folosind împărţirea cu rest a polinoamelor obţinem că restul împărţirii lui f la g este 0;

Scanned with OKEN Scanner

deci $g \mid f$.

c) În baza relaţiilor lui Viète: $S_1 = -3m-1$, $S_2 = m$, $S_3 = 4m+2$ şi cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$, folosind ipoteza, vom obţine ecuaţia: $9m^2 + 4m - 13 = 0 \overset{m>0}{\Rightarrow} m = 1$.

În baza punctului a) avem $X-1 \mid f = X^3 + 4X^2 + X - 6 \Rightarrow f = (X-1)(X^2+5X+6)$. Deci f are rădăcinile $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -3$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $f(x) = x(1+\ln x) \Rightarrow f'(x) = 2 + \ln x$, oricare ar fi $x > 0$.

b) $f'(x) = 2 + \ln x = 0 \Rightarrow x_0 = e^{-2}$. Din tabelul de variaţie obţinem că $x_0 = e^{-2}$ este punctul de minim al funcţiei. Avem $x_0 + f(x_0) = e^{-2} + f(e^{-2}) = e^{-2} + e^{-2}(1 + \ln e^{-2}) = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{xf'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(1+\ln x)}{x(2+\ln x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\ln x}{2+\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

2. a) $f(x) = x(1+\ln x) \Rightarrow f'(x) = 2 + \ln x$. Cum $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} + 1 = \ln x \Rightarrow f'(x) = g(x)$, pentru orice $x > 0$. Deci f este o primitivă a funcţiei g.

b) $\int_1^e \dfrac{g(x)}{f(x)}\,dx = \int_1^e \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|\Big|_1^e = 1 + \ln 2$.

c) Utilizând de două ori metoda integrării prin părţi obţinem:

$V(C_h) = \pi\int_1^e g^2(x)\,dx = \pi\int_1^e (\ln^2 x + 4\ln x + 4)\,dx = \pi(5e-2)$.

TESTUL 23

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.

$\dfrac{x^2-x-1}{x^2+1} < \dfrac{1}{2} \overset{x^2+1>0}{\Rightarrow} 2(x^2-x-1) < x^2+1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow x \in (-1,3) \cap \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0,1,2\}$.

2. Mulţimea are elementele în progresie aritmetică de raţie $r = 4$. Avem $a_n = a_1 + (n-1)r \Leftrightarrow 1 + 4(n-1) = 101 \Rightarrow n = 26$. Atunci suma cerută va fi

$S_{26} = \dfrac{26(a_1 + a_{26})}{2} = 13(1+101) = 1326$.

Scanned with OKEN Scanner

3. $\log_6 9 = \log_6 3^2 = 2\log_6 3 = \frac{2}{\log_3 6} = \frac{2}{\log_3 (2\cdot 3)} = \frac{2}{1+\log_3 2} = \frac{2}{a+1}$.

4. $C_2^2 = 1 \geq 0^2$, $C_3^2 = 3 \geq 1^2$, $C_4^2 = 6 \geq 2^2$, $C_5^2 = 10 \geq 3^2$, $C_6^2 = 15 \leq 4^2$; deci probabilitatea este $\frac{1}{5}$.

5. $m(\angle A) = 120^\circ$. Din teorema sinusurilor

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin(180^\circ - 120^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = 1.$$

6. $\sin 160^\circ + \cos 110^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) - \cos(180^\circ - 110^\circ) = \sin 20^\circ - \cos 70^\circ = 0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow A \in M$.

b) $X \in M \Leftrightarrow X^2 = I_2 \Leftrightarrow (X^2)^t = I_2^t = I_2 \Leftrightarrow (X\cdot X)^t = I_2 \Leftrightarrow X^t \cdot X^t = I_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (X^t)^2 = I_2 \Leftrightarrow X^t \in M$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow X - X^t = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$. Dacă $X - X^t \in M$ rezultă că $(X - X^t)^2 = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow -(b-c)^2 \cdot I_2 = I_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(b-c)^2 = 1$, fals.

2. a) $(X+1) \mid f \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$.

b) $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0 \Rightarrow x_k^3 = \alpha x_k$, $\forall k \in \{1,2,3\}$. Însumând ultimele 3 relaţii şi ţinând seama de prima relaţie a lui Viète $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ rezultă concluzia.

c) $f(a) = 4 \Rightarrow a^3 - a^2 - 4 = 0$. Căutând eventualele soluţii întregi printre divizorii termenului liber găsim $a = 2 \in \mathbb{N}$.

Deci $a - 2 \mid a^3 - a^2 - 4 \Rightarrow a^3 - a^2 - 4 = (a-1)(a^2 + a + 2)$. Însă ecuaţia $a^2 + a + 2 = 0$ nu are soluţii reale. Aşadar $a = 2 \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Calcul direct.

b) $f'(x) = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = -1 \notin (0,\infty)$. Din tabelul de variaţie obţinem că funcţia f este crescătoare pe $(0,\infty)$. Deci $2010 < 2011 \Rightarrow f(2010) \leq f(2011) \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow 2009\sqrt{2011} \le 2010\sqrt{2010}$.

c) Avem $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{\frac{1}{x}}}=\frac{1-x}{\sqrt{x}}=-f(x)\Rightarrow f\left(\frac{1}{x^{2010}}\right)=-f\left(x^{2010}\right)$. Deci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x^{2010}\right)+x^{2010}+f\left(\frac{1}{x^{2010}}\right)}{x^{2010}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x^{2010}\right)+x^{2010}-f\left(x^{2010}\right)}{x^{2010}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2010}}{x^{2010}}=1.$$

2. a) f este continuă pe $(-\infty,1),(1,\infty)$ şi este continuă şi în punctul $x=1$ pentru că $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=0$, deci este continuă pe $\mathbb{R}$, prin urmare admite primitive.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+x-2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^1=-\frac{7}{6}$.

c) $x\ge 0\Rightarrow e^x\ge 1\Rightarrow g(x)=f\left(e^x\right)=\left(e^x+1\right)\ln e^x=xe^x+x>0$.

Deci aria cerută va fi: $A=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\left(xe^x+x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+(x-1)e^x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$.

TESTUL 24

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Condiţia din enunţ este echivalentă cu

$$\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l|l}m^2-4m<0 & \\ m>0 & \end{array}\right.\Rightarrow m\in(0,4)\cap\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1,2,3\}.$$

2. Din condiţiile de existenţă $\Rightarrow x>0$. Ecuaţia devine $\left(1+\log_2 x\right)^2-\frac{1}{2}\log_2 x=8\overset{\log_2 x=t}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 2t^2+3t-14=0\Rightarrow t\in\{-7,2\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{1}{128},2\right\}$, ambele soluţii fiind valabile.

3. $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|\Rightarrow|A\cap B|=6$. Cum $|B|=|B-A|+|A\cap B|\Rightarrow|B-A|=6$.

4. Cum $C_7^0=C_7^7=1$, $C_7^1=C_7^6=7$, $C_7^2=C_7^5=21$, $C_7^3=C_7^4=35$ înseamnă că mulţimea dată are doar 4 elemente distincte, dintre care numai 3 sunt divizibile cu 7; deci probabilitatea este $\frac{3}{4}$.

5. Panta dreptei de ecuaţie $2x-y-5=0$ este $m=2$, deci panta dreptei d, a cărei ecuaţie se cere, va fi $m_d=-\frac{1}{2}$ (câtă vreme $d_1\perp d_2\Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1$). Prin urmare ecuaţia dreptei d

Scanned with OKEN Scanner

va fi $d: y-y_A = m_d(x-x_A) \Rightarrow d: x+2y+4=0$.

6. $\sin 130^\circ \cdot \cos 140^\circ + \sin^2 50^\circ = \sin 50^\circ \cdot (-\cos 40^\circ) + \sin^2 50^\circ = -\sin^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ = 0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $M(x) = \begin{pmatrix} 3x+1 & x \\ -9x & -3x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M(x) = 1 \neq 0$, deci oricare $M(x) \in G$ este inversabilă.

b) Se arată că $A^2 = O_2$, deci

$M(x) \cdot M(y) = (xA + I_2)(yA + I_2) = (x+y)A + I_2 = M(x+y)$, pentru orice matrice $M(x), M(y) \in G$.

c) Se verifică, ţinând seama de b), că: $I_2 = M(0) \in G$ şi $(M(x))^{-1} = M(-x)$, deci $(M(2010))^{-1} = M(-2010)$.

2. a) Avem $f(\hat{4}) = \hat{4} + \hat{4}m + m + \hat{4} = \hat{3} \neq \hat{0}$, oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}_5$.

b) $X+\hat{2} \mid f \Leftrightarrow f(\hat{3}) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{2} + \hat{3}m + m + \hat{4} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{4}m = \hat{4} \Leftrightarrow m = \hat{1}$

c) $m = \hat{1} \Rightarrow f = X^3 + X = X(X^2 + \hat{1})$. Cum din a) $X+\hat{2} \mid f \Leftrightarrow m = \hat{1}$ rezultă de aici că $X+\hat{2} \mid X^2 + \hat{1}$, deci $X^2 + \hat{1} = (X+\hat{2})(X+\hat{3}) \Rightarrow f = X(X+\hat{2})(X+\hat{3})$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Din definiţia derivatei rezultă că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$; cum $f'(x) = (x^2 + x - 2)e^x$ obţinem că valoarea limitei este egală cu $f'(0) = -2$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x - 1)e^x \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x - 1}{e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} -\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0$. Deci dreapta $d: y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre $-\infty$.

c) $f'(x) = (x^2 + x - 2)e^x = 0 \Rightarrow x \in \{-2, 1\}$. Din tabelul de variaţie al funcţiei rezultă că $x = -2$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local. Câtă vreme $f(x) \leq f(-2) = \dfrac{5}{e^2}, \forall x < 1$ şi $f(x) \geq f(1) = -e, \forall x > 1$, scăzând ultimele două inegalităţi obţinem concluzia.

2. a) Fie F o primitivă a funcţiei f. Atunci F este convexă pe intervalul $(0, \infty) \Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow F''(x)=f'(x)=\frac{1}{x}\geq 0,\ \forall x>0$ (adevărat).

b) Avem $\int_1^e f\left(x\cdot e^x\right)dx=\int_1^e (x+\ln x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\ln x-x\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{2}$.

c) $V\left(C_g\right)=\pi\int_1^e g^2(x)\,dx=\pi\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx=\frac{\pi(2e-5)}{e}$.

TESTUL 25

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Fie $a_1=5, a_2=11,\ldots,a_n=x$ termenii sumei din membrul stâng, evident în progresie aritmetică de raţie $r=6$. Cum $a_n=a_1+(n-1)r\Rightarrow x=5+6(n-1)=6n-1$. Din ipoteză obţinem: $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=320\Rightarrow\frac{n(a_1+a_n)}{2}=320\Rightarrow\frac{n(5+x)}{2}=320\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{n(6n+4)}{2}=320\Rightarrow n=10\Rightarrow x=59$.

2. Condiţia ca parabola să taie axa Ox în 2 puncte distincte este $\Delta>0\Leftrightarrow(m+2)^2>0\Leftrightarrow m\neq -2$. Distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axa Ox este:

$|x_1-x_2|=6\Big|^2\Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=36\Leftrightarrow S^2-4P=36\Leftrightarrow(-m)^2-4(-m-1)=36\Rightarrow$

$\Rightarrow m\in\{-8,4\}$.

3. Obţinem succesiv:

$\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x\Leftrightarrow 2^{-x+1}+1=2^x\overset{2^x=t>0}{\Rightarrow}\frac{2}{t}+1=t\Leftrightarrow t^2-t-2=0\overset{t>0}{\Rightarrow}t=2\Rightarrow x=1$..

4. Numărul tuturor numerelor de 3 cifre ce se pot forma cu elemente din mulţimea $\{1,2,3,4,5,6\}$ este $6\cdot6\cdot6=216$, dintre care doar $A_6^3=120$ au cifrele distincte. Prin urmare cele care nu au cifrele distincte sunt în număr de $216-120=96$; aşadar probabilitatea va fi egală cu $\frac{96}{216}=\frac{4}{9}$.

5. Fie O centrul hexagonului. Avem

$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|3\cdot\overrightarrow{AO}\right|=3\cdot AO=12$.

6. Avem $\sin 91^\circ=\sin\left(180^\circ-91^\circ\right)=\sin 89^\circ=\cos\left(90^\circ-89^\circ\right)=\cos 1^\circ$. Analog $\sin 93^\circ=\cos 3^\circ$, $\sin 95^\circ=\cos 5^\circ,\ldots,\sin 179^\circ=\cos 89^\circ$, de unde, prin sumare, obţinem că egalitatea este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $\det A \overset{C_1+C_2+C_3\to C_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-a & a-b \end{vmatrix} = 0$.

b) Prin calcul direct $A^2 = \begin{pmatrix} x^2+2yz & y^2+2zx & z^2+2xy \\ z^2+2xy & x^2+2yz & y^2+2zx \\ y^2+2zx & z^2+2xy & x^2+2yz \end{pmatrix}$, unde $x=a-b, y=b-c$ şi $z=c-a$, deci suma elementelor matricei A^2 este $3\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\right)=3(x+y+z)^2=0$.

c) Datorită simetriei toţi minorii de ordinul 2 sunt egali; trebuie să arătăm că unul oarecare e nenul: $\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-a & a-b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \neq 0$, pentru că $a,b,c \in \mathbb{R}$, distincte două câte două.

2. a) Relaţiile lui Viète: $S_1=0,\ S_2=p-2,\ S_3=p-1$ ne dau $x_1^2+x_2^2+x_3^2=S_1^2-2S_2=4 \Rightarrow 2(p-2)\vdots 4$.

Dacă p ar fi prim impar, atunci $2(p-2)\vdots 4$ ar fi falsă. Deci $p=2$, valoare care verifică $2(p-2)\vdots 4$.

b) $X-p+1 \mid f \Leftrightarrow f(p-1)=0 \Leftrightarrow (p-1)\left(p^2-3p+2\right)=0 \overset{p\geq 2}{\Rightarrow} p=2$, care este număr prim.

c) Fie, prin absurd, $a \in \mathbb{Z}$ rădăcină dublă a polinomului f. Atunci:

$\begin{cases} f(a)=0 \\ f'(a)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3-(p-2)a-p+1=0 \\ 3a^2-(p-2)=0 \end{cases} \Rightarrow 2a^3+3a^2+1=0$, ecuaţie care nu are soluţii întregi, pentru că, dacă ar avea, acestea s-ar găsi în mulţimea $\{-1,1\}$, fals.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x\left(1-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = \infty$. Deci nu există asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre ∞. Studiem existenţa asimptotei oblice: $d: y=mx+n$, unde $m = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1$, iar $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(-\ln x)=-\infty$, fals, deci nu există nici oblică.

b) Avem $f'(x)=1-\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=\frac{1}{x^2}>0, \forall x>0$; prin urmare funcţia f' este crescătoare pe $(0;\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $f'(x)=1-\frac{1}{x}=0\Rightarrow x=1$. Din tabelul de variaţie al funcţiei rezultă că $x=1$ este punct de minim local. Deci $f(x)\geq f(1)=1\Leftrightarrow \ln x\leq x-1,\ \forall x>0$. Dându-i, în inegalitatea precedentă, lui x valorile $2,3,\ldots,2010$ şi sumând obţinem concluzia.

2. a) $I_1=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)'dx=\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)\Big|_0^1=\ln\frac{e+1}{2}$.

b) Avem $I_n+I_{n+1}=\int_0^1\frac{e^{(n+1)x}+e^{nx}}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^{nx}\left(e^x+1\right)}{e^x+1}dx=\int_0^1 e^{nx}dx=\frac{e^{nx}}{n}\Big|_0^1=\frac{e^n-1}{n}$.

c) Au loc implicaţiile

$$0\leq x\leq 1\Leftrightarrow 2\leq e^x+1\leq e+1\Leftrightarrow \frac{e^{nx}}{e+1}\leq\frac{e^{nx}}{e^x+1}\leq\frac{e^{nx}}{2}\Rightarrow\int_0^1\frac{e^{nx}}{e+1}dx\leq I_n\leq\int_0^1\frac{e^{nx}}{2}dx\Rightarrow$$

$\frac{e^n-1}{n(e+1)}<I_n<\frac{e^n-1}{2n}$; pentru $n=2010$ obţinem relaţia cerută.

TESTUL 26

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x}\geq 0{,}25\Leftrightarrow 2^{-x^2-x}\geq 2^{-2}\overset{2^t\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2+x-2\leq 0\Rightarrow x\in[-2,1]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-2,-1,0,1\}$.

2. $\left\{\log_2\frac{3}{2}\right\}=\left\{\log_2\frac{3}{4}\right\}\Leftrightarrow\log_2\frac{3}{2}-\log_2\frac{3}{4}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)=\log_2 2=1\in\mathbb{Z}$, adevărat.

3. $\left|x^2-x-1\right|=1\Leftrightarrow x^2-x-1=\pm 1$. Din $x^2-x-1=1$ obţinem $x\in\{-1,2\}$, iar din $x^2-x-1=-1$ obţinem $x\in\{0,1\}$. Deci $x\in\{-2,0,1,2\}$.

4. Numărul tuturor submulţimilor de 3 elemente este $C_{10}^3=120$. Submulţimea numerelor prime din mulţimea $\{0,1,2,\ldots,9\}$ este $\{2,3,5,7\}$, deci numărul tuturor submulţimilor ce conţin 3 numere prime va fi $C_4^3=4$; aşadar probabilitatea este egală cu $\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$.

5. Fie $\{O\}=(AC)\cap(BD)$ şi $M\in(AB)$, $N\in(CD)$ astfel încât $OM\perp AB$ şi $ON\perp CD$ (evident M şi N sunt mijloacele bazelor trapezului). Avem

$$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|2\cdot\overrightarrow{MO}+2\cdot\overrightarrow{ON}\right|=\left|2\cdot\overrightarrow{MN}\right|=2\cdot MN=8.$$

6. Avem $\sin^2 130^\circ+\sin^2 140^\circ=\sin^2\left(180^\circ-130^\circ\right)+\sin^2\left(180^\circ-140^\circ\right)=$

$=\sin^2 50^\circ+\sin^2 40^\circ=\cos^2\left(90^\circ-50^\circ\right)+\sin^2 40^\circ=\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ=1$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $A+A^t=\begin{pmatrix}1 & 2010\\ -2010 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2010\\ 2010 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2I_2$.

b) Prin calcul direct se arată că dacă $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M$, atunci $X=\begin{pmatrix}1 & b\\ -b & 1\end{pmatrix}, b\in\mathbb{R}$. Fie

$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ -b & 1\end{pmatrix}$ două matrice din M; atunci

$A\cdot B=\begin{pmatrix}1-ab & a+b\\ -(a+b) & 1-ab\end{pmatrix}\in M\Rightarrow\begin{cases}1-ab=2\\ a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=-b=\pm1$, adică $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi

$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=A^t$ sau invers.

c) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}\in M$. Atunci

$\det(A+xI_2)=\det A-1\Rightarrow\begin{vmatrix}1+x & a\\ -a & 1+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{vmatrix}-1\Rightarrow x=-1$.

2. a) $H=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{3},\hat{4}\right\}$.

b) Avem $f\left(\hat{0}\right)=\hat{4}, f\left(\hat{1}\right)=\hat{1}, f\left(\hat{2}\right)=\hat{4}, f\left(\hat{3}\right)=\hat{1}, f\left(\hat{4}\right)=\hat{4}, f\left(\hat{5}\right)=\hat{1}$, deci

$\left\{f(a)\,\middle|\,a\in\mathbb{Z}_6\right\}=\left\{\hat{1},\hat{4}\right\}\subset H$.

c) Din punctul anterior rezultă că polinomul f nu are rădăcini simple, deci dacă este reductibil va fi pătrat perfect. Deci căutăm $a,b\in\mathbb{Z}_6[X]$ astfel încât $(aX+b)^2=\hat{3}X^2+\hat{4}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2=\hat{3}\\ \hat{2}ab=\hat{0}\\ b^2=\hat{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\hat{3}\\ ab\in\left\{\hat{0},\hat{3}\right\}\\ b\in\left\{\hat{2},\hat{4}\right\}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\hat{3}\\ b=\hat{2}\end{cases}\text{ sau }\begin{cases}a=\hat{3}\\ b=\hat{4}\end{cases}.\text{ Deci } f=\left(\hat{3}X+\hat{4}\right)^2\text{ sau}$$

$f=\left(\hat{3}X+\hat{2}\right)^2$, în ambele situaţii ambii factori ai descompunerii având coeficienţi în H.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Tangenta la grafic în punctul de abscisă 1 are ecuaţia $d: y-f(1)=f'(1)(x-1)$. Cum $f'(x)=x(2\ln x+1)$, oricare ar fi $x>0$. Deci $f(1)=0,\ f'(1)=1\Rightarrow d: x-y+1=0$.

b) $f'(x)=x(2\ln x+1)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}>0$. Din tabelul de variaţie al funcţiei rezultă că $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ este punct de minim local.

c) Din punctul anterior obţinem

$$f(x)\geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e},\ \forall x>0\Rightarrow x^2\ln x\geq-\frac{1}{2e}\Rightarrow 2e\ln x\geq-\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^{2e}\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\geq 1.$$

2. a) Se verifică prin calcul direct că $f'(x)=g(x)$, pentru orice $x>0$.

b) Avem $\displaystyle\int_1^e f^{2010}(x)\cdot g(x)\,dx=\int_1^e f^{2010}(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{f^{2011}(x)}{2011}\Big|_1^e=\frac{1}{2011}\cdot\left(\frac{e-2}{2e}\right)^{2011}$.

c) $h(x)=e^x\cdot f\left(e^x\right)=e^x\cdot\left(1-\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{x}{2}\right)=e^x-1-\dfrac{1}{2}\cdot xe^x$. Se arată uşor că $h(x)>0,\ \forall x\in[0,1]$, deci

$$\int_0^1 h(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x-1-\frac{1}{2}\cdot xe^x\right)dx=\left(e^x-x-\frac{e^x(x-1)}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{2e-5}{2}.$$

TESTUL 27

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Cum $x\in(-1,1)$, rezultă că $x+1>0$ şi $1-x>0$. Deci

$E(x)=\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{1-2x+x^2}=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(1-x)^2}=$

$=|x+1|+|1-x|=x+1+1-x=2$, prin urmare $E(x)$ este constantă.

2. Vârful parabolei $y=x^2-(m+1)x+m+1$ este $V\left(\dfrac{m+1}{2},-\dfrac{m^2-2m-3}{4}\right)$. Acesta aparţine dreptei de ecuaţie $x-y=0\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m^2-2m-3}{4}=0\Rightarrow m\in\{-1,1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. $2^x+3^x=3^{x+1}-2^{x+1}\Leftrightarrow 2^x+2^{x+1}=3^{x+1}-3^x\Leftrightarrow 2^x\cdot 3=3^x\cdot 2\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^1\Leftrightarrow x=1$.

4. $\log_2 1+2^1<1!$ (falsă), $\log_2 2+2^2<2!$ (falsă), $\log_2 3+2^3<3!$ (falsă), $\log_2 4+2^4<4!$ (adevărată), $\log_2 5+2^5<5!$ (adevărată); deci probabilitatea este $\frac{2}{5}$.

5. În baza regulii paralelogramului obţinem: $\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=DB$. Din teorema cosinusului avem: $DB^2=AD^2+AB^2-2\cdot AD\cdot AB\cdot\cos\left(\angle DAB\right)\Rightarrow DB=\sqrt{21}$.

6. Avem
$\sin 1^\circ-\cos 91^\circ=\sin 1^\circ+\cos\left(180^\circ-91^\circ\right)=\sin 1^\circ+\cos 89^\circ=\sin 1^\circ+\sin\left(90^\circ-89^\circ\right)=2\sin 1^\circ$ şi analog $\sin 2^\circ-\cos 92^\circ=2\sin 2^\circ$. Aşadar valoarea fracţiei este 4, prin urmare număr natural.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Calcul direct sau relaţia lui Hamilton Cayley.

b) Din punctul a) se obţine $A^2-5A=2I_2\Rightarrow A\cdot\left(\frac{1}{2}(A-5I_2)\right)=\left(\frac{1}{2}(A-5I_2)\right)\cdot A=I_2$, deci matricea $\frac{1}{2}(A-5I_2)$ este inversa matricei A.

c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Din $AX=XA$ rezultă sistemul $\begin{cases}b=\frac{2c}{3}\\ d=a+c\end{cases}$. Deci orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & \frac{2c}{3}\\ c & a+c\end{pmatrix}$, cu $a,c\in\mathbb{R}$ verifică ecuaţia din enunţ.

2. a) Avem $f(1)=1^3+a\cdot 1^2-a\cdot 1-1=0\Rightarrow x_1=1$ este rădăcină a polinomului f ,oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

b) Din punctul a) $\Rightarrow X-1\,|\,f\Rightarrow f=(X-1)\left(X^2+(a+1)X+1\right)$. Pentru ca f să aibă toate rădăcinile reale trebuie ca polinomul $g=X^2+(a+1)X+1$ să aibă ambele rădăcini reale, adică $\Delta=a^2+2a-3\geq 0\Leftrightarrow a\in(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$.

c). Din punctul a) $\Rightarrow x_1=1\in\mathbb{Z}$. Deci rădăcinile polinomului $g=X^2+(a+1)X+1$ trebuie să fie întregi; cum $g\in\mathbb{Z}[X]\Rightarrow x_{2,3}\in\{-1,1\}$. Dacă $x=1$ este rădăcină a lui g, atunci $a=-3\in\mathbb{Z}$, caz în care rădăcinile lui f vor fi $x_1=x_2=x_3=-1\in\mathbb{Z}$, iar dacă $x=-1$ este rădăcină a lui g, atunci $a=1\in\mathbb{Z}$, caz în care rădăcinile lui f vor fi $x_1=1\in\mathbb{Z},\ x_2=x_3=-1\in\mathbb{Z}$. Aşadar $x_{1,2,3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a\in\{-3,1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)=\infty-(-\infty)=\infty$.

b) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}>0$, oricare ar fi $x>0$. Deci f' este crescătoare pe $(0,\infty)$.

c) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0,\ \forall x>0\Rightarrow f\searrow$ pe $(0,\infty)$. Pentru

$x\in(0,1]\Rightarrow x\le\frac{1}{x}\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)\ge f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{x}-\ln x\ge x-\ln\frac{1}{x}\Rightarrow 2\ln x\le\frac{1}{x}-x$.

2. a) f este o primitivă a funcţiei $g\Leftrightarrow f'(x)=g(x)$, oricare ar fi $x>0$, adevărat (se verifică prin calcul direct).

b) Avem $\int\limits_1^e\frac{g(x)}{f^{2010}(x)}dx=\int\limits_1^e f^{-2010}(x)\cdot f'(x)dx=\left.\frac{f^{-2009}(x)}{-2009}\right|_1^e=\frac{1}{2009}\left(1-\frac{1}{\left(\sqrt{e}+1\right)^{2009}}\right)$.

c)

$$\int\limits_{2010}^{2011} g(f(x))\cdot g(x)dx=\int\limits_{2010}^{2011} g(f(x))\cdot f'(x)dx=f(f(x))\Big|_{2010}^{2011}=f(f(2011))-f(f(2010)).$$

TESTUL 28

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$4f(x)+5\ge 4x+5-9\Leftrightarrow 4(x^2-2)-4x+9\ge 0\Leftrightarrow(2x-1)^2\ge 0$, adevărat pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Din ipoteză rezultă

$2\log_2(x+1)=\log_2 x+\log_2(x+3)\Rightarrow\log_2(x+1)^2=\log_2(x(x+3))\Rightarrow$

$\Rightarrow(x+1)^2=x(x+3)\Rightarrow x=1>0$

3. $2^{x+2}+2^{-x+1}=9\overset{2^x=t>0}{\Rightarrow}4t+\frac{2}{t}=9\Rightarrow 4t^2-9t+2=0\Rightarrow t\in\left\{\frac{1}{4},2\right\}\Rightarrow x\in\{-2,1\}$.

4. Numărul tuturor submulţimilor mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$ este $2^5=32$. Submulţimea numerelor impare este $\{1,3,5\}$, deci numărul tuturor submulţimilor ce conţin numai

Scanned with OKEN Scanner

elemente impare va fi $2^3=8$; aşadar probabilitatea este egală cu $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.

5. Fie O centrul hexagonului. Avem

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}=2\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{EO}\right)=2\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OB}\right)=\vec{0}$.

6. Avem $A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{AD\cdot BC}{2}\Rightarrow AD=AB\cdot AC\cdot\frac{\sin A}{BC}$; din teorema sinusurilor $\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow\frac{\sin A}{BC}=\frac{1}{2R}$. Înlocuind acum în relaţia anterioară rezultă concluzia.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Calcul direct sau relaţia lui Hamilton Cayley.

b) Din a) se obţine $A\cdot\left(\frac{1}{a^2+1}\cdot A\right)=\left(\frac{1}{a^2+1}\cdot A\right)\cdot A=I_2$, deci

$A^{-1}=\frac{1}{a^2+1}\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2+1} & \frac{a}{a^2+1}\\ \frac{a}{a^2+1} & -\frac{1}{a^2+1}\end{pmatrix}$. Dacă $A^{-1}\in M$, atunci $\frac{1}{a^2+1}=1\Rightarrow a=0$, fals, căci $a\in\mathbb{Z}^*$.

c) Matricea A este inversabilă, deci $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a+1}{a^2+1}\\ y=\frac{a-1}{a^2+1}\end{cases}$. Cum $a,x,y\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0$ rezultă de aici că $a\in\{-1,1\}$. Obţinem soluţiile $(a,x,y)=(1,1,0)$, adică $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $(a,x,y)=(-1,0,-1)$, adică $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

2. a) Avem $f(1)=1^3-m\cdot 1+m-1=0\Rightarrow x_1=1$ este rădăcină a polinomului f, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

b) Din punctul a) $\Rightarrow X-1\,|\,f\Rightarrow f=(X-1)\left(X^2+X+1-m\right)$. Pentru ca f să aibă toate rădăcinile reale trebuie ca polinomul $g=X^2+X+1-m$ să aibă ambele rădăcini reale, adică $\Delta=3-4m\geq 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$.

c). Din relaţiile lui Viète avem că $S_1=x_1+x_2+x_3=0$. Faptul că x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile lui f implică $x_k^3-mx_k+m-1=0,\ \forall\ k\in\{1,2,3\}$, relaţii care însumate ne conduc la: $x_1^3+x_2^3+x_3^3=mS_1+3(1-m)=3(1-m)$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ este divizibilă cu 3, oricare ar fi $m\in\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=x^{2009}\Rightarrow f''(x)=2009x^{2008}\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Deci f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Este cunoscut faptul că tangenta dusă într-un punct la graficul unei funcţii derivabile are panta egală cu valoarea derivatei în acel punct. Prin urmare trebuie demonstrat că $f'(1)\cdot f'(-1)=-1\Leftrightarrow 1^{2009}\cdot(-1)^{2009}=-1$, adevărat.

c) $\lim\limits_{x\to 2010}\dfrac{f'(x)-f'(2010)}{f(x)-f(2010)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to 2010}\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=\dfrac{f''(2010)}{f'(2010)}=\dfrac{2009}{2010}$.

2. a) f este continuă pe $(-\infty,0),(0,\infty)$ şi este continuă şi în punctul $x=0$ pentru că $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=0$, deci este continuă pe $\mathbb{R}$, prin urmare admite primitive.

b) Avem $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx+\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{0}+\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}=\dfrac{17}{12}$.

c) Pentru $x\in[-2010,0]\Rightarrow x^{2009}\leq 0\Rightarrow f\left(x^{2009}\right)=\sqrt[3]{x^{2009}}\leq 0\Rightarrow\int\limits_{-2010}^{0}f\left(x^{2009}\right)dx\leq 0$.

Pentru $x\in[0,2010]\Rightarrow x^{2010}\geq 0\Rightarrow f\left(x^{2010}\right)=\sqrt{x^{2010}}\geq 0\Rightarrow\int\limits_{0}^{2010}f\left(x^{2010}\right)dx\geq 0$. Din ultimele două inegalităţi rezultă concluzia.

TESTUL 29

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Din ipoteză $a^2=bc\Rightarrow-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}=-1\Rightarrow x_1x_2\cdot(x_1+x_1)=-1$. Deci expresia dată este egală cu -1.

2. Din $a=1>0$ rezultă că punctul de minim al parabolei este $x_V=-\dfrac{b}{2a}=1005$. Deci $f(x)\geq f(1005),\forall x\in\mathbb{R}$.

3. Condiţia de existenţă: $4^x-2>0$. Din ecuaţie obţinem

$4^x-2=2^x\overset{2^x=t>0}{\Rightarrow}t^2-t-2=0\overset{t>0}{\Rightarrow}t=2\Rightarrow$

$\Rightarrow x=1$, valoare ce verifică condiţia de existenţă.

4. $1+C_{1+1}^2<2^1$ fals, $2+C_{2+1}^2<2^2$ fals, $3+C_{3+1}^2<2^3$ fals, $4+C_{4+1}^2<2^4$ adevărat, $5+C_{5+1}^2<2^5$ adevărat. Deci probabilitatea este $\dfrac{2}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Mijlocul segmentului BC este $M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=M(2,0)$. Prin urmare ecuaţia medianei dusă din punctul A va fi $AM:\frac{x-x_A}{x_M-x_A}=\frac{y-y_A}{y_M-y_A}\Rightarrow AM:4x+y-8=0$.

6. Din teorema sinusurilor $\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow BC=2R\sin A$. Cum $\sin^2 A+\cos^2 A=1\overset{\sin A>0}{\Rightarrow}\sin A=\frac{4}{5}$. Înlocuind acum în relaţia anterioară rezultă $BC=16$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Calcul direct sau relaţia lui Hamilton Cayley.

b) Din a) obţinem $A\cdot(A+I_2)=(A+I_2)\cdot A=I_2\Rightarrow A^{-1}=A+I_2$.

$A^{-1}\in M\Rightarrow\left(A^{-1}\right)^2+A^{-1}=I_2\Rightarrow$

$\Rightarrow(A+I_2)^2+A+I_2=I_2\Rightarrow A^2+3A+I_2=O_2\Rightarrow I_2-A+3A+I_2=O_2\Rightarrow A=-I_2$.

c) Cum $tr\,A=tr\,A'$ şi $\det A=\det A'$, conform definiţiei mulţimii M şi a relaţiei lui Hamilton Cayley rezultă concluzia.

2. a) Avem $x*x\geq -1\Leftrightarrow x^2+2x\geq -1\Leftrightarrow(x+1)^2\geq 0$ adevărat, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Observăm că $x*y=xy+x+y=(x+1)(y+1)-1$, deci

$\left(\sqrt[3]{2010}-1\right)*\left(\sqrt[3]{2010}-1\right)*\left(\sqrt[3]{2010}-1\right)=\left(\sqrt[3]{2010^2}-1\right)*\left(\sqrt[3]{2010}-1\right)=2009\in\mathbb{N}$.

c). Elementul neutru este $e=0\in\mathbb{Z}$. Fie $x\in U(\mathbb{Z})\Rightarrow x'(x+1)=-x$ (x' fiind simetricul lui x în raport cu $*$). E clar că $x=-1\notin U(\mathbb{Z})$, iar pentru $x\neq -1$ obţinem

$x'=\frac{-x}{x+1}=-1+\frac{1}{x+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow(x+1)\in\{\pm 1\}$, adică $U(\mathbb{Z})=\{-2,0\}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=-1$. Deci dreapta de ecuaţie $y=-1$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre $-\infty$.

b) Funcţia f este continuă şi derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty,0)$, respectiv $(0,\infty)$.

Avem $f'(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ \frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$. Evident că ambele ramuri ale funcţiei f' sunt pozitive şi de aici concluzia.

c) $x<0\Rightarrow 0<e^x<1\Rightarrow f\left(e^x\right)=\ln e^x=x$, iar $f(x)=e^x-1,\ \forall x<0$. Folosind acum, eventual, inegalitatea remarcabilă $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă concluzia. Ca alternativă se demonstrează că $g(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=e^x-x-1$.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+x\cdot e^x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+(x-1)\cdot e^x\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3}$.

b) Avem $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_1^e\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left(x+\frac{\ln^2 x}{x}\right)\Big|_1^e=\frac{2e-1}{2}$.

c) Mulţimea primitivelor a funcţiei f este $\int f(x)\,dx=\frac{x^2}{2}+e^x+C$. Cum $F(0)=1\Rightarrow c=0\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}+e^x$. Deci $\int_0^1\frac{f(x)+f'(x)}{F(x)+f(x)}dx=\int_0^1\frac{\left(F(x)+f(x)\right)'}{F(x)+f(x)}dx=\left(\ln\left(F(x)+f(x)\right)\right)\Big|_0^1=$

$=\ln\left(F(1)+f(1)\right)-\ln\left(F(0)+f(0)\right)=\ln\frac{2e+3}{4}$.

TESTUL 30

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Din ipoteză $b^2=ac$. Dar $\Delta=b^2-4ac=b^2-4b^2=-3b^2<0$, deci ecuaţia nu are soluţii reale.

2. Funcţia este crescătoare pe intervalul $\left[\frac{a+1}{2},\infty\right)$. Deci $x_V=\frac{a+1}{2}\le a\Leftrightarrow a\ge 1$. Aşadar $a_{\min}=1$.

3. Condiţii de existenţă: $x^2-x-1\ge 0$ şi $3-x\ge 0$. Din ecuaţie obţinem $\sqrt{x^2-x-1}+x=3\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}=3-x\Leftrightarrow x^2-x-1=(3-x)^2\Leftrightarrow x=2$, valoare ce verifică ambele condiţii de existenţă.

4. Numărul tuturor submulţimilor mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$ este $2^5=32$. Putem extrage submulţimi cu 0, 2 sau 4 elemente, în număr de $C_5^0+C_5^2+C_5^4=2^4=16$; aşadar probabilitatea este egală cu $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$.

5. Centrul de greutate al triunghiului ABC este $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)=G(3,-2)$.

Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=-\frac{2}{3}$, deci panta dreptei $d\perp BC$, a cărei ecuaţie se cere, va fi $m_d=\frac{3}{2}$. Prin urmare $d: y-y_G=m_d(x-x_G)\Rightarrow d: 3x-2y-13=0$.

6. $\left(\sin 1^\circ+\cos 179^\circ\right)\cdot\left(\sin 2^\circ+\cos 178^\circ\right)\cdot\ldots\cdot\underbrace{\left(\sin 45^\circ+\cos 135^\circ\right)}_{=0}\cdot\ldots\cdot\left(\sin 179^\circ+\cos 1^\circ\right)=0$, câtă

Scanned with OKEN Scanner

vreme $\cos 135^\circ = -\cos\left(180^\circ - 135^\circ\right) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin 45^\circ \Rightarrow \sin 45^\circ + \cos 135^\circ = 0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $M(x,y) = \begin{pmatrix} y-x & x \\ -x & y+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det M(x,y) = y^2$. Pentru $y = 2010$ obţinem cerinţa.

b) $A^2 = O_2$ (din calcul sau folosind Cayley Hamilton). Deci:

$M(x,y)\cdot M(z,t) = (xA + yI_2)(zA + tI_2) = (xt + yz)A + ytI_2 = M(xt + yz, yt) \in G$.

c)

$$M(x,y)\cdot M(y,x) = M\left(x^2+y^2, xy\right) = M(5,2) \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(1,2),(-1,-2),(2,1),($$

2. a) Elementul neutru este

$e = -2 \Rightarrow x*(-2) = (-2)*x = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2x + 3x - 6 + a = 0 \Rightarrow a = 6$.

b) $x*b = b*x = b$, pentru orice

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xb + 3x + 3b + 6 = b \Leftrightarrow (x+2)(b+3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow b = -3$.

c) Cum în baza punctului b) $x*(-3) = (-3)*x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $-3 = -\sqrt{9}$ se regăseşte în compunerea celor 2010 elemente, rezultă de aici că $\left(-\sqrt{1}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*\ldots*\left(-\sqrt{2010}\right) = -3$

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Funcţia f este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$, respectiv $(0,\infty)$. Cum $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = -1$ rezultă că f este continuă şi în $x = 0$. Deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - e^x\right) = -\infty \Rightarrow$ graficul funcţiei f nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$. Studiem existenţa celei oblice. $d: y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to 0}\right) = 1$,

iar $n = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x\right) = 0 \Rightarrow$ dreapta de ecuaţie $y = x$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei spre $-\infty$.

c) Funcţia derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$, respectiv $(0,\infty)$. Avem

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - e^x, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (-\infty, 0) \text{ sau } \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0, \text{ fals. Deci}$$

$f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$; aşadar funcţia f este crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$, respectiv $(0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $\int_0^1 x\cdot e^x\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot\left(e^{2x}+1\right)dx=\left(\frac{2x^2+2xe^{2x}-e^{2x}}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{e^2+3}{4}$.

b) Se verifică uşor că funcţia f este o primitivă a lui g şi că funcţia g este o primitivă a lui f. Avem: $\int_0^1 \frac{g(x)}{f(x)}dx=\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left(\ln\left(e^x+e^{-x}\right)\right)\Big|_0^1=\ln\frac{e^2+1}{2e}$.

c) Câtă vreme $f'(x)=g(x)$ şi $g'(x)=f(x)$ rezultă de aici că $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f^2(x)+g^2(x)$, egalitate care, prin integrare pe intervalul $[a,b]$, conduce la:

$$\int_a^b\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\int_a^b\left(f(x)\cdot g(x)\right)'dx=\left(f(x)\cdot g(x)\right)\Big|_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

TESTUL 31

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a=-\sqrt[3]{16\sqrt{\frac{1}{4}}}=-\sqrt[3]{16\cdot\frac{1}{2}}=-\sqrt[3]{8}=-2$, $b=-\log_4 9\cdot\log_3 2=-\frac{\lg 9}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 2}{\lg 3}=-\frac{2\lg 3}{2\lg 2}\cdot\frac{\lg 2}{\lg 3}=-1$

şi $c=C_3^1-A_3^2=3-6=-3$, deci $b>a>c$.

2. $f(x)\le -4$, pentru orice

$$x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -x^2+ax+a\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\le 0\\ -1<0\end{cases}\Rightarrow a^2+4a\le 0\Rightarrow a\in[-4,0].$$

3. Ecuaţia devine succesiv:

$$2^x\cdot\left(2^2\right)^{x-1}=3^{x-2}\cdot\left(3^2\right)^x\Leftrightarrow 2^{3x-2}=3^{3x-2}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2}=1=\left(\frac{2}{3}\right)^1\Leftrightarrow 3x-2=1\Leftrightarrow x=1.$$

4. Deoarece $C_{2010}^k=C_{2010}^{2010-k}$, pentru orice $k\in\{0,1,\ldots,2010\}$, rezultă că vom avea 1006 termeni distincţi, a căror sumă va fi:

$$C_{2010}^0+C_{2010}^1+\ldots+C_{2010}^{1004}+C_{2010}^{1005}=\frac{1}{2}\underbrace{\left(C_{2010}^0+C_{2010}^1+\ldots+C_{2010}^{2009}+C_{2010}^{2010}\right)}_{=2^{2010}}+\frac{1}{2}C_{2010}^{1005}=2^{2009}+\frac{1}{2}C_{2010}^{1005}.$$

5. Panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-2$; cum $d\parallel AB\Rightarrow m_d=m_{AB}=-2$. Deoarece $O(0,0)\in d$ rezultă că ecuaţia dreptei d va fi: $d:y-y_O=m_d\left(x-x_O\right)\Rightarrow d:2x+y=0$.

6. $\sin^2 160^\circ+\sin^2 110^\circ=\cos^2 130^\circ+\cos^2 140^\circ\Leftrightarrow\sin^2\left(180^\circ-160^\circ\right)+\sin^2\left(180^\circ-110^\circ\right)=$

$=\left(-\cos\left(180^\circ-130^\circ\right)\right)^2+\left(-\cos\left(180^\circ-140^\circ\right)\right)^2\Leftrightarrow\sin^2 20^\circ+\sin^2 70^\circ=\cos^2 50^\circ+\cos^2 40^\circ\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2 20^\circ+\cos^2\left(90^\circ-70^\circ\right)=\cos^2 50^\circ+\sin^2\left(90^\circ-40^\circ\right)\Leftrightarrow\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ=\cos^2 50^\circ+\sin^2$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow 1=1$, adevărat.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $\det A = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{C_2+C_3\to C_3}{=} 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & b+c+a \\ 1 & b & c+a+b \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = 4\cdot(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$.

b) Putem alege $B=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{pmatrix}$. Evident că $A=B+C$ şi

$\det B=-\det C=ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2$, deci $\det B+\det C=0$ şi $\det A=\det(B+C)=0$.

c) $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\Rightarrow X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Din ecuaţia $AX=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ obţinem sistemul

$\begin{cases} 2x+2ay+(b+c)z=a \\ 2x+2by+(c+a)z=b \\ 2x+2cy+(a+b)z=c \end{cases}$. Prin adunarea ecuaţiilor sistemului obţinem

$6x+2y(a+b+c)+2z(a+b+c)=a+b+c$, de unde ţinând seama de ipoteză, vom obţine că

$x+y+z=\frac{1}{2}$.

2. a) $X+1\,|\,f\Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow -1+3+a=0\Rightarrow a=-2$

b) Cum $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}=\frac{f'(x)}{f(x)}$, rezultă că $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{0}{a-2}=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}-\{2\}$, sau se aduce expresia la o formă mai simplă, obţinându-se:

$\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}=\frac{3-2S_1+S_2}{1-S_1+S_2-S_3}=\frac{3-2\cdot 0-3}{1-0+(-3)-(-a)}=0$, unde $S_1=0, S_2=-3$ şi $S_3=-a$ sunt relaţiile lui Viète.

c). Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ rădăcina dublă a polinomului f. Atunci $\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha^3-3\alpha+a=0 \\ 3\alpha^2-3=0 \end{cases}$, deci $\alpha=\pm 1$, caz în care obţinem $a=\pm 2$. Într-adevăr pentru $a=2\Rightarrow f=X^3-3X+2=(X-1)^2(X+2)$, polinom care are ca rădăcină dublă pe 1 şi rădăcină simplă pe -2, iar pentru $a=-2\Rightarrow f=X^3-3X-2=(X+1)^2(X-2)$, polinom care are ca rădăcină dublă pe -1 şi rădăcină simplă pe 2.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Cum $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=0$ rezultă că f este continuă în $x=0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x \overset{-\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$, deci dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre $-\infty$.

c) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty,0)$, respectiv $(0,\infty)$. Avem $f'(x)=\begin{cases} xe^x, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$. $f'(x)=0\Rightarrow x=0\in(-\infty,1)$ sau $\dfrac{1}{x}=0$, fals. Din tabelul de variaţie al funcţiei f rezultă că $x=0$ este punct de minim global; aşadar $f(x)\geq f(0)=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) $g'(x)=\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+x(\ln x-1)\right)'=\sqrt{x}+\ln x-1+1=f(x)$.

b) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^4}\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}dx=\int_{e^2}^{e^4} g^{-\frac{1}{2}}(x)\cdot g'(x)\,dx=2\sqrt{g(x)}\Big|_{e^2}^{e^4}=\frac{2e}{\sqrt{3}}\left(e\sqrt{2e^2+9}-\sqrt{2e+9}\right)$.

c) $V(C_h)=\pi\displaystyle\int_1^e h^2(x)\,dx=\pi\int_1^e\left(x+2\sqrt{x}\ln x+\ln^2 x\right)dx=\dfrac{\pi\left(9e^2+8e\sqrt{e}+18e-29\right)}{18}$.

TESTUL 32

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_{20}=79\Rightarrow S_{20}=\dfrac{20(a_1+a_{20})}{2}=820$.

2. Fie k şi $k+1$, cu $k\in\mathbb{Z}$, cele două soluţii întregi ale ecuaţiei $x^2-ax+a+1=0$. Din relaţiile lui Viète obţinem: $\begin{cases} k+(k+1)=a \\ k(k+1)=a+1 \end{cases}\Rightarrow k^2-k-2=0\Rightarrow k\in\{-1,2\}\Rightarrow a\in\{-1,5\}$.

Pentru ambele valori ale lui a, obţinem soluţii întregi consecutive.

3. Notând $2^x=t>0$ ecuaţia devine:

$\sqrt{t+1}+1=\dfrac{t}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{t+1}=t-2 \underset{t>0}{\overset{t-2\geq 0}{\Leftrightarrow}} t^2-8t=0\overset{t\geq 2}{\Leftrightarrow}t=8\Leftrightarrow x=3$.

4. Deoarece $C_{2010}^k=C_{2010}^{2010-k}$, pentru orice $k\in\{0,1,\ldots,2010\}$, rezultă că vom avea 1006 elemente distincte în mulţimea $\left\{C_{2010}^k \mid k=0,1,\ldots,2010\right\}$.

5. Avem $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2\cdot AM=2\cdot\dfrac{AD}{\cos 60^\circ}=16$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Avem

$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 3^\circ+\ldots+\sin^2 89^\circ=\underbrace{\left(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ\right)+\left(\sin^2 3^\circ+\sin^2 87^\circ\right)+\ldots+\left(\sin^2 43^\circ+\sin^2 47^\circ\right)}_{\text{45 de paranteze}}$$

$+\sin^2 45^\circ=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{de 22 de ori}}+\frac{1}{2}=\frac{45}{2}$. S-a folosit mai sus faptul că:

$\sin^2 k^\circ+\sin^2\left(90^\circ-k^\circ\right)=\sin^2 k^\circ+\cos^2 k^\circ=1$, oricare ar fi $k\in\left\{1^\circ,3^\circ,5^\circ\ldots,43^\circ\right\}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $M(a,b,c)=A\cdot A^t=A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & a\\ c & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca\\ ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2\end{pmatrix}$. Deci

$\det M(a,b,c)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-(ab+bc+ca)^2$. Prin urmare $\det M(1,2,3)=75$.

b) $M(1,2,3)=\begin{pmatrix}14 & 11\\ 11 & 14\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}14x+11y=39\\ 11x+14y=36\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, sau

$\det M(1,2,3)=75\neq 0\Rightarrow M(1,2,3)$ este inversabilă şi $M^{-1}(1,2,3)=\frac{1}{75}\begin{pmatrix}14 & -11\\ -11 & 14\end{pmatrix}$ şi atunci

$X=M^{-1}(1,2,3)\cdot\begin{pmatrix}39\\ 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

c)) $M(a,b,c)$ nu este inversabilă $\Leftrightarrow\det M(a,b,c)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-(ab+bc+ca)^2\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0\overset{a,b,c>0}{\Rightarrow}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\Rightarrow$

2. a) $x*a=a*x=a,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(x-3)(a-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=2$. Deci $M=\{2\}$.

b) În primul rând se impune condiţia $x\neq 0$. Din ecuaţie obţinem

$x\cdot\left(\frac{2x+1}{x}-2\right)+2=3\Rightarrow x\cdot\frac{1}{x}=1$, adevărat pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

c) Elementul neutru este $e=3$ şi orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ are ca simetric pe $x'=\frac{2x-3}{x-3}$. Cum

$(x*y)'=y'*x'$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, de aici rezultă concluzia.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ şi cum $f'(x)=-\frac{x}{e^x}$. Deci limita cerută este egală cu 0.

Scanned with OKEN Scanner

b) $f''(x)=\left(-\frac{x}{e^x}\right)'=\frac{x-1}{e^x}$, deci

$f''(x)+2f'(x)+f(x)=\frac{x-1}{e^x}+2\cdot\left(-\frac{x}{e^x}\right)+\frac{x+1}{e^x}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow x=0$. Din tabelul de variaţie al funcţiei f rezultă că $x=0$ este punct de maxim global; aşadar $f(x)\le f(0)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x+1\le e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) Funcţia f este continuă pe $(-\infty,1),(1,\infty)$. Studiem continuitatea în $x=1$:

$l_s(1)=l_d(1)=f(1)=1\Rightarrow f$ este continuă şi în $x=1$, deci continuă pe $\mathbb{R}$; prin urmare f admite primitive.

b) $x\in[0,1]\Leftrightarrow e^x\in[1,e]$, deci $e^x\ge 1\Rightarrow f\left(e^x\right)=\ln e^x+\frac{1}{e^x}=x+\frac{1}{e^x}\Rightarrow$

$\int_0^1 f\left(e^x\right)dx=\int_0^1\left(x+e^{-x}\right)dx=\frac{3e-2}{2e}$.

c) . $V\left(C_g\right)=\pi\int_1^e g^2(x)\,dx=\pi\int_1^e\left(\ln^2 x+\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{e}$.

TESTUL 33

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\{\log_6 12\}=\{\log_6 2\}\Leftrightarrow\log_6 12-\log_6 2\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\log_6\frac{12}{2}=\log_6 6=1\in\mathbb{Z}$, adevărat.

2. $\Delta=4\left(2011^2-2010^2\right)>0$, deci ecuaţia are ambele soluţii reale. Din relaţiile lui Viète obţinem: $x_1+x_2=\frac{2011}{1005}$ şi $x_1x_2=1\Rightarrow x_1=\frac{1}{x_2}$. Deci

$x_1+\frac{1}{x_1}=x_2+\frac{1}{x_2}=\frac{2011}{1005}\Rightarrow a+\frac{1}{a}=\frac{2011}{1005}$.

3. Ecuaţia devine: $\sqrt{9^x}=0,(6)\cdot\sqrt[3]{8^x}\Leftrightarrow 3^x=\frac{2}{3}\cdot 2^x\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}=1\Leftrightarrow x=-1$.

4. Numărul tuturor submulţimilor care au 4 elemente este $C_7^4=35$. Submulţimea numerelor pare din mulţimea $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ este $\{2,4,6\}$, iar cea a numerelor impare este $\{1,3,5,7\}$; deci numărul tuturor submulţimilor de 4 elemente ce conţin 2 numere pare şi 2 impare va fi $C_3^2\cdot C_4^2=18$; aşadar probabilitatea este egală cu $\frac{18}{35}$.

5. Din teorema medianei (varianta vectorială) avem: $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CD}$ şi cum EM este linie

Scanned with OKEN Scanner

mijlocie în $\Delta ADC \Rightarrow \overline{CD} = 2\overline{EM}$. Înlocuind în relaţia anterioară obţinem concluzia.

6.

$\sin 70^\circ \cdot \cos 20^\circ = \cos^2 160^\circ \Leftrightarrow \cos\left(90^\circ - 70^\circ\right) \cdot \cos 20^\circ = \left(-\cos\left(180^\circ - 160^\circ\right)\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 20^\circ = \cos^2$

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_2 \in M \quad (a = 8 \in \mathbb{N}, b = c = 0 \in \mathbb{N})$.

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det(X - I_2) = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & -a-1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 - bc = 1 + \det X$, oricare ar fi $X \in M$.

c) Din relaţia lui Hamilton Cayley, sau prin calcul direct, obţinem $X^2 = \left(a^2 + bc\right)I_2$, de unde ţinând cont de ipoteză, vom avea că $a^2 + bc = 1$ şi cum $a, b, c \in \mathbb{N}$ vor rezulta soluţiile

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = c = 1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{cases} a = 1 \\ c = 0 \\ b \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. a) În baza relaţiilor lui Viète: $S_1 = 4$, $S_2 = a$, $S_3 = -6$; expresia devine $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = \frac{S_1}{S_3} = -\frac{2}{3}$, deci este independentă de a.

b) Restul împărţirii polinomului f la $X - 1$ este $f(1)$; din enunţ $f(1) = 4 \Rightarrow a = 1$.

c) Cum $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 4$ şi $x_1 + x_2 = x_3$, rezultă $x_3 = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow a = 1$. Utilizând teorema împărţirii cu rest a polinoamelor sau schema lui Horner obţinem $f = (X-2)\left(X^2 - 2X - 3\right)$, de unde rezultă că f are rădăcinile $x_1 = -1, x_2 = 3$ şi $x_3 = 2$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x-1}{\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$.

b) $f'(x) = \left(\frac{x-1}{\ln x}\right)' = \frac{(x-1)\ln x + 1}{x \ln^2 x} = \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x}\right) = \frac{1}{x}\left(f(x) + \frac{1}{\ln^2 x}\right)$, de unde reiese concluzia.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \notin (1, \infty)$. De fapt $f'(x) > 0, \forall x > 1 \Rightarrow f \nearrow$ pe intervalul $(1, \infty)$. Aşadar

$$f(2010) \le f(2011) \Rightarrow \frac{2009}{\ln 2010} \le \frac{2010}{\ln 2011} \Rightarrow 2009 \cdot \ln 2011 \le 2010 \cdot \ln 2010.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $\int_1^2 f\left(x^{2010}\right)dx = \int_1^2 x^{1005}\,dx = \frac{2^{1006}-1}{1006}$

b) F este primitivă a funcţiei $f \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x>0 \Leftrightarrow a\sqrt{x} + \frac{ax+b}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \forall x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3ax + b = 2x, \forall x>0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ şi $b=0$.

c)

$$a=\frac{2}{3}, b=0 \Rightarrow F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_e^{e^2} f(\ln x)\cdot(\ln x)'\,dx = F(\ln x)\Big|_e^{e^2} = F(2)-F(1)$$

TESTUL 34

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\frac{1}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2-n-1 \,\big|\, 1 \Rightarrow n^2-n-1 \in \{-1,1\} \Rightarrow n \in \{-1,0,1,2\} \subset \mathbb{Z}$.

2. $f(2010) = g(2010) \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow b = 1-a$. Deci

$g(x) = ax + (1-a) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f = g$.

3. Impunem condiţia de existenţă a logaritmului: $3^x - 6 > 0$ şi ecuaţia devine succesiv:

$3^x - 6 = 3^{3-x} \overset{3^x = t>0}{\Rightarrow} t^2 - 6t - 27 = 0 \overset{t>0}{\Rightarrow} t = 9 \Rightarrow x = 2$, valoare care verifică condiţia iniţială.

4. $\overline{abc} : 5 \Rightarrow c = 5$. Alegerea cifrelor distincte $a,b \in \{1,2,3,4,6,7\}$ poate fi făcută în $A_6^2 = 30$ moduri. Cum numărul tuturor numerelor formate din 3 cifre distincte din mulţimea $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ este egal cu $A_7^3 = 210$; obţinem de aici că probabilitatea va fi egală cu $\frac{30}{210} = \frac{1}{7}$.

5. Soluţia sistemului format din ecuaţiile primelor două drepte, adică punctul $M(x,y) = M(1,1)$, aparţine şi celei de-a treia, câtă vreme $4\cdot 1 - 7\cdot 1 + 3 = 0$.

6. $\left.\begin{array}{l}\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos A = \pm\frac{3}{5} \\ m(\angle A) \in (0^\circ, 90^\circ) \Rightarrow \cos A > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \cos A = \frac{3}{5}$. Din teorema cosinusului:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ obţinem $BC = a = \sqrt{17}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Calcul direct sau se poate arăta că $AB = BA$ şi atunci orice formulă de calcul algebric prescurtat va fi valabilă şi în cazul matricelor, deci şi *„diferenţa de pătrate”*, sau au loc egalităţile: $A^2 = 2A$, $AB = BA = -A$, $A + B = I_2$, $B^2 = I_2$, etc.

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem $\det(A+xB)=\det(B+xA)\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1 & x-1\\ x-1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 1-x\\ 1-x & x\end{vmatrix}\Leftrightarrow x\in\{\pm 1\}$.

c) Din punctul a) $B^2=I_2\Rightarrow$ matricea B este inversabilă şi $B^{-1}=B$. Deci ecuaţia $BX=A$ are soluţia unică $X=B^{-1}A=BA=-A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

2. a) Din ecuaţia $(a-1)*(2a+1)=16$ obţinem $2a^2+15a-17=0\Leftrightarrow a\in\left\{-\frac{17}{2},1\right\}$.

b) „$*$" este asociativă

$\Leftrightarrow (x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (a-20)(z-x)=0,\ \forall x,z\in\mathbb{R}\Rightarrow a=20$.

c) Legea de compoziţie „$*$" admite element neutru $\Leftrightarrow\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât

$x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x(e+4)+(5e+a)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}e+4=0\\ 5e+a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e=-4\\ a=20\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) Funcţia f este continuă în punctul $x_0=1\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=f(1)$. Cum

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$, $f(1)=l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2-x+a)=a$, rezultă de aici că $a=1$.

b) $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{x(1-\ln x)-1}{x(x-1)^2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to e}f'(x)=\lim\limits_{x\to e}\frac{x(1-\ln x)-1}{x(x-1)^2}=-\frac{1}{e(e-1)^2}$.

c) Pentru $x\in(1,\infty)\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{x(1-\ln x)-1}{x(x-1)^2}$. Fie funcţia

$g:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x(1-\ln x)-1$. Cum $g'(x)=-\ln x<0,\ \forall x>1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}g(x)=0$, din tabelul de variaţie al funcţiei g rezultă că $g(x)<0,\ \forall x>1$. Deci $f'(x)<0,\ \forall x>1\Rightarrow f\searrow$ pe intervalul $(1,\infty)$.

2. a) Cum $g(x)=f_2(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x+1$ rezultă că

$V(C_g)=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1(x^2+2x+1)\,dx=\frac{7\pi}{3}$.

b) $\int_0^1 e^x\cdot f_2(x)\,dx=\int_0^1 e^x(x+1)\,dx=xe^x\Big|_0^1=e$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $\int_1^e f_n(x)\,dx = \int_1^e \left(\sqrt{x+1}\right)^n dx = \int_1^e (x+1)^{\frac{n}{2}}(x+1)'\,dx = \left.\frac{(x+1)^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1}\right|_0^1 = 2\cdot\frac{2^{\frac{n+2}{2}}-1}{n+2}$.

TESTUL 35

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Din relaţiile lui Viète $S = x_1 + x_2 = a$, $P = x_1x_2 = b$, obţinem

$a = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 6 \in \mathbb{Z}$ şi $b = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1 \in \mathbb{Z}$.

2. Din ipoteză rezultă că sistemul $\begin{cases} y = x^2 - mx - m \\ y = -3 \end{cases}$ are soluţie unică. Deci ecuaţia

$x^2 - mx - m + 3 = 0$ trebuie să aibă discriminantul egal cu 0

$\Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Rightarrow m \in \{-6, 2\}$.

3. Avem succesiv $4^{\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{\log_2 4} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3-2\sqrt{2}$.

4. Fie numerele de forma $\overline{abc}$, având cifrele distincte $a, b, c \in \{1,2,3,4,5\}$, astfel încât $a \cdot b \cdot c = 8 \Rightarrow \{a,b,c\} = \{1,2,4\}$. Deci a, b, c pot fi alese în $3! = 6$ moduri. Cum numărul tuturor numerelor formate din 3 cifre distincte din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$ este egal cu $A_5^3 = 60$, obţinem de aici că probabilitatea cerută va fi egală cu $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$.

5. Soluţia sistemului format din ecuaţiile primelor două drepte va fi punctul $M(x,y) = M(1,1)$. Deci ecuaţia dreptei d care trece prin M şi are panta egală cu panta dreptei d_3 (deoarece $d \parallel d_3 \Leftrightarrow m_d = m_{d_3} = 1$) va fi $d: y - y_M = m_d(x - x_M) \Rightarrow d: x - y = 0$.

6. Avem $a = \left(\sin 2^\circ + \cos 2^\circ\right)^2 = \underbrace{\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ}_{=1} + 2\sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ = 1 + 2\sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ$.

$b = 1 - 2\cos 88^\circ \cdot \cos 178^\circ = 1 - 2\sin\left(90^\circ - 88^\circ\right)\cdot\left(-\cos\left(180^\circ - 178^\circ\right)\right) = 1 + 2\sin 2^\circ \cos 2^\circ$. Deci $a = b$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) $\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă. Avem, din relaţia lui Hamilton Cayley, sau din calcul că $A^2 = -I_2$, de unde reiese concluzia.

b) Din punctul anterior $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^4 = I_2$.

c) $\det\left(A + xI_2\right) = \det\left(A - xA^2\right) = \det\left(A\left(I_2 - xA\right)\right) = \underbrace{\det A}_{=1} \cdot \det\left(I_2 - xA\right) = \det\left(I_2 - xA\right)$, sau

Scanned with OKEN Scanner

prin calcul efectiv al celor 2 determinanţi.

2. a) Restul împărţirii lui f la $X-1$ este $f(1)=1+a-a-1=0$, deci $X-1 \mid f$, pentru orice $a \geq 1$.

b) Din punctul a) rezultă că $f=(X-1)\left(X^2+(a+1)X+1\right)$, deci rădăcinile sale vor fi $x_1=1$ şi cele două soluţii ale ecuaţiei $x^2+(a+1)x+1=0$. Aceasta din urmă are soluţii reale, deoarece $\Delta=a^2+2a-3 \geq 0$, pentru că $a \geq 1$, din ipoteză, şi produsul soluţiilor, în baza relaţiilor lui Viète, este $P=x_2x_3=1 \Rightarrow x_2=\frac{1}{x_3}$.

c) Din punctul b). rezultă că $f=(X-1)\left(X^2+(a+1)X+1\right)$; deci, câtă vreme $x_1=1$, oricare ar fi $a \geq 1$, înseamnă că ecuaţia $x^2+(a+1)x+1=0$ are ca soluţie pe 1, adică $a=-2$, fals, sau are soluţii egale $\Leftrightarrow \Delta=a^2+2a-3=0 \overset{a \geq 1}{\Rightarrow} a=1$, caz în care $x_2=x_3=-1$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to -\infty}\left((x-1)\cdot e^x\right)^{0\cdot(-\infty)}=\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{x-1}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$, deci dreapta de ecuaţie $d: y=0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $-\infty$.

b) $f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \nearrow & (x-1)\cdot e^x \Rightarrow x=1 \notin (-\infty,0] \\ \searrow & 3\cdot\sqrt[3]{x}-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{27} \in (0,\infty) \end{cases}$. Obţinem că $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{27},\infty\right)$ şi $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty,\frac{1}{27}\right]$.

c) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty,0)$, respectiv $(0,\infty)$. Avem $f'(x)=\begin{cases} xe^x, & x<0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, & x>0 \end{cases}$. $f'(x)=0 \Rightarrow x \in \varnothing$. Din tabelul de variaţie al funcţiei f rezultă că $x=0$ este punct de minim global; aşadar $f(x) \geq f(0)=-1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. a) Pentru $x=1$ în relaţia din ipoteză $\Rightarrow F(1)=f(1)=1$.

Deci $\int_0^1 f(x)\,dx=F(x)\Big|_0^1=F(1)=1$.

b) Funcţia F este crescătoare pe intervalul $[0,\infty) \Leftrightarrow F'(x) \underset{\text{pentru } f}{\overset{F \text{ primitivă}}{=}} f(x) \geq 0$. Însă, prin derivarea relaţiei din ipoteză, obţinem

$F'(x)=f(x)+x\cdot f'(x) \Leftrightarrow x\cdot f'(x)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=a$ şi cum

Scanned with OKEN Scanner

$f(1)=1\Rightarrow a=1\Rightarrow f(x)=1\Rightarrow F(x)=x+b=x\geq 0$, pentru că $F(0)=0$, oricare ar fi $x\in[0,\infty)$.

c) $\int_0^1 F\left(x^{2010}\right)dx=\int_0^1 x^{2010}\,dx=\frac{1}{2011}$.

TESTUL 36

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $x^2<1\Rightarrow x\in(-1,1)\cap\mathbb{Z}\Rightarrow A=\{0\}$.

$\frac{1}{x+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+1\,|\,1\Rightarrow x+1\in\{-1,1\}\Rightarrow x\in\{-2,0\}\cap\mathbb{N}\Rightarrow B=\{0\}$.

2. $V\left(\frac{m}{2},-\frac{m^2+4m+4}{4}\right)\in d: x+y+3=0\Leftrightarrow\frac{m}{2}-\frac{m^2+4m+4}{4}+3=0\Rightarrow m\in\{-4,2\}$.

3. Condiţia de existenţă: $x\geq 0$. Avem:

$2^{\sqrt{x}}=\frac{1}{4^{3-x}}\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}}=2^{2x-6}\Leftrightarrow\sqrt{x}=2x-6\overset{2x-6\geq 0}{\Leftrightarrow}x\in\left\{\frac{9}{4},4\right\}$, dintre cele 2 soluţii doar $x=4$ verifică simultan condiţiile de existenţă.

4. Numărul tuturor submulţimilor mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$ este $2^5=32$. Submulţimile care au un număr impar de elemente pot avea cardinalul egal cu 1, 3 sau 5, deci sunt în număr de $C_5^1+C_5^3+C_5^5=2^4=16$; aşadar probabilitatea este egală cu $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$.

5. Vectorii $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ pot forma un triunghi $\Leftrightarrow\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(a^2-4\right)\vec{i}+(a-2)\vec{j}=\vec{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}a^2-4=0\\a-2=0\end{matrix}\right|\Rightarrow a=2$.

6. Dacă mediana AM corespunzătoare ipotenuzei BC are lungimea de 6, atunci $BC=12$. Deci dacă AD este înălţimea care pleacă din unghiul drept, atunci $A_{ABC}=\frac{AD\cdot BC}{2}=18$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) Avem, din relaţia lui Hamilton Cayley, sau din calcul direct, că $A^3=-I_3$, deci

$A^3+I_3=O_3\overset{A\cdot I_3=I_3\cdot A}{\Rightarrow}\left(A+I_3\right)\left(A^2-A+I_3\right)=O_3$.

b) $\det A=1\neq 0\Rightarrow A$ este inversabilă. Din punctul anterior $A^3=-I_3\Rightarrow A^{-1}=-A^2$.

c) $\det\left(A+xI_3\right)=\det\left(A-xA^3\right)=\det\left(A\left(I_3-xA^2\right)\right)=\underbrace{\det A}_{=1}\cdot\det\left(I_3-xA^2\right)=\det\left(I_3-xA^2\right)$, sau prin calcul efectiv al celor 2 determinanţi.

2. a) Legea de compoziţie „$*$” admite element neutru $\Leftrightarrow\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât

Scanned with OKEN Scanner

$x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow x(e-2)+(2-e)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}e-2=0\\2-e=0\end{cases}\Rightarrow e=2\in\mathbb{R}$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ simetrizabil $\Rightarrow\exists\, x'\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ astfel încât

$x*x'=x'*x=e\Leftrightarrow x'=\dfrac{x}{x-1}\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Deci $x*\dfrac{1}{x'}=x*\dfrac{x-1}{x}=x\cdot\dfrac{x-1}{x}-x-\dfrac{x-1}{x}+2=\dfrac{1}{x}$,

pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

c) Din punctul b) rezultă că $x'=\dfrac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; deci

$x'=\dfrac{x}{x-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 1+\dfrac{1}{x-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-1\,|\,1\Rightarrow x\in\{0,2\}$. Pentru $x=0\Rightarrow x'=0\in\mathbb{Z}$ şi pentru

$x=2\Rightarrow x'=2\in\mathbb{Z}$. Deci $U(\mathbb{Z})=\{0,2\}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{m}\right)}{x-\frac{1}{m}}=f'\left(\dfrac{1}{m}\right)$. Cum $f'(x)=\left(\dfrac{\ln m+\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln(mx)}{x^2}$, obţinem că

limita este m^2.

b) $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{e}{m}$. Din tabelul de variaţie al funcţiei rezultă că f este crescătoare pe

intervalul $\left(0,\dfrac{e}{m}\right]$ şi descrescătoare pe intervalul $\left[\dfrac{e}{m},\infty\right)$.

c) Din punctul anterior obţinem că $x=\dfrac{e}{m}$ este punct de maxim global al funcţiei f; aşadar

$f(x)\le f\left(\dfrac{e}{m}\right)=\dfrac{m}{e},\ \forall x>0\Rightarrow\dfrac{\ln(mx)}{x}\le\dfrac{m}{e}\Rightarrow(mx)^e\le e^{mx}$. Cum, din ipoteză, $(mx)^e\ge e^{mx}$,

va rezulta că $(mx)^e=e^{mx}\Rightarrow x=\dfrac{e}{m}\in(0,\infty)$.

2. a) Trebuie să arătăm că f este primitivă a lui g:

$f'(x)=\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\right)'=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=g(x)$.

b) $\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx=\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_1^e=\dfrac{e}{2}$.

c) $V(C_h)=\pi\int_1^e h^2(x)\,dx=\pi\int_1^e\left(\dfrac{\ln^2 x+4\ln x+4}{4x}\right)dx=\dfrac{19\pi}{24}$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 37

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Ecuaţia se scrie echivalent $m(x-m)=x-1 \Leftrightarrow x(m-1)=m^2-1$. Pentru $m \neq 1$ ecuaţia are soluţia unică $x=m+1$, iar pentru $m=1$ orice $x \in \mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei. Deci pentru a avea două soluţii reale distincte este necesar ca $m=1$.

2. Funcţia f, având $a=1>0$, este crescătoare pe intervalul $[x_V,\infty)=[1,\infty)$ şi cum $1<\sqrt[3]{2010}<\sqrt[3]{2011} \Rightarrow f\left(\sqrt[3]{2010}\right)<f\left(\sqrt[3]{2011}\right)$.

3. Avem succesiv:

$$\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3 4=\log_5 10-\log_5 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 3\cdot 2\log_3 2=\log_2\frac{10}{5} \Leftrightarrow \log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}=\underbrace{\log_2 2}_{=1}.$$

4. $\log_2 n+\sqrt{n}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\log_2 n\in\mathbb{Q}\\ \sqrt{n}\in\mathbb{Q}\end{matrix}\right| \Rightarrow n=2^{2m}$, cu $m\in\{1,2,3,4,5\}$. Deci probabilitatea va fi $\frac{5}{2010}=\frac{1}{402}$.

5. $\overrightarrow{AB}(3,-5) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=3\vec{i}-5\vec{j}$. Deci

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=2\vec{i}+2\vec{j} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|=AM=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

6. Din $\cos A=\frac{4}{5}$ şi $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ obţinem $\sin A=\frac{3}{5}$. Din teorema sinusurilor rezultă $\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow BC=a=12$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) $\det A=\begin{vmatrix} a & 0 & b\\ c & b & 0\\ 0 & a & c\end{vmatrix}=2abc\neq 0$, deci matricea A este inversabilă, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}^*$.

b) Pin calcul direct se verifică faptul că $AB=BA=I_3$, sau se foloseşte relaţia lui Hamilton Cayley: $A^3-(a+b+c)\cdot A^2+(ab+bc+ca)\cdot A-2abc\cdot I_3=O_3$, din care rezultă imediat concluzia.

c) Determinantul sistemului este $\det S=\det A=2abc\neq 0$, deci sistemul este Cramer, prin urmare are soluţie unică. Din formulele lui Cramer obţinem $(x,y,z)=(1,1,1)$; aşadar soluţia sistemului este unică şi independentă de parametrii a,b,c.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $X+3 \mid f \Leftrightarrow f(-3)=0 \Rightarrow -54+9a-3a+42+6=0 \Rightarrow a=1$.

b) Conform relaţiilor lui Viète avem $S_1=-\frac{a}{2}, S_2=\frac{a-14}{2}$ şi $S_3=-3$. Expresia devine succesiv: $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)=x_1x_2x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1+x_2+x_3+1=$

$=S_1+S_2+S_3+1=-\frac{a}{2}+\frac{a-14}{2}-2=-9$.

c) Fie $x_1=\alpha$ şi $x_2=\frac{1}{\alpha}$ cele două rădăcini inverse ale polinomului f. Din $S_3=x_1x_2x_3=\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot x_3=-3 \Rightarrow x_3=-3$; deci una din rădăcinile lui f este $x=-3 \Rightarrow f(-3)=0 \Rightarrow a=1$. Împărţindu-l pe $f=2X^3+X^2-13X+6$ la $X+3$ obţinem câtul $2X^2-5X+2$, care are rădăcinile 2 şi $\frac{1}{2}$. Aşadar $a=1$, iar ecuaţia $f(x)=0$ are soluţiile $x\in\left\{-3,\frac{1}{2},2\right\}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x(2-\ln x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{2-\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\substack{\frac{0}{0}\\ L'H}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$.

b) $f'(x)=1-\ln x=0 \Rightarrow x=e$. Din tabelul de variaţie al funcţiei rezultă că $x=e$ este punct de maxim global al funcţiei f.

c) Din punctul anterior obţinem că f este crescătoare pe intervalul $(0,e]$, respectiv descrescătoare pe intervalul $[e,\infty)$; deci

$x>1 \Rightarrow e^x>e \underset{\text{pe } [e,\infty)}{\overset{f\searrow}{\Rightarrow}} f(e^x)\le f(e) \Rightarrow e^x(2-\ln e^x)\le e \Rightarrow e^x(2-x)\le e, \forall x>1$.

1. a) Fie F_a o primitivă a funcţiei f_a. Atunci F_a este convexă pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow F_a''(x)=(F_a'(x))'=f_a'(x)=a>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, adevărat.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\int_0^a f_1(x)\,dx = 4 \Rightarrow \int_0^a (x+1)\,dx = 4 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^a = 4 \Rightarrow a^2+2a-8=0 \overset{a>0}{\Rightarrow} a=2$.

c) $\int_{2010}^{2011} f_a(x)\,dx = \left(\frac{ax^2}{2}+x\right)\Big|_{2010}^{2011} = \frac{4021}{2}\cdot a+1$,

$\int_{2010}^{2011} f_{a+1}(x)\,dx = \left(\frac{(a+1)x^2}{2}+x\right)\Big|_{2010}^{2011} = \frac{4021}{2}\cdot(a+1)+1$ şi

$\int_{2010}^{2011} f_{a+2}(x)\,dx = \left(\frac{(a+2)x^2}{2}+x\right)\Big|_{2010}^{2011} = \frac{4021}{2}\cdot(a+2)+1$. Cum

$2\cdot\left(\frac{4021}{2}\cdot(a+1)+1\right) = \left(\frac{4021}{2}\cdot a+1\right)+\left(\frac{4021}{2}\cdot(a+2)+1\right) \Rightarrow \int_{2010}^{2011} f_a(x)\,dx;\ \int_{2010}^{2011} f_a(x)\,dx;$

$\int_{2010}^{2011} f_a(x)\,dx$ ÷, pentru orice $a>0$.

TESTUL 38

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Numerele sunt de forma $\overline{5abc5}$, cu $a,b,c \in \{0,1,2,....9\}$ care pot fi alese în $10\cdot 10\cdot 10 = 1000$ de moduri. Deci există 1000 de numere cu proprietatea din enunţ.

2. Avem succesiv: $\log_2 5 - \log_2 7 + \log_2 \frac{7}{5} = \log_2 \frac{5}{7} + \log_2 \frac{7}{5} = \log_2\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}\right) = \log_2 1 = 0 \in \mathbb{N}$.

3. Au loc echivalenţele: $(2x-1)^2 \le 9 \Leftrightarrow |2x-1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x-1 \le 3 \Leftrightarrow x \in [-1,2]$.

4. Ecuaţia $f(x)=0$ are soluţiile $x \in \{2,3\} \Rightarrow f(2)=f(3)=0$; deci

$f(0)\cdot f(1)\cdot \underbrace{f(2)}_{=0}\cdot ....\cdot f(2010) = 0$.

5. Dacă $C(x_C, y_C)$ este simetricul punctului A faţă de B, atunci punctul B este mijlocul segmentului AC. Prin urmare $\left.\begin{cases} x_B = \frac{x_C+x_A}{2} \\ y_B = \frac{y_C+y_A}{2} \end{cases}\right| \Rightarrow \left.\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{cases}\right| \Rightarrow C(0,0)$.

6. Fie triunghiul ABC în care $AB = AC = 5$, $BC = 8$ şi $AD \perp BC$, unde D este mijlocul segmentului BC. Atunci, din teorema lui Pitagora, rezultă că $AD = 3$, deci aria triunghiului

Scanned with OKEN Scanner

va fi $A_{ABC}=\frac{AD\cdot BC}{2}=12$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a) $D(-1)=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=-4$.

b) $D(x)=\begin{vmatrix}1&1&x\\1&x&1\\x&1&1\end{vmatrix}\overset{C_1+C_2+C_3\to C_1}{=}\begin{vmatrix}x+2&1&x\\x+2&x&1\\x+2&1&1\end{vmatrix}=(x+2)\cdot\begin{vmatrix}1&1&x\\1&x&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(x+2)\left(-x^2+2x-1\right)=$

$-(x-1)^2(x+2)$

c) $D(x)=-4\Rightarrow x^3-3x-2=0$. Din punctul a) ştim că $x_1=-1$ verifică ecuaţia $D(x)=-4$. Deci, folosind eventual împărţirea polinoamelor, obţinem

$D(x)=-4\Rightarrow x^3-3x-2=0\Rightarrow(x+1)\left(x^2-x-2\right)=0$, cu soluţiile $x_1=x_2=-1, x_3=2$.

2. a) Legea de compoziţie „$\circ$” admite element neutru $\Leftrightarrow\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\circ e=e\circ x=x$

$\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x(2e-5)+(10-4e)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\left.\begin{cases}2e-5=0\\10-4e=0\end{cases}\right|\Rightarrow e=\frac{5}{2}\in\mathbb{R}$.

b) $x\circ 2=2\Leftrightarrow 2(x-2)(2-2)+2=2\Leftrightarrow 2=2\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$, deci $A=\mathbb{R}$.

c) Din punctul b) rezultă că $x\circ 2=2,\forall x\in\mathbb{R}$ şi analog $2\circ x=2,\forall x\in\mathbb{R}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Aşadar $x\circ 2=2\circ x=2,\forall x\in\mathbb{R}$ şi deci

$(-2010)\circ(-2009)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2009\circ 2010=2$, câtă vreme elementul 2 se regăseşte în compunerea celor 4021 de elemente.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a) $f(x)-2+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-2+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=0$, pentru orice $x\in[0,\infty)$.

b) Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1}+\underbrace{\frac{x+1}{x+2}}_{\to 1}\right)=2\Rightarrow d:y=0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $+\infty$; aşadar graficul funcţiei nu va admite asimptotă oblică şi, ţinând cont de domeniul de definiţie, nu va avea nici asimptotă verticală.

c) Din punctul a) $f(x)=2-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2},\forall x\geq 0$.

1. a) Funcţia f este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty,0),(0,\infty)$. Studiem continuitatea

Scanned with OKEN Scanner

în punctul $x_0 = 0$: $l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (x+2) = 2$,

$f(0) = l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (e^x + 1) = 2$, rezultă de aici că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.

b) $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+2)\,dx + \int_{0}^{1} (e^x + 1)\,dx = e + 2$. .

c) $\int_{0}^{1} x \cdot f(x^2)\,dx = \int_{0}^{1} x \cdot (e^{x^2} + 1)\,dx = \frac{1}{2}(e^{x^2} + x^2)\Big|_0^1 = \frac{e}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTELE DATE LA EXAMENUL DE BACALAUREAT ÎN ANUL 2013
ENUNȚURI

SESIUNEA SPECIALĂ
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că numărul $2\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{28}$ este natural.
2. Calculați $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+1}=16$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,15\}$, acesta să fie multiplu de 7.
5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{j}$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
6. Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos x}=1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A(2))$.

b) Arătați că $A(1)\cdot A(2)=5A(1)$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.

a) Pentru $m=3$, calculați $f(1)$.

b) Determinați numărul real m știind că restul împărțirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 2.

c) Pentru $m=4$, arătați că $\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

c) Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $\int_0^1 x f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2$.

b) Calculați $\int_0^1 x f'(x)dx$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{f(x)}$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $3\left(2+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}=6$.
2. Calculați $f(-2)\cdot f(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+1)=\log_3 1$.
4. Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire de 10%.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(2,1)$ și $R(2,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR.
6. Calculați $\cos B$, știind că $\sin B=\frac{5}{13}$ și unghiul B este ascuțit.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.

b) Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A-xI_2=A$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Determinați matricele $M=\begin{pmatrix}m & m\\ m & 1\end{pmatrix}$, știind că $\det(M+A)=0$, unde m este număr real.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\star y=x+y-2$.

a) Calculați $5\star(-5)$.

b) Arătați că legea de compoziție „$\star$” este comutativă.

c) Calculați $(-3)\star(-2)\star(-1)\star 0\star 1\star 2\star 3$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

a) Arătați că $f'(x)=(x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Verificați dacă $f''(x)+f(x)=2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că funcția f are un punct de extrem.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_4^5 xf(x)dx$.

b) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=4+\ln x$ este o primitivă a funcției f.

c) Determinați numărul real a, $a>5$, pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=5$ și $x=a$, este egală cu $\ln 3$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că numărul $x=2(1+i)-2i$ este real.
2. Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+1}=x+1$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.
5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+\vec{j}$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
6. Se consideră $E(x)=\sin x+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.

b) Arătați că $A^2-6A=I_2$.

c) Determinați inversa matricei $B=A-6I_2$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\star y=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

a) Calculați $2\star 2$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\star x=\sqrt{12}$.

c) Arătați că numărul $\underbrace{1\star 1\star\ldots\star 1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}$ este întreg.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2-6x+9)$.

a) Arătați că $f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Verificați dacă $f(x)+f''(x)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 (x+1)f(x)dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)dx+\int_0^1 x^3 f(x)dx=\dfrac{1}{4}$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}=6$.
2. Calculați $f(0)\cdot f(2)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x-2}=25$.
4. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire de 10%.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(1,3)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
6. Calculați $\cos 45^\circ+\cos 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $M\left(\dfrac{1}{2}\right)+M\left(-\dfrac{1}{2}\right)=M(0)$.

b) Determinați numărul real a pentru care $\det(M(a))=0$.

c) Determinați matricea $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+1$.

a) Arătați că $f(1)=0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-2X+1$.

c) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-1$.

a) Arătați că $2\sqrt{x}f'(x)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Verificați dacă dreapta de ecuație $y=\dfrac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f.

c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

b) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcției f.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE (REZERVĂ)
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că numărul $\sqrt{8}-2\left(\sqrt{2}-3\right)$ este natural.
2. Calculați $(f\circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+1)=\log_2 5$.
4. După o ieftinire cu 20 % prețul unui produs scade cu 200 de lei. Calculați prețul produsului după ieftinire.
5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$ sunt opuși.
6. Calculați lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC=10$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x-y+2z=a\\2x-y=0\\y-z=1\end{cases}$, unde a este un număr real.

a) Determinați numărul real a știind că $(x,y,z)=(1,2,1)$ este soluție a sistemului.

b) Calculați determinantul matricei sistemului.

c) Rezolvați sistemul pentru $a=-2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X+a$, unde a este număr întreg.

a) Pentru $a=-2$, calculați $f(2)$.

b) Arătați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c) Arătați că, dacă polinomul f are o rădăcină întreagă, atunci a este multiplu de 6.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,4)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

a) Arătați că $\int_2^4 (x-1)f(x)dx=\ln\dfrac{5}{3}$.

b) Calculați $\int_2^3 \left(x^3-1\right)f(x)dx$.

c) Arătați că aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=2$ și $x=3$, este egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $2\left(5-\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}=10$.
2. Calculați $f(-3)+f(3)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-9$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x}=25$.
4. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20 %.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(3,1)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
6. Calculați $\cos 30^\circ+\cos 150^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det A$.

b) Pentru $x=0$ arătați că $A-B=I_2$.

c) Determinați numărul real x pentru care $\det(A+B)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=x+y+3$.

a) Calculați $2\circ(-2)$.

b) Arătați că $e=-3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

c) Determinați numărul real x pentru care $2013\circ(-2013)=x\circ x$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat

Scanned with OKEN Scanner

pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$.

a) Calculați $\int_0^1 f'(x)dx$.

b) Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+x+1$ este o primitivă a funcției f.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că numărul $a=3(2+5i)-5(1+3i)$ este real.
2. Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10x+25$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2+x+1)=\log_5(x+2)$.
4. După o ieftinire cu 10% prețul unui produs este 90 de lei. Calculați prețul produsului înainte de ieftinire.
5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuație $y=x-1$ și punctul $A(2,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este paralelă cu h.
6. Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=5$, $AC=6$ și $BC=7$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A(2)+A(6)=2A(4)$.

b) Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x))=0$.

c) Determinați inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X^2+mX+m$, unde m este un număr real.

a) Arătați că f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

b) Determinați numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.

c) Determinați valorile reale ale lui m știind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $x\geq\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

a) Arătați că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.

b) Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f știind că $F(1)=-1$.

c) Arătați că $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $3\left(4-\sqrt{3}\right)+3\sqrt{3}=12$.
2. Calculați $f(-4)+f(4)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-16$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x-2)^2-x^2+8=0$.
4. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30 %.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(2,1)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
6. Calculați $\cos A$, știind că $\sin A=\frac{1}{2}$ și unghiul A este ascuțit.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$, unde b este număr real.

a) Calculați $\det A$.

b) Determinați numărul real b pentru care $A\cdot B=2I_2$.

c) Determinați numărul real b pentru care $\det(A+B)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-2$.

c) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^3$.

a) Verificați dacă $f'(x)=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^2}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Verificați dacă funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ este o primitivă a funcției f.

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

c) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+\ln 2$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE (REZERVĂ)
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că numărul $x=3(1-i)+3i$ este real.
2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ cu axa Ox.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+3}=8$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,20\}$, acesta să fie divizibil cu 4.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(3,0)$ și $C(2,5)$. Calculați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.
6. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, știind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{6}$ și $C=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(M(2))$.

b) Verificați dacă $M(x)\cdot M(y)=M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numărul real a astfel încât $M(a)\cdot M(x)=M(a)$, pentru orice număr real x.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

a) Calculați $0\circ(-2)$.

b) Arătați că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x\circ x=6$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$.

a) Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

b) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ este o primitivă a funcției f.

c) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=4$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $2\left(2+\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}=4$.
2. Calculați $f(4)+f(-4)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2x}=49$.
4. Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10 %.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ și $B(4,1)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
6. Calculați $\sin 45^\circ-\sin 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & m+1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

a) Calculați $\det A$.

b) Pentru $m=-2$, arătați că $A+B=O_2$.

c) Determinați numărul real m pentru care $A\cdot B=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 7 & 16\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+X$.

a) Arătați că $f(-1)=0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2+X$.

c) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+10-\frac{11}{x}$.

a) Verificați dacă $f'(x)=\frac{x^2+11}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+9$.

a) Calculați $\int_1^2 f'(x)dx$.

b) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+9\ln 2$.

c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^2$ este egal cu 81π.

SUBIECTELE DATE LA EXAMENUL DE BACALAUREAT ÎN ANUL 2014
ENUNȚURI

SESIUNEA SPECIALĂ
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se consideră numărul complex $z=2+3i$. Calculați z^2.
2. Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9(x^2+5)=1$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(2,0)$ și $C(0,3)$. Calculați aria triunghiului ABC.
6. Se consideră $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Calculați $\det(A(1))$.

b) Determinați numărul real a știind că $\det(A(a))=1$,

c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy-3x-3y+6$.

a) Calculați $1\circ 2$.

b) Arătați că $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$.

c) Arătați că $f(x)\le -\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_1^2 (x+1)f(x)dx=2\ln 2-1$.

b) Arătați că $\int_1^e \left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=1$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a grficului funcției $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{\ln x}{f(x)}$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1$.
2. Determinați numărul real m știind că $f(m)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+1}=1$.
4. În anul 2013, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 4 % din valoarea veniturilor anuale ale firmei. Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în 2013.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,6)$, $B(2,6)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.
6. Arătați că $tg^2 60^\circ + tg^2 45^\circ = 4$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=-1$.

b) Arătați că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

c) Determinați numărul real x știind că $A\cdot A-xA=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\star y=2(x+y-1)-xy$.

a) Arătați că $1\star 2=2$.

b) Arătați că $x\star 2=2\star x=2$ pentru orice număr real x.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\star x=x$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

b) Arătați că $f'(x)=f(x)+e^x$ pentru orice număr real x.

c) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x$.

a) Arătați că $\int_1^2 3x^2\,dx=7$.

b) Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=2014$.

c) Determinați numărul natural n, $n\geq 2$ știind că $\int_1^n \dfrac{f(x)}{x}dx=\dfrac{13}{2}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Determinați partea reală a numărului complex $z=3+2(1-i)$.
2. Arătați că $x_1+x_2+2x_1x_2=23$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+10=0$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x+1}=1$.
4. Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
5. Determinați numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y=(a-1)x+1$ și $y=2x-3$ sunt paralele.
6. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det(A(2))$.

b) Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Arătați că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\star y=4(x+y-3)-xy$.

a) Calculați $2\star 4$.

b) Arătați că $x\star y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x și y.

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \star x \star x = x$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$.

b) Arătați că $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

c) Arătați că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+15}$.

a) Arătați că $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)dx=2014$.

b) Arătați că $\int_{-1}^{1} f'(x)\cdot f(x)dx=-\dfrac{1}{144}$.

c) Determinați numărul real a, $a>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$, are aria egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $5\left(2+\sqrt{3}\right)-5\sqrt{3}=10$.
2. Determinați numărul real a știind că $f(1)=a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x+1)=\log_2 5$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ și $B(3,5)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
6. Arătați că $\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ=\dfrac{3}{4}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det A=0$.

b) Determinați numărul real x știind că $B+C=A$.

c) Arătați că $B\cdot B+B=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

a) Arătați că $0\circ(-4)=-4$.

b) Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x și y.

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 12$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3}{4}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$.

a) Arătați că $\int_0^1 e^x\,dx=e-1$.

b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Calculați $\int_0^1 F(x)dx$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE (REZERVĂ)
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se consideră numărul complex $z=2+i$. Calculați z^2.
2. Determinați numărul real m știind că punctul $M(m,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-3)=2$.
4. Determinați numărul submulțimilor cu număr impar de elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4\}$.
5. În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu M mijlocul laturii AD. Arătați că $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}$.
6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Arătați că $\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.

b) Arătați că $A+A\cdot A=2014I_2$.

c) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $A\cdot X=2014I_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+mX-6$, unde m este număr real.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați $f(0)$.

b) Arătați că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=1$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c) Determinați numărul real m știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$.

a) Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln 2$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-1,+\infty)$.

c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$, are aria mai mare sau egală cu $\ln 4$, pentru orice număr natural nenul n.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1$.
2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ cu axa Oy.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x-1}=9$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 3.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(4,1)$ și $C(4,4)$. Arătați că $AB=BC$.
6. Determinați aria triunghiului ABC dreptunghic A știind că $AB=6$ și $BC=10$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=0$.

b) Arătați că $A\cdot A=5A$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A+\begin{pmatrix} x & y \\ y & -3 \end{pmatrix}=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+xy$.

a) Arătați că $(-1)\circ 1=-1$.

b) Arătați că $x\circ y=(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+1)\circ(x-3)=4$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$.

b) Arătați că $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=3$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1}(2x+1)dx=2$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x-1$.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Determinați numărul real x pentru care numerele 2, $x+2$ și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-10$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2-2x)=3$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie par.
5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ sunt opuși.
6. Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det B$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că $AB = BA$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 4(x + y - 5)$.

a) Calculați $4 * 5$.

b) Arătați că $x * y = (x-4)(y-4) + 4$ pentru orice numere reale x și y.

c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2014$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

b) Arătați că $f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(-1, 1)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

a) Arătați că $\int_1^e f(x) f'(x) dx = \dfrac{1}{2}$.

b) Arătați că $\int_1^e x^3 f(x) dx = \dfrac{3e^4 + 1}{16}$.

c) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Pentru $a = 3$ arătați că $\dfrac{a}{2} - \dfrac{2}{a} = \dfrac{5}{6}$.

2. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 5} = 3$.

4. Prețul unei imprimante este 120 de lei. Determinați prețul imprimantei după o scumpire cu 10%.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 2)$, $B(2, 5)$ și $C(6, 5)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC.

6. Calculați $\cos A$ știind că $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și unghiul A este ascuțit.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde b este număr real.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $\det A = -2$.

b) Determinați numărul real b pentru care $A + B = AB + C$.

c) Arătați că $\det(B + 2C) = \det B - \det A$ pentru orice număr real b.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$.

a) Arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin $X - 1$.

c) Arătați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -2$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

b) Arătați că $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$.

b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(-1, +\infty)$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE (REZERVĂ)
Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} = 3$.
2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ cu axa Ox.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} = 3^2$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 8.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ și $C(3, 3)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
6. Determinați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $BC = 10$ și $m(\sphericalangle C) = 30°$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det B=-5$.

b) Arătați că $\det A\neq 0$ pentru orice număr întreg a.

c) Determinați numărul întreg a știind că inversa matricei A are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\star y=xy-5x-5y+30$.

a) Arătați că $1\star 5=5$.

b) Arătați că $x\star y=(x-5)(y-5)+5$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\star x=x$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x$.

a) Arătați că $f'(x)=2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^e \dfrac{1}{x}dx=1$.

b) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2$ este o primitivă a funcției f.

c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria mai mică strict decât 4.

Scanned with OKEN Scanner

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA SPECIALĂ
Matematică *M st-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3 = 6$ și $a_4 = 8$.
2. Determinați valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+3} = x + 1$.
4. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 1)$ și $B(0, 3)$. Determinați ecuația dreptei AB.
6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 8$ și $C = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
   (a) Arătați că $\det(A) = -2$.
   (b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(B(x) + I_2) = 8$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \star y = xy - 7x - 7y + 56$.
   (a) Arătați că $(-7) \star 7 = 7$.
   (b) Arătați că $x \star y = (x-7)(y-7) + 7$, pentru orice numere reale x și y.
   (c) Calculați $1 \star 2 \star 3 \star \ldots \star 2015$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln x + x$.
   (a) Arătați că $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e$.
   (b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f.
   (c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
   (a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{3}{2}$.
   (b) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$.
   (c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IUNIE-IULIE
M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $z^2 - 2i = 0$.
2. Calculați $(g \circ f)(3)$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2015$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-5x} = 5^{3-3x}$.
4. Determinați numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x + 7$.
6. Determinați aria triunghiului MNP, știind că $MN = 12$, $MP = 3$ și $m(\sphericalangle M) = 30°$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln x + x$.

   (a) Arătați că $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e$.

   (b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f.

   (c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

   (a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{3}{2}$.

   (b) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

   (c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IUNIE-IULIE
M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $z^2 - 2i = 0$.
2. Calculați $(g \circ f)(3)$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2015$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-5x} = 5^{3-3x}$.
4. Determinați numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x + 7$.
6. Determinați aria triunghiului MNP, știind că $MN = 12$, $MP = 3$ și $m(\sphericalangle M) = 30°$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

   (a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.

   (b) Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a)) = 0$.

   (c) Arătați că $A(a)A(b) = A(a+b) + abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 2$, unde m este număr real.

   (a) Arătați că $f(0) = 2$.

   (b) Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g = X^2 + X - 2$ este egal cu 0.

   (c) Demonstrați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.

   (a) Arătați că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

   (b) Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

   (c) Demonstrați că $e^x \geq x + 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

   (a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 2x - 5)\,dx = \dfrac{1}{3}$.

   (b) Calculați $\int_0^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

   (c) Arătați că $\int_{2014}^{2015} \dfrac{1}{f(x)}\,dx \leq \dfrac{1}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IUNIE-IULIE
SUBIECT DE REZERVĂ
M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Calculaţi $(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})$, unde $\mathrm{i}^2=-1$.
2. Calculaţi $f(f(3))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+17)=\log_3 81$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,\,a)$, $B(3,\,2)$ şi $C(2,\,1)$. Determinaţi numărul real a pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare.
6. $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
   (a) Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.
   (b) Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
   (c) Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(2)\cdot X=A(8)$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.
   (a) Arătaţi că $(-3)\circ 3=3$.
   (b) Arătaţi că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y.
   (c) Calculaţi $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3e^x + x^2$.

   (a) Arătați că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 3$.

   (b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

   (c) Arătați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

   (a) Arătați că $\displaystyle\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = 4$.

   (b) Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) e^x \, dx = e^2$.

   (c) Determinați numărul real a, $a > 1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = a$, are aria egală cu $4 + \ln a$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA AUGUST
M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și rația $r = 2$.

2. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(m, 0)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 4) = \log_2 8$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u} = (a + 1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.

Scanned with OKEN Scanner

6. Arătați că $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
   (a) Arătați că $A(2014) + A(2016) = 2A(2015)$.
   (b) Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
   (c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(2) + xA(3)) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \star y = -xy - x - y - 2$.
   (a) Arătați că $(-1) \star 1 = -1$.
   (b) Arătați că $x \star y = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.
   (c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2) \star (2x-3) = 5$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.
   (a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x^4}{x^2 + 1}$.
   (c) Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.
2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x}$.
   (a) Arătați că $\int_1^2 xf(x)\,dx = \frac{7}{2}$.
   (b) Demonstrați că funcția $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = x + 2\ln x + 2015$ este o primitivă a funcției f.
   (c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției

$$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; g(x) = (f(x) - 1)\ln x,$$

   axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ are aria egală cu 1.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA AUGUST
SUBIECT DE REZERVĂ
M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3+\mathrm{i}$ şi $z_2 = 3-\mathrm{i}$. Arătaţi că numărul $z_1 z_2$ este real.
2. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(1, 1)$ aparţine graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} = x$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ şi $B(2, a)$. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctele O, A şi B sunt coliniare.
6. Se consideră $E(x) = \cos\dfrac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
   (a) Arătaţi că $\det(A(0)) = 4$.
   (b) Determinaţi numărul real a, ştiind că $A(1) + A(3) = aA(2)$.
   (c) Arătaţi că $A(x)A(y) = 2A(x+y) + xyI_2$, pentru orice numere reale x şi y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \star y = 3xy + 6x + 6y + 10$.
   (a) Arătaţi că $2 \star (-2) = -2$.
   (b) Arătaţi că $x \star y = 3(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x şi y.

(c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \star x \star x = x$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x$.

   (a) Arătați că $f'(x) = (x+2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

   (c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $[-3, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.

   (a) Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2+1) f(x)\,dx = 0$.

   (b) Arătați că $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.

   (c) Determinați numărul real m, $m > 0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = m$, are aria egală cu $\ln 2$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA SPECIALĂ
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. Arătați că $\left(2 - \dfrac{1}{2}\right) : \dfrac{3}{10} = 5$.

2. Calculați $f(-2) + f(2)$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = 3$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 5.

Scanned with OKEN Scanner

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $M(0, 4)$ și $N(4, 0)$. Arătați că triunghiul MON este isoscel.

6. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AB = 10$ și $AC = 12$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Arătați că $\det(A) = 1$.

   (b) Arătați că $A \cdot A + I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Demonstrați că $\det(A - aI_2) \geq 1$, pentru orice număr real a.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X^2 + X + 5$.

   (a) Arătați că $f(-5) = 0$.

   (b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 6X + 5$.

   (c) Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{23}{5}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

   (a) Arătați că $f'(x) = 4x(x - 1)(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f.

   (c) Demonstrați că $0 \leq f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

   (a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \sqrt{x}\right) dx = \frac{26}{3}$.

   (b) Demonstrați că funcția $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2015$ este o primitivă a funcției f.

   (c) Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(f(x) - \sqrt{x}\right)e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$, are aria egală cu $e(2e - 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $M(0, 4)$ și $N(4, 0)$. Arătați că triunghiul MON este isoscel.

6. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AB = 10$ și $AC = 12$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Arătați că $\det(A) = 1$.

   (b) Arătați că $A \cdot A + I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Demonstrați că $\det(A - aI_2) \geq 1$, pentru orice număr real a.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X^2 + X + 5$.

   (a) Arătați că $f(-5) = 0$.

   (b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 6X + 5$.

   (c) Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{23}{5}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

   (a) Arătați că $f'(x) = 4x(x - 1)(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f.

   (c) Demonstrați că $0 \leq f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

   (a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \sqrt{x}\right) dx = \frac{26}{3}$.

   (b) Demonstrați că funcția $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2015$ este o primitivă a funcției f.

   (c) Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(f(x) - \sqrt{x}\right)e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$, are aria egală cu $e(2e - 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IULIE
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.
2. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,\,0)$ aparţine graficului funcției f, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=4$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,\,20,\,30,\,40,\,50,\,60,\,70,\,80,\,90\}$, acesta să fie multiplu de 15.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,\,2)$ și $B(4,\,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
6. Arătați că $\sin x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.
   (a) Arătați că $\det(A)=-2$.
   (b) Arătați că $A+B=5C$.
   (c) Demonstrați că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziţie $x\circ y=xy+4x+4y+12$.
   (a) Arătați că $5\circ(-4)=-4$.
   (b) Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.
   (c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$.
   (a) Arătați că $f'(x) = 6x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x) - 2x^3}$.
   (c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x^2$.
   (a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - 3x^2 \right) \mathrm{dx} = 15$.
   (b) Determinați primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 2015$.
   (c) Determinați numărul natural n, $n > 1$, știind că $\int_1^n \dfrac{f(x)}{x^2} \mathrm{dx} = 9$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IULIE
SUBIECT DE REZERVĂ
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. Arătați că $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3} = 1$.
2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x + 2015$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = 2$.
4. După o reducere cu 10% un obiect costă 99 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de reducere.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2, 1)$ și $N(4, 1)$. Determinați lungimea segmentului MN.

Scanned with OKEN Scanner

6. Arătați că $\sin x = \frac{4}{5}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Arătați că $\det(A) = 0$.

   (b) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot A = xA$.

   (c) Arătați că $\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = 2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 1$.

   (a) Arătați că $f(1) = -2$.

   (b) Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$.

   (c) Determinați numărul real a pentru care

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$

   unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

   (a) Arătați că $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

   (b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

   (c) Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$.

   (a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 2)\,dx = \frac{1}{3}$.

   (b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(3) = 5$.

   (c) Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$, are aria egală cu $3e - 4$.

Scanned with OKEN Scanner

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA AUGUST
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. Arătaţi că $\frac{1}{2} : 0,5 - 1 = 0$.
2. Calculaţi $f(-1) + f(0) + f(1)$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+1} = 5$.
4. Un obiect costă 150 lei. Calculaţi preţul obiectului după o scumpire de 30%.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 5)$ şi $B(3, 5)$. Determinaţi distanţa de la punctul A la punctul B.
6. Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, ştiind că $AC = 5$ şi $m(\sphericalangle B) = 45°$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Arătaţi că $\det(M) = 4$.
   (b) Arătaţi că $M \cdot M + 3M + 4I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât $M \cdot M \cdot M = aM + bI_2$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 5X - 1$.
   (a) Arătaţi că $f(1) = 0$.
   (b) Arătaţi că $f(a) + f(-a) + 2 \leq 0$, pentru orice număr real a.
   (c) Demonstraţi că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+1$.
   (a) Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
   (b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
   (c) Demonstrați că $f(2012)+f(2014)\leq f(2013)+f(2015)$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.
   (a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)+4)\,dx=\frac{1}{3}$.
   (b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)+5}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
   (c) Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}\,dx=12$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA AUGUST
SUBIECT DE REZERVĂ
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. Arătați că media geometrică a numerelor $a=16$ și $b=9$ este egală cu 12.
2. Determinați numărul real m pentru care $f(2)=0$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1}=3^5$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea
   $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie multiplu de 2.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

Scanned with OKEN Scanner

6. Arătați că $\sin x = \frac{1}{2}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $C(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
   (a) Arătați că $\det A = -5$.
   (b) Arătați că $\det(A + C(-1)) = \det B$.
   (c) Determinați numărul real x pentru care $C(x) \cdot A - A \cdot C(x) = B$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 6X + 3$.
   (a) Arătați că $f(1) = 0$.
   (b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 3X - 3$.
   (c) Demonstrați că $x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
   (a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x}$.
   (c) Arătați că $-1 \leq f(x) \leq 3$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.
2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$.
   (a) Arătați că $\int_2^3 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = 5$.
   (b) Demonstrați că funcția $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + \ln x + 2015$ este o primitivă a funcției f.
   (c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 2x$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTELE DATE LA EXAMENUL DE BACALAUREAT ÎN ANUL 2013
SOLUȚII

SESIUNEA SPECIALĂ
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\sqrt{28}=\sqrt{4\cdot 7}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=2\sqrt{7}\Rightarrow 2\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{28}=2\sqrt{7}+2-2\sqrt{7}=2\in\mathbb{N}$.

2. $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=2(1+2+\cdots+10)-10=2\cdot\dfrac{10\cdot 11}{2}-10=100$.

3. $4^{x+1}=16\Leftrightarrow 4^{x+1}=4^2\Leftrightarrow x+1=2\Leftrightarrow x=1$.

4. Multiplii lui 7 din mulțimea A sunt 7 și 14, ceea ce înseamnă că avem 2 cazuri favorabile. Deoarece mulțimea A are 15 elemente, adică avem 15 cazuri posibile, rezultă că probabilitatea cerută este $P=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{15}$.

5. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{i}-\vec{j}=3\vec{i}\Rightarrow AC=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3$.

6. $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos x>0$. Avem $\dfrac{3\sin x-2\cos x}{\cos x}=1\Leftrightarrow 3\sin x-2\cos x=\cos x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sin x=3\cos x\Leftrightarrow\sin x=\cos x$. Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, avem că $x=\dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Pentru $x=2$ obținem $A(2)=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. Așadar,

$$\det(A(2))=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{vmatrix}=1+8+8-4-4-4=5.$$

b) Pentru $x=1$ obținem $A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Rezultă că $A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}5&5&5\\5&5&5\\5&5&5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=5A(1).$$

c) $\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=1+x^3+x^3-x^2-x^2-x^2=2x^3-3x^2+1$. Prin urmare,

Scanned with OKEN Scanner

$\det(A(x))=0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=0 \Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x^2+1=0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1)-(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)=0$. Obținem $x=1, x=-\frac{1}{2}$.

2.

a) Pentru $m=3$, avem $f=X^3-2X^2-2X+3$. Atunci $f(1)=1-2-2+3=0$.

b) $f(2)=2 \Leftrightarrow 2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2+m=2 \Leftrightarrow 8-8-4+m=2 \Leftrightarrow m-4=2 \Leftrightarrow m=6$.

c) Pentru $m=4$, avem $f=X^3-2X^2-2X+4$. Relațiile lui Viète sunt: $x_1+x_2+x_3=2$,

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2$ și $x_1x_2x_3=-4$. Atunci $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=$.

$=(x_1+x_2+x_3)\frac{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=2\cdot\frac{-2}{-4}=1$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Fie $x\in(0,+\infty)$. Avem $f'(x)=(x\cdot\ln x)'=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

c) Fie $x\in(0,+\infty)$. Avem $f''(x)=(\ln x+1)'=(\ln x)'+1'=\frac{1}{x}>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

Atunci funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2.

a) $\int_0^1 x f(x)dx=\int_0^1 x\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$.

b) Vom aplica metoda de integrare prin părți. Avem:

$\int_0^1 x f'(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}-\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

c) $h(x)=\frac{1}{f(x)}=x^2+1$, pentru orice $x\in[0,1]$. Volumul corpului va fi

$V=\pi\int_0^1 h^2(x)dx=\pi\int_0^1(x^2+1)^2dx=\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{28\pi}{15}$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $3\left(2+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}=3\cdot 2+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=6$.

2. Avem $f(-2)=-2+1=-1$ și $f(0)=0+1=1$. Atunci $f(-2)\cdot f(0)=(-1)\cdot 1=-1$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Cum $x^2+1>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_3(x^2+1)$ este bine definită. Funcția logaritmică fiind injectivă, putem scrie: $\log_3(x^2+1)=\log_3 1\Leftrightarrow x^2+1=1\Leftrightarrow x^2=0$, de unde se obține $x=0$.

4. Avem că $10\%\cdot 1000=\frac{10}{100}\cdot 1000=100$. Prețul obiectului, după ieftinire, va fi $1000-100=900$ lei.

5. Să notăm cu M mijlocul segmentului PR. Atunci $x_M=\frac{x_P+x_R}{2}=\frac{2+2}{2}=2$ și $y_M=\frac{y_P+y_R}{2}=\frac{1+3}{2}=2$. Prin urmare, $M(2,2)$.

6. Folosind formula fundamentală a trigonometriei, obținem: $\sin^2 B+\cos^2 B=1\Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2+\cos^2 B=1\Leftrightarrow \cos^2 B=1-\frac{25}{169}\Leftrightarrow \cos^2 B=\frac{144}{169}$. Deoarece unghiul B este ascuțit, trebuie să avem $\cos B>0$. Prin urmare, $\cos B=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot 1=-1$.

b) $A\cdot A-xI_2=A\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2-x & 1\\ 1 & 1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Cele două matrice sunt egale dacă și numai dacă $2-x=1$ și $1-x=0$, adică $x=1$.

c) Avem că $M+A=\begin{pmatrix}m & m\\ m & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+1 & m+1\\ m+1 & 1\end{pmatrix}$. Așadar, $\det(M+A)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}m+1 & m+1\\ m+1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow (m+1)-(m+1)^2=0\Leftrightarrow (m+1)(1-m-1)=0\Leftrightarrow m(m+1)=0$. De aici rezultă că $m=0$ sau $m=-1$. Prin urmare, $M=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sau $M=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

2.

a) $5\star(-5)=5+(-5)-2=5-5-2=-2$.

b) Fie $x, y\in\mathbb{R}$. Avem $y\star x=y+x-2=x+y-2=x\star y$ (am folosit faptul că operația de adunare a numerelor reale este comutativă). Am arătat astfel că legea de compoziție „$\star$" este comutativă.

c) Pentru că legea de compoziție „$\star$" este asociativă, putem scrie că $(-3)\star(-2)\star(-1)\star 0\star 1\star 2\star 3=\big((-3)\star(-2)\big)\star\big((-1)\star 0\big)\star\big(1\star 2\big)\star 3=(-7)\star(-3)\star 1\star 3$

Scanned with OKEN Scanner

$=((-7)\star(-3))\star(1\star 3)=(-12)\star 2=-12+2-2=-12$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Fie $x\in\mathbb{R}$. Avem $f'(x)=(x\cdot e^x)'=x'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}$. Avem $f''(x)=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$. Atunci $f''(x)+f(x)=(x+2)e^x+xe^x=2(x+1)e^x=2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Știm că $f'(x)=(x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=-1$. Deoarece $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$, iar $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, rezultă că funcția f are un punct de extrem, $x=-1$.

2.

a) $\int_4^5 xf(x)dx=\int_4^5 x\frac{1}{x}dx=\int_4^5 1dx=x\Big|_4^5=5-4=1$.

b) Funcția F este derivabilă pe intervalul $(0,+\infty)$, deoarece se poate scrie ca sumă de două funcții derivabile (funcția constantă și funcția logaritm). În plus, $F'(x)=(4+\ln x)'=\frac{1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Așadar, funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Avem că $f(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Atunci aria suprafeței este $\mathcal{A}=\int_5^a f(x)dx=\int_5^a\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_5^a=\ln a-\ln 5=\ln\frac{a}{5}$. Pe de altă parte, $\mathcal{A}=\ln 3$. Atunci, din ecuația $\ln\frac{a}{5}=\ln 3$, obținem $\frac{a}{5}=3$, adică $a=15$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Avem că $x=2(1+i)-2i=2+2i-2i=2\in\mathbb{R}$.
2. Deoarece $f(2)=2-2=0$, rezultă că $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)=0$.
3. Cum $x^2+1>0$ pentru orice număr real x, avem existența radicalului asigurată pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Impunem condiția de compatibilitate $x+1>0$, adică $x\in(-1,+\infty)$. Ecuația data, prin ridicarea ambilor membri la pătrat, devine $x^2+1=(x+1)^2$, de unde se obține $2x=0$, adică $x=0\in(-1,\infty)$. Prin urmare, ecuația $\sqrt{x^2+1}=x+1$ are soluția $x=0$.
4. Numerele de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 5 sunt 15 și 51, ceea ce înseamnă că avem 2 cazuri favorabile. Deoarece există 90 de numere naturale de două

Scanned with OKEN Scanner

cifre, rezultă că sunt 90 cazuri posibile. Probabilitatea căutată va fi

$P=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{90}=\dfrac{1}{45}$.

5. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{i}+\vec{j}=4\vec{i}+3\vec{j}$. Atunci $AC=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$.

6. $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=1\cdot5-3\cdot2=5-6=-1$.

b) $A^2-6A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 18 & 31\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 12\\ 18 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

c) Avem $B=A-6I_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. Atunci $B'=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ și

$\det B=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5-6=-1$. Cum $B^*=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -5\end{pmatrix}$, rezultă că $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

2.

a) $2\star2=\sqrt{2^2+2^2+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

b) Avem $x\star x=\sqrt{12}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x^2+4}=\sqrt{12}\Leftrightarrow2x^2+4=12\Leftrightarrow x^2=4$, iar de aici se obține $x=-2$ sau $x=2$.

c) Avem că $1\star1=\sqrt{1^2+1^2+4}=\sqrt{6}$. Cum legea de compoziție este asociativă, rezultă că

$\underbrace{1\star1\star\ldots\star1}_{\text{1 de 8 ori}}=\sqrt{6}\star\sqrt{6}\star\sqrt{6}\star\sqrt{6}=4\star4=\sqrt{4^2+4^2+4}=\sqrt{36}=6$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Fie $x\in\mathbb{R}$. Avem: $f'(x)=\left(e^x\right)'(x^2-6x+9)+e^x(x^2-6x+9)'=$

$=e^x(x^2-6x+9)+e^x(2x-6)=e^x(x^2-4x+3)$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}$. Avem: $f''(x)=\left(e^x\right)'(x^2-4x+3)+e^x(x^2-4x+3)'=e^x(x^2-2x-1)$. Atunci

$f(x)+f''(x)=e^x(x^2-6x+9)+e^x(x^2-2x-1)=2e^x(x^2-4x+4)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Știm că $f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Ecuația $f'(x)=0$ este echivalentă cu ecuația de gradul al doilea $x^2-4x+3=0$. Obținem soluțiile $x_1=1$ și $x_2=3$. Din tabelul

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +	0	- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + +	

Scanned with OKEN Scanner

$f(x)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

rezultă punctele de extrem $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$.

2.

a) $\int_0^1 (x+1)f(x)dx = \int_0^1 (x+1)\frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 x^2 f(x)dx + \int_0^1 x^3 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+x^3)f(x)dx = \int_0^1 x^2(x+1)\frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

c) $\mathcal{V} = \pi\int_0^1 h^2(x)dx = \pi\int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx =$

$= \pi\left(x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2} = 6-3\sqrt{2}+3\sqrt{2} = 6$.

2. Avem $f(0) = 0-1 = -1$ și $f(2) = 2-1 = 1$. Atunci $f(0)\cdot f(2) = (-1)\cdot 1 = -1$.

3. $5^{x-2} = 25 \Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^2 \Leftrightarrow x-2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

4. $10\%\cdot 100 = \frac{10}{100}\cdot 100 = 10$. Prețul obiectului după o scumpire de 10% este egal cu $100+10 = 110$ lei.

5. $AB = \sqrt{(1-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

6. Avem $\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ$. Atunci $\cos 45^\circ + \cos 135^\circ = \cos 45^\circ - \cos 45^\circ = 0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $M\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2\cdot\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Atunci

$M\left(\frac{1}{2}\right)+M\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 0 \end{pmatrix} = M(0)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\det(M(a))=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 4a^2=0 \Leftrightarrow a=0$.

c) $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)=\left(M(-2)+M(2)\right)+\left(M(-1)+M(1)\right)+M(0)=$

$M(0)+M(0)+M(0)=3M(0)=3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.

a) Avem $f(1)=1^3-2\cdot 1^2+1=1-2+1=0$.

b) Efectuăm împărțirea polinomului f la polinomul g:

$$\begin{array}{r|l} X^3-2X^2+1 & X^2-2x+1 \\ \hline -X^3+2X^2-X & X \\ / \quad / \quad -X+1 & \end{array}$$

Câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g sunt $q=X$, respectiv $r=-X+1$.

c) Din relațiile lui Viète avem că $x_1+x_2+x_3=2$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$. Atunci:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=2^2-2\cdot 0=4$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Avem $f'(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Atunci

$2\sqrt{x}f'(x)=2\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0, situat pe graficul funcției f, este $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Avem $f(4)=\sqrt{4}-1=2-1=1$ și $f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$.

Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f, va fi $y=\dfrac{1}{4}(x-4)+1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-1+1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x$.

c) Avem că $f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Prin urmare, funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2.

a) $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(2x+1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big|_1^2=6-2=4$.

b) Funcția F este derivabilă pe intervalul $(0,+\infty)$, deoarece se poate scrie ca sumă de două funcții derivabile (funcția de gradul doi și funcția logaritm). În plus,

Scanned with OKEN Scanner

$F'(x)=(x^2+x+\ln x)'=2x+1+\frac{1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Aşadar, funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

c) Avem că $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Atunci aria cerută este:

$$\mathcal{A}=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(2x+1+\frac{1}{x}\right)dx=F(2)-F(1)=6+\ln 2-2-\ln 1=4+\ln 2.$$

SESIUNEA IUNIE-IULIE (REZERVĂ)
Matematică *M_ştiinţele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Avem $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Atunci $\sqrt{8}-2\left(\sqrt{2}-3\right)=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6=6\in\mathbb{N}$.
2. Cum $f(0)=3\cdot 0+1=1$, rezultă că $(f\circ f)(0)=f\left(f(0)\right)=f(1)=3\cdot 1+1=4$.
3. $\log_2(x^2+1)=\log_2 5\Leftrightarrow x^2+1=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=2$, care verifică ecuaţia.
4. Notăm cu x preţul initial al produsului. Atunci

   $20\,\%\cdot x=200\Leftrightarrow\frac{20}{100}\cdot x=200\Leftrightarrow x=\frac{200\cdot 100}{20}\Leftrightarrow x=1000$. Preţul initial al produsului a fost de 1000 lei. Preţul produsului după ieftinire este de $1000-200=800$ lei.
5. Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ fiind opuşi, trebuie să aibă loc egalitatea $\vec{u}=-\vec{v}$, adică $(a-1)\vec{i}+4\vec{j}=-2\vec{u}+4\vec{j}$, de unde se obţine $a-1=-2\Leftrightarrow a=-1$.
6. Triunghiul ABC fiind dreptunghic în A, lungimea medianei din A este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, adică este egală cu $\frac{10}{2}=5$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Tripletul $(x,y,z)=(1,2,1)$ este soluţie a sistemului înseamnă că $x=1$, $y=2$ şi $z=1$. Observăm că ultimele două ecuaţii ale sistemului satisfac aceste cerinţe. Înlocuind acum $x=1$, $y=2$ şi $z=1$ în prima ecuaţie a sistemului, obţinem că $a=1$.

b) Determinantul matricei sistemului este $\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&-1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=1+4+0+0-0-2=3$.

c) Pentru $a=-2$ se obţine sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y+2z=-2\\2x-y=0\\y-z=1\end{cases}$. Din a doua ecuaţie a sistemului obţinem $y=2x$. Din a treia ecuaţie a sistemului avem că $z=y-1$, adică $z=2x-1$. Înlocuind acum $y=2x$ şi $z=2x-1$ în prima ecuaţie a sistemului, obţinem

Scanned with OKEN Scanner

ecuația $x-2x+4x-2=-2$, adică $3x=0$, de unde rezultă că $x=0$. Atunci $y=0$ și $z=-1$.

2.

a) Pentru $a=-2$, avem $f=X^3-X-2$. Atunci $f(2)=2^3-2-2=4$.

b) Din relațiile lui Viète, avem că $x_1+x_2+x_3=0$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-1$. Atunci:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=0^2-2\cdot(-1)=2$.

c) Fie $k\in\mathbb{Z}$ o rădăcină a polinomului f. Atunci $f(k)=0$, adică $k^3-k+a=0$, ceea ce este echivalent cu $a=-k(k^2-1)=-(k-1)k(k+1)$. Cum a este egal cu produsul a trei numere întregi consecutive, rezultă că a este multiplu de 6.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Fie $x\in(0,+\infty)$. Avem $f'(x)=\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)'=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}$.

b) Rezolvăm în intervalul $(0,+\infty)$ ecuația $f'(x)=0$, adică $\frac{x-2}{x^2}=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Avem că $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(0,2)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(2,+\infty)$. Prin urmare, punctual de extreme al funcției f este $x=2$.

c) $f''(x)=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)'=\frac{1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{4-x}{x^3}>0$, pentru orice $x\in(0,4)$. Prin urmare, funcția f este convexă pe intervalul $(0,4)$.

2.

a) $\int_2^4 (x-1)f(x)dx=\int_2^4 (x-1)\frac{1}{x^2-1}dx=\int_2^4 \frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big|_2^4=\ln 5-\ln 3=\ln\frac{5}{3}$.

b) $\int_2^3 \left(x^3-1\right)f(x)dx=\int_2^3 \left(x^3-1\right)\frac{1}{x^2-1}dx=\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx=\int_2^3 \frac{x(x+1)+1}{x+1}dx=\int_2^3 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=\left(\frac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big|_2^3=\frac{5}{2}+\ln\frac{4}{3}$.

c) Avem că $f(x)=\frac{1}{x^2-1}>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$. Atunci:

$\mathcal{A}=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $2\left(5-\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}=10-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=10$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Avem $f(-3)=(-3)^2-9=9-9=0$ și $f(3)=3^2-9=9-9=0$. Atunci $f(-3)+f(3)=0$.

3. $5^{2x}=25 \Leftrightarrow 5^{2x}=5^2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$.

4. $20\%\cdot 100=\frac{20}{100}\cdot 100=20$. Prețul obiectului după o scumpire cu 20% este de $100+20=120$ lei.

5. $AB=\sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{4+0}=\sqrt{4}=2$.

6. $\cos 30^\circ+\cos 150^\circ=\cos 30^\circ-\cos(180^\circ-150^\circ)=\cos 30^\circ-\cos 30^\circ=0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot(-1)=1+0=1$.

b) Pentru $x=0$ avem că $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Atunci $A-B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

c) Avem $A+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x & -2\\ 0 & 1+x\end{pmatrix}$. Atunci $\det(A+B)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1+x & -2\\ 0 & 1+x\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (1+x)^2=0$. Obținem de aici că $x=-1$.

2.

a) $2\circ(-2)=2+(-2)+3=2-2+3=3$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}$. Avem $x\circ(-3)=x+(-3)+3=x$ și $(-3)\circ x=-3+x+3=x$. Am obținut că $x\circ(-3)=(-3)\circ x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că $e=-3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

c) $2013\circ(-2013)=x\circ x \Leftrightarrow 2013-2013+3=x+x+3 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

b) Fie $x\in(0,+\infty)$. Avem $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)'=\frac{(x+1)'x-(x+1)x'}{x^2}=\frac{x-x-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$. Cum $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, rezultă că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0, situat pe graficul funcției f, este $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Avem $f(1)=\frac{1+1}{1}=2$ și $f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$. Ecuația

Scanned with OKEN Scanner

tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f, va fi $y = -1 \cdot (x-1) + 2 \Leftrightarrow y = -x + 1 + 2 \Leftrightarrow y = -x + 3$.

2.

a) $\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 4 - 1 = 3$.

b) Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deoarece este funcție polinomială. Avem: $F'(x) = (x^3 + x + 1)' = (x^3)' + x' + 1' = 3x^2 + 1 = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 + x + 1$ este o primitivă a funcției f.

c) $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 (3x^2 + 1)dx = 3\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 1dx = \left(x^3 + x\right)\Big|_0^1 = 2$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a = 3(2+5i) - 5(1+3i) = 6 + 15i - 5 - 15i = 1 \in \mathbb{R}$.

2. Trebuie să rezolvăm ecuația $f(x) = 0$, adică $x^2 + 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 0$. Obținem că $x = -5$. Punctul de intersecție cu axa Ox a graficului funcției f este $A(-5, 0)$.

3. Avem $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că logaritmul din membrul stâng al ecuației are sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru logaritmul din membrul drept al ecuației impunem condiția de existență $x + 2 > 0$, adică $x \in (-2, +\infty)$. Atunci: $\log_5(x^2 + x + 1) = \log_5(x+2) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$. Amândouă sunt soluții ale ecuației, fiindcă sunt din intervalul $(-2, +\infty)$.

4. Putem aplica regula de trei simplă. Dacă prețul s-a ieftinit cu 10%, atunci putem scrie:

$90\% \ldots\ldots\ldots\ldots 90$ lei

$100\% \ldots\ldots\ldots\ldots x$ lei

Mărimile fiind direct proporționale, putem scrie că $\frac{90}{100} = \frac{90}{x}$, iar de aici rezultă imediat că $x = 100$. Așadar, prețul produsului înainte de ieftinire a fost de 100 lei.

5. Panta dreptei h este $m_h = 1$. Cum $d \parallel h$, trebuie să aibă loc egalitatea $m_d = m_h$. Scriem acum ecuația dreptei d care trece prin punctul $A(2, 2)$ și are panta $m_d = 1$: $y - 2 = 1 \cdot (x-2) \Leftrightarrow y - 2 = x - 2 \Leftrightarrow y = x$.

6. Din teorema cosinusului avem: $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{5 \cdot 12} = \frac{1}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Pentru $x=2$ obținem $A(2)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, iar pentru $x=6$ obținem $A(6)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 6 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Atunci $A(2)+A(6)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 6 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=2A(4)$.

b) $\det(A(x))=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 1+1-0-0+1-x=0\Leftrightarrow x=3$.

c) $\det(A(2))=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=1+1-0-0+1-2=1$. Avem $(A(2))^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Calculăm complementii algebrici: $d_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(+1)\cdot(1\cdot 1-1\cdot(-1))=2$,

$d_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(1\cdot 1-0\cdot(-1))=-1$, $d_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$, $d_{21}=-1$,

$d_{22}=1$, $d_{23}=-1$, $d_{31}=-3$, $d_{32}=2$, $d_{33}=-1$. Obținem astfel matricea adjunctă

$(A(2))^*=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Folosind formula $(A(2))^{-1}=\frac{1}{\det(A(2))}(A(2))^*$, obținem că

$(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

2.

a) Avem că $f(-1)=(-1)^3+(-1)^2+m\cdot(-1)+m=-1+1-m+m=0$. Rezultă că polinomul f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

b) Din relațiile lui Viète $x_1+x_2+x_3=-1$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m$ obținem:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=1-2m$. Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$, obținem $1-2m=11\Leftrightarrow -2m=10\Leftrightarrow m=-5$.

c) Am văzut la primul subpunct că $f(-1)=0$, ceea ce înseamnă că, de exemplu, $x_1=1$. Enunțul ne mai precizează că $|x_2|=|x_3|=1$. Folosind una din relațiile lui Viète, obținem că $|x_1x_2x_3|=|m|\Leftrightarrow|m|=1\Leftrightarrow m=-1$ sau $m=1$. Ambele valori verifică cerința.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

Scanned with OKEN Scanner

a) Fie $x \in (0, +\infty)$. Avem $f'(x) = (x - \ln x)' = x' - (\ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$.

b) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0, situat pe graficul funcției f, este $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Avem $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$ și $f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f, va fi $y = 0 \cdot (x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 1$.

c) Știm că $f'(1) = 0$. Avem $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1)$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1, +\infty)$. Prin urmare, funcția $x = 1$ este punct de minim. Putem astfel să afirmăm că $f(x) \geq f(1)$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, adică $x \geq \ln x + 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2.

a) $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx = \int_2^3 \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)}dx = \int_2^3 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_2^3 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$.

b) $f(x) = x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x$. Atunci

$F(x) = \int (x^3 - x)dx = \int x^3 dx - \int x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Cum $F(1) = -1$, avem că $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + c = -1 \Leftrightarrow c = -1 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow c = -\frac{3}{4}$. Prin urmare, $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}$.

c) $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx = \int_2^e \frac{x(x+1)(x-1)\ln x}{x^2-1}dx = \int_2^e x \ln x dx = \int_2^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1$

$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^e - \int_2^e \frac{x^2}{2x}dx = \frac{e^2}{2} - 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big|_2^e = \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $3(4 - \sqrt{3}) + 3\sqrt{3} = 12 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 12$.

2. Avem $f(-4) = (-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$ și $f(4) = 4^2 - 16 = 16 - 16 = 0$. Atunci $f(-4) + f(4) = 0$.

3. $(x-2)^2 - x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -4x = -12 \Leftrightarrow x = 3$.

4. Putem aplica regula de trei simplă. Dacă prețul s-a ieftinit cu 30%, atunci putem scrie:

70% ..... x lei

100% ..... 100 lei

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile fiind direct proporționale, putem scrie că $\frac{70}{100}=\frac{x}{100}$, iar de aici rezultă imediat că $x=70$. Așadar, prețul produsului după ieftinire a fost de 70 lei.

5. $AB=\sqrt{(2-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{0+9}=\sqrt{9}=3$.

6. Folosim formula fundamentală a trigonometriei și obținem $\sin^2 A+\cos^2 A=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2 A=1\Leftrightarrow\cos^2 A=\frac{3}{4}$. Cum unghiul A este ascuțit, rezultă $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-0\cdot(-2)=4$.

b) $A\cdot B=2I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2b & 2-2b\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Egalitatea celor două matrice are loc dacă și numai dacă $2b=2$ și $2-2b=0$. De aici se obține $b=1$.

c) Avem că $A+B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+b & -1\\ 0 & 2+b\end{pmatrix}$. Atunci:

$\det(A+B)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2+b & -1\\ 0 & 2+b\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(2+b)^2=0$. De aici se obține $b=-2$.

2.

a) $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1=1-3+2=0$.

b) $f=X^3-3X^2+2X=X^3-2X^2-X^2+2X=X^2(X-2)-X(X-2)=(X^2-X)(X-2)$. De aici deduce că restul împărțirii polinomului f la $X-2$ este $r=0$, iar câtul este $q=X^2-X$.

c) Din subpunctul anterior, $f=X(X-1)(X-2)$. Rădăcinile polinomului f vor fi $x_1=0$, $x_2=1$ și $x_3=2$. Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0^2+1^2+2^2=5$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Fie $x\in\mathbb{R}$. Avem $f'(x)=\left((x+2)^3\right)'=3(x+2)'(x+2)^2=3(x^2+4x+4)=3x^2+12x+12$.

b) Avem $f'(x)=3(x+2)^2\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+12x+12}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{12}{x}+\frac{12}{x^2}\right)=3$.

2.

Scanned with OKEN Scanner

a) Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deoarece este funcție polinomială. Avem

$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'+x'=x^2+1=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Așadar, funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Avem că $f(x)=x^2+1>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci aria din cerința problemei este:

$\mathcal{A}=\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$.

c) $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2\frac{x^2+1}{x}dx=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}+\ln 2$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE (REZERVĂ)
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $x=3(1-i)+3i=3-3i+3i=3\in\mathbb{R}$.
2. Rezolvăm ecuația $f(x)=0$, adică $x^2-3x+2=0$. Obținem soluțiile $x_1=1$ și $x_2=2$. Distanța din cerința problemei este $|x_2-x_1|=1$.
3. $2^{2x+3}=8\Leftrightarrow 2^{2x+3}=2^3\Leftrightarrow 2x+3=3\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$.
4. Numerele din mulțimea A divizibile cu 4 sunt $4, 8, 12, 16, 20$, în total 5 cazuri favorabile. Numărul de elemente ale mulțimii A este egal cu 20, adică avem 20 cazuri posibile. Prin urmare, probabilitatea este $P=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.
5. Fie M mijlocul segmentului AC. Atunci $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0$ și $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+5}{2}=4$. Am obținut $M(0,4)$. Lungimea medianei din B este $BM=\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.
6. Cum $B=\frac{\pi}{6}$ și $C=\frac{\pi}{3}$, rezultă că $A=\frac{\pi}{2}$. În triunghiul dreptunghic ABC, latura AC se opune unghiului de 30°, de unde rezultă că $AC=\frac{BC}{2}=\frac{4}{2}=2$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Pentru $x=2$ se obține $M(2)=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. Atunci $\det(M(2))=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=4-1=3$.

b) $M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix}x&1-x\\1-x&x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y&1-y\\1-y&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy-x-y+1&1-2xy+x+y-1\\1-2xy+x+y-1&2xy-x-y+1\end{pmatrix}$

Scanned with OKEN Scanner

$= M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x și y.

c) $M(a)\cdot M(x)=M(a) \Leftrightarrow M(2ax-a-x+1)=M(a) \Leftrightarrow 2ax-a-x+1=a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(2a-1)-(2a-1)=0 \Leftrightarrow (2a-1)(x-1)=0$, pentru orice număr real x. Rezultă că $2a-1=0$, de unde obținem că $a=\frac{1}{2}$.

2.

a) $0\circ(-2)=0\cdot(-2)+2\cdot 0+2\cdot(-2)+2=-4+2=-2$.

b) Fie x, $y\in\mathbb{R}$. Avem $x\circ y=xy+2x+2y+2=x(y+2)+2(y+2)-2=(x+2)(y+2)-2$.

c) Legea de compoziție fiind asociativă, putem scrie $x\circ x\circ x=6 \Leftrightarrow (x\circ x)\circ x=6$. Folosind subpunctul anterior, avem că $[(x+2)^2-2]\circ x=6 \Leftrightarrow (x+2)^3-2=6 \Leftrightarrow (x+2)^3=8$. Obținem astfel că $x+2=2$, adică $x=0$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Fie $x\in(1,+\infty)$. Avem $f'(x)=\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)-x^2+2x-2}{(x-1)^2}=$

$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

b) Rezolvăm ecuația $f'(x)=0$ în intervalul $(1,+\infty)$, adică $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0$, de unde se obține $x=2$. Avem $f'(x)<0$ pentru $x\in(1,2)$ și $f'(x)>0$ pentru $x\in(2,+\infty)$. Prin urmare, punctul de extrem al funcției f este $x=2$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x^2-x}=1$ și

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+2}{x-1}=-1$. Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=x-1$.

2.

a) $\int_1^2\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{3}{2}$.

b) Funcția F este derivabilă pe intervalul $(0,+\infty)$, fiindcă este egală cu un produs de funcții derivabile. Avem $F'(x)=\frac{2}{5}\left(x^2\sqrt{x}\right)'=\frac{2}{5}\left(2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}=x\sqrt{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Așadar, funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Avem că $f(x)=x\sqrt{x}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Atunci aria va fi

Scanned with OKEN Scanner

$$\mathcal{A}=\int_1^4 f(x)dx=F(4)-F(1)=\frac{64}{5}-\frac{2}{5}=\frac{62}{5}.$$

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $2\left(2+\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4$.
2. Avem $f(4)=4+4=8$ și $f(-4)=-4+4=0$. Atunci $f(4)+f(-4)=8+0=8$.
3. $7^{2x}=49\Leftrightarrow 7^{2x}=7^2\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$.
4. Scumpirea de 10 % înseamnă $10\,\%\cdot 1000=\frac{10}{100}\cdot 1000=100$ de lei. Prețul final al obiectului va fi $1000+100=1100$ lei.
5. $AB=\sqrt{(4-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$.
6. $\sin 45^\circ-\sin 135^\circ=\sin 45^\circ-\sin(180^\circ-135^\circ)=\sin 45^\circ-\sin 45^\circ=0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 2=-1-4=-5$.

b) Pentru $m=-2$ avem $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$. Atunci $A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$.

c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 7 & 16\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & m\\ m & m+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 7 & 16\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2m-1 & m+2\\ m+2 & 3m+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 7 & 16\end{pmatrix}$. Cele două matrice sunt egale dacă și numai dacă $m=5$.

2.

a) $f(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+(-1)=-1+2-1=0$.

b) Avem $f=X^3+2X^2+X=X^3+X^2+X^2+X=X(X^2+X)+X^2+X=(X+1)(X^2+X)$. De aici deducem că restul împărțirii polinomului f la polinomul g este $r=0$, iar câtul este $q=X^2+1$.

c) Conform subpunctului anterior, $f=X(X+1)^2$. Rădăcinile polinomului f vor fi $x_1=0$, $x_2=x_3=-1$. Așadar, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0^2+(-1)^2+(-1)^2=1+1=2$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

Scanned with OKEN Scanner

a) $f'(x)=\left(x+10-\frac{11}{x}\right)'=1+0+\frac{11}{x^2}=\frac{x^2+11}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Avem că $f'(x)=\frac{x^2+11}{x^2}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, de unde deducem că funcția f este crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Avem $f''(x)=\left(1+\frac{11}{x^2}\right)'=-\frac{22}{x^3}<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, de unde rezultă că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2.

a) $\int_1^2 f'(x)dx=f(x)\Big|_1^2=f(2)-f(1)=13-10=3$.

b) $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2\frac{x^2+9}{x}dx=\int_1^2\left(x+\frac{9}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+9\ln x\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}+9\ln 2$.

c) Avem $g(x)=f(x)-x^2=x^2+9-x^2=9$. Volumul este $\mathcal{V}=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=81\pi x\Big|_0^1=81\pi$.

SUBIECTELE DATE LA EXAMENUL DE BACALAUREAT ÎN ANUL 2014
SOLUȚII

SESIUNEA SPECIALĂ
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $z^2=(2+3i)^2=4+12i-9=-5+12i$.
2. Rezolvăm ecuația $f(x)=0$, adică $x^2-6x+9=0\Leftrightarrow(x-3)^2=0$. Obținem astfel $x=3$ și $y=0$.
3. Avem că $x^2+5>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că logaritmul din cadrul ecuației este bine definit. Atunci $\log_9(x^2+5)=1\Leftrightarrow x^2+5=9\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=2$.
4. Numerele de două cifre care sunt divizibile cu 13 sunt: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, adică avem 7 cazuri favorabile. Există 90 de numere cu două cifre, adică avem 90 cazuri posibile. Probabilitatea căutată este $P=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{7}{90}$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Punctele A și B sunt situate pe axa Ox, iar punctual C se află pe axa Oy. Atunci $CO \perp AB$. Așadar, aria triunghiului ABC este $\mathcal{A} = \frac{CO \cdot AB}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

6. $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Pentru $a = 1$ avem $A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci $\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 6 - 0 = 6$.

b) $\det(A(a)) = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{vmatrix} = 1 \Leftrightarrow 4a + 2 - 1 + a = 1 \Leftrightarrow 5a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

c) Pentru $a = 0$ avem $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1$. Cum $(A(0))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, avem $(A(0))^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, Așadar, $(A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.

a) $1 \circ 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 = 4 - 3 - 6 + 6 = 1$.

b) $x \circ y = 2\left(xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + 3\right) = 2\left[x\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{4}\right] = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

c) Conform subpunctului anterior, avem $x \circ x = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$. Atunci $x \circ x = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ sau $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Obținem astfel soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{e^{-x}}{x-2} = \frac{e^{-1}}{-1} = -\frac{1}{e}$.

b) Fie $x \in (-\infty, 2)$. Avem $f'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x-2}\right)' = \frac{-e^{-x}(x-2) - e^{-x}}{(x-2)^2} = \frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$.

c) Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ pe intervalul $(-\infty, 2)$, adică $\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. În plus, $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1)$ și $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (1, 2)$. Am arătat astfel că punctul $x = 1$ este

Scanned with OKEN Scanner

punct de maxim pentru funcția f. De aici deducem că $f(x) \le f(1)$ pentru orice $x \in (-\infty, 2)$, adică $f(x) \le -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (-\infty, 2)$.

2.

a) $\int_1^2 (x+1) f(x)dx = \int_1^2 (x+1)\frac{\ln x}{x+1}dx = \int_1^2 \ln x dx = \int_1^2 x' \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 1dx = 2\ln 2 - 1$.

b) $\int_1^e \big(f(x)+(x+1)f'(x)\big)dx = \int_1^e f(x)dx + (x+1)f(x)\Big|_1^e - \int_1^e f(x)dx = \ln x\Big|_1^e = 1$.

c) Avem $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)} = x+1$. Atunci volumul va fi

$$\mathcal{V} = \pi\int_2^3 (x+1)^2 dx = \pi\frac{(x+1)^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{\pi(4^3-3^3)}{3} = \frac{37\pi}{3}.$$

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right) = 3\cdot\frac{1}{3} = 1$.

2. $f(m) = 1 \Leftrightarrow m-4 = 1 \Leftrightarrow m = 5$.

3. Avem că $2x^2+1 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că radicalul din membrul stâng al ecuației are sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $\sqrt{2x^2+1} = 1 \Leftrightarrow 2x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$, de unde deducem că $x = 0$.

4. Notăm cu x venitul annual al firmei. Avem de rezolvat ecuația $\frac{4}{100}\cdot x = 100000$, de aici obținem că $x = \frac{100000\cdot 100}{4} = 2500000$ lei.

5. Cum $y_A = y_B = 6$, rezultă că $AB = |x_A - x_B| = |5-2| = 3$. Din $x_A = x_C = 5$ rezultă că $AC = |y_A - y_C| = |6-2| = 4$. Pe de altă parte, $BC = \sqrt{(5-2)^2+(2-6)^2} = 5$. Obținem că $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Prin urmare, triunghiul ABC este dreptunghic în A.

6. $tg^2 60^\circ + tg^2 45^\circ = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 3+1 = 4$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 1\cdot(-5) = -6+5 = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem $A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$, iar

$B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$. Aşadar, $2A\cdot B-B\cdot A=2I_2-I_2=I_2$.

c) Avem $A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -5 & -1\end{pmatrix}$. Atunci:

$A\cdot A-xA=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4 & 1\\ -5 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3x & x\\ -5x & -2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4-3x & 1-x\\ -5+5x & -1+2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Această egalitate de matrice are loc pentru $x=1$.

2.

a) $1\star 2=2(1+2-1)-1\cdot 2=4-2=2$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}$. Atunci $x\star 2=2(x+2-1)-2x=2x+2-2x=2$ şi $2\star x=2(2+x-1)-2x=2$. Aşadar, $x\star 2=2\star x=2$ pentru orice număr real x.

c) $x\star x=x\Leftrightarrow 2(x+x-1)-x^2=x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$. Această ecuaţie are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=2$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)e^x=-1\cdot e^0=-1$.

b) $f'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'=e^x+(x-1)e^x=f(x)+e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e^0+f(0)=1-1=0$.

2.

a) $\int_1^2 3x^2\,dx=x^3\Big|_1^2=8-1=7$.

b) $F(x)=\int(3x^2+2x)dx=x^3+x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$. Cum $F(1)=2014$, deducem că $c+2=2014$, adică $c=2012$. Atunci primitive din cerinţă este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+x^2+2012$.

c) $\int_1^n\dfrac{f(x)}{x}dx=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow\int_1^n(3x+2)dx=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3n^2+4n-7}{2}=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow 3n^2+4n-20=0$. Obţinem soluţiile $n_1=-\dfrac{10}{3}$ şi $n_2=2$. Cum $n_1=-\dfrac{10}{3}\notin\mathbb{N}$, rămâne doar soluţia $n=2$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE
Matematică *M_ştiinţele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Scanned with OKEN Scanner

1. Avem $z = 3+2(1-i) = 3+2-2i$=5-2i. Atunci Re(z)=5.
2. Scriem relaţiile lui Viète: $x_1 + x_2 = 3$ şi $x_1 x_2 = 10$. Atunci $x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 = 3+20 = 23$.
3. $\sqrt{x^2+x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2+x+1 = 1 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = -1$.
4. Cifra unităţilor poate fi aleasă în două moduri (1 sau 3). Cum cifrele trebuie să fie distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în două moduri, iar cifra sutelor poate fi aleasă într-un singur mod. Aşadar, se pot forma $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ numere.
5. Cele două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă, adică $a-1=2$. Obţinem $a=3$.
6. Observăm că $AB^2 + AC^2 = BC^2$. De aici rezultă că $A = \frac{\pi}{2}$. Atunci $R = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) Pentru $x=2$ obţinem $A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci $\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4-1 = 3$.

b) $A(x) \cdot A(-x) = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-x^2 & 0 \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cele două matrice sunt egale dacă şi numai dacă $1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

c) Avem $A(1) + A(2) + \cdots A(n) = \begin{pmatrix} 1+2+\cdots+n & 1+1+\cdots+1 \\ 1+1+\cdots+1 & 1+2+\cdots+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$. Atunci:

$$\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n)) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - n^2 = \frac{n^2(n+1-2)(n+1+2)}{4} = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4},$$

pentru orice număr natural nenul n.

2.

a) $2 \star 4 = 4(2+4-3) - 2 \cdot 4 = 12-8 = 4$.

b) $x \star y = 4(x+y-3) - xy = 4x+4y-12-xy = 4-16+4x+4y-xy =$
$= 4-4(4-x)+y(4-x) = 4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Conform subpunctului anterior, avem $x \star x = 4-(x-4)^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece legea de compoziţie data este asociativă, putem scrie $x \star x \star x = x \Leftrightarrow (x \star x) \star x = x$, adică
$[4-(x-4)^2] \star x = x \Leftrightarrow 4+(x-4)^3 = x \Leftrightarrow (x-4)(x-4+1)(x-4-1) = 0$
$\Leftrightarrow (x-4)(x-3)(x-5) = 0$. Prin urmare, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ şi $x_3 = 5$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $\lim\limits_{x \to e} f(x) = \lim\limits_{x \to e} (x \ln x - x + 1) = e \ln e - e + 1 = 1$.

b) Fie $x \in (0, +\infty)$. Atunci
$f'(x) = (x \ln x - x + 1)' = x' \ln x + x(\ln x)' - x' + 1' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezolvând ecuația $f'(x)=0$, obținem $x=1$. Cum $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(0,1)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$, rezultă că $f(x)\geq f(1)$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, adică $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2.

a) $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)dx=\int_0^{2014}(x+3)(x+5)\frac{1}{x^2+8x+15}dx=\int_0^{2014}(x+3)(x+5)\frac{1}{(x+3)(x+5)}dx$

$=\int_0^{2014}1dx=x\Big|_0^{2014}=2014$.

b) $\int_{-1}^{1}f'(x)\cdot f(x)dx=\frac{f^2(x)}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{f^2(1)-f^2(-1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{576}-\frac{1}{64}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{576}=-\frac{1}{144}$.

c) $\mathcal{A}=\int_0^a|f(x)|dx=\int_0^a\frac{(x+4)'}{(x+4)^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{x+3}{x+5}\Big|_0^a=\frac{1}{2}\ln\frac{5(a+3)}{3(a+5)}$. Pe de altă parte, $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.

Atunci $\frac{1}{2}\ln\frac{5(a+3)}{3(a+5)}=\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}\Leftrightarrow\frac{5(a+3)}{3(a+5)}=\frac{10}{9}\Leftrightarrow 2(a+5)=3(a+3)\Leftrightarrow a=1$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $5\left(2+\sqrt{3}\right)-5\sqrt{3}=10+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}=10$.

2. $f(1)=a\Leftrightarrow 1+3=a\Leftrightarrow a=4$.

3. Impunem condiția de existență a logaritmului din membrul stîng, și anume $2x+1>0$, ceea ce înseamnă $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Atunci $\log_2(2x+1)=\log_2 5\Leftrightarrow 2x+1=5\Leftrightarrow x=2$. Avem că $x=2\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

4. Există 9 numere de două cifre care sunt divizibile cu 10, adică avem 9 cazuri favorabile. Sunt 90 de numere de două cifre, ceea ce înseamnă că avem 90 de cazuri posibile.

Așadar, probabilitatea cerută este $P=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$.

5. Cum $y_A=y_B=5$, avem că $AB=|x_A-x_B|=|2-3|=1$.

6. $\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-1\cdot 8=8-8=0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $B+C=A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2+x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cele două matrice sunt egale dacă și numai dacă $2+x=8$, adică $x=6$.

c) Avem $B\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci

$B\cdot B+B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_2$.

2.

a) $0\circ(-4)=0\cdot(-4)+4\cdot 0+4\cdot(-4)+12=-16+12=-4$.

b) $x\circ y=xy+4x+4y+12=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x și y.

c) $x\circ x=12 \Leftrightarrow (x+4)^2-4=12 \Leftrightarrow (x+4)^2-16=0 \Leftrightarrow x(x+8)=0$. Obținem soluțiile $x_1=0$ și $x_2=-8$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Fie $x\in(0,+\infty)$. Atunci $f'(x)=\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)'=(\ln x)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{2+1}{2^2}=\frac{3}{4}$.

c) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0, situat pe graficul funcției f, este $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Avem $f(1)=\ln 1-1=-1$ și $f'(1)=\frac{2}{1}=2$. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f, va fi $y=2\cdot(x-1)-1 \Leftrightarrow y=2x-3$.

2.

a) $\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e-1$.

b) Funcția F este derivabilă, deoarece se poate scrie ca diferență de două funcții derivabile (funcția exponențială și funcția de gradul doi). Avem:

$F'(x)=\left(e^x-\frac{x^2}{2}-1\right)'=e^x-\frac{1}{2}\cdot 2x-0=e^x-x=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Așadar, funcția F este o primitivă a funcției f.

c) $\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\left(e^x-\frac{x^2}{2}-1\right)dx=\int_0^1 e^x dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx-\int_0^1 1dx=\left(e^x-\frac{x^3}{6}-x\right)\Big|_0^1=e-\frac{13}{6}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE (REZERVĂ)

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $z^2=(2+\mathrm{i})^2=4+4\mathrm{i}-1=3+4\mathrm{i}$.
2. Punctul $M(\mathrm{m},1)$ aparține graficului funcției f dacă și numai dacă $f(\mathrm{m})=1$, adică $m-3=1\Leftrightarrow m=4$.
3. Impunem condiția de existență a logaritmului $x-3>0\Leftrightarrow x\in(3,+\infty)$. Atunci: $\log_3(x-3)=2\Leftrightarrow x-3=3^2\Leftrightarrow x=12\in(3,+\infty)$.
4. Numărul submulțimilor cu un singur element ale mulțimii A este egal cu $C_4^1=4$. Numărul submulțimilor cu 3 elemente ale mulțimii A este egal cu $C_4^3=4$. Prin urmare, numărul submulțimilor cu număr impar de elemente ale mulțimii A este egal cu $4+4=8$.
5. $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$.
6. $\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AC}{BC}+\frac{AB}{BC}\cdot\frac{AB}{BC}=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=\begin{vmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0\cdot(-1)-1\cdot 2014=-2014$.

b) Avem $A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2014 & -2014\\ -1 & 2015\end{pmatrix}$. Atunci

$$A+A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2014 & -2014\\ -1 & 2015\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2014 & 0\\ 0 & 2014\end{pmatrix}=2014I_2.$$

c) Folosind subpunctul anterior, deducem că $A\cdot X=2014I_2\Leftrightarrow A\cdot X=A+A\cdot A$

$$X=I_2+A\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 2014\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2.

a) $f(0)=0^3-6\cdot 0^2+m\cdot 0-6=-6$.

b) Din relațiile lui Viète, avem $x_1+x_2+x_3=6$ și $x_1x_2x_3=6$. Atunci:

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{6}=1.$$

c) Fie $k\in\mathbb{Z}$. Presupunem că $x_1=k-1$, $x_2=k$ și $x_3=k+1$. Știm că $x_1+x_2+x_3=6$, adică $k-1+k+k+1=6\Leftrightarrow 3k=6\Leftrightarrow k=2$. Din relațiile lui Viète, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m$, adică $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1=m\Leftrightarrow m=11$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

Scanned with OKEN Scanner

a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x'(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

b) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0, situat pe graficul funcției f, este $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. Avem $f(1) = \frac{1}{2}$ și $f'(1) = 0$. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f, va fi $y = 0 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$.

c) Rezolvând ecuația $f'(x) = 0$, obținem $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Avem $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$ și $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (1, +\infty)$. Deducem de aici că punctele de extreme sunt $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$.

2.

a) $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx =$

$= \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2$.

b) Fie $F: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f (existența funcției F este asigurată de continuitatea funcției f). Atunci $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$. De aici deducem că $F''(x) = f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} < 0$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.

Prin urmare, F este concavă pe intervalul $(-1, +\infty)$.

c) $\mathcal{A} = \int_0^n |f(x)| dx = \int_0^n \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln[(x+1)(x+2)(x+3)] \Big|_0^n = \ln \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$

Cum $n \geq 1$, rezultă că $(n+1)(n+2)(n+3) \geq 24$, iar de aici rezultă că $\mathcal{A} \geq \ln 4$ pentru orice număr natural nenul n.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Avem $f(0)=0+4=4$. Deci punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy este $A(0,4)$.

3. $3^{3x-1}=9 \Leftrightarrow 3^{3x-1}=3^2 \Leftrightarrow 3x-1=2 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$.

4. Numerele de o cifră mai mici sau egale cu 3 sunt 0, 1, 2, 3, adică avem 4 cazuri favorabile. Există 10 numere natural cu o singură cifră, ceea ce înseamnă că avem 10 cazuri posibile. Probabilitatea cerută este $P=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

5. $AB=\sqrt{(4-1)^2+(1-1)^2}=3$ și $BC=\sqrt{(4-4)^2+(4-1)^2}=3$. Așadar, $AB=BC$.

6. Folosind teorema lui Pitagora, avem $AC=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$. Atunci aria triunghiului ABC este $\mathcal{A}=\dfrac{8\cdot 6}{2}=24$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 2=4-4=0$.

b) $A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=5A$.

c) $A+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ 2+y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Egalitatea celor două matrice are loc dacă și numai dacă $1+x=1$ și $2+y=0$, adică $x=0$, $y=-2$.

2.

a) $(-1)\circ 1=-1+1+(-1)\cdot 1=-1$.

b) $x\circ y=x+y+xy=x(y+1)+y+1-1=(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x și y.

c) $(x+1)\circ(x-3)=4 \Leftrightarrow x+1+x-3+(x+1)(x-3)=4 \Leftrightarrow x^2-5=4 \Leftrightarrow x^2=9$. Obținem $x=-3$ sau $x=3$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{3-1}{3-2}=2$.

b) Fie $x\in(2,+\infty)$. Avem

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)'=\frac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=-\frac{1}{(x-2)^2}.$$

c) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0, situat pe graficul funcției f, este $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Avem $f(3)=2$ și $f'(3)=-1$. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=3$, situat pe graficul funcției f, va fi $y=-1\cdot(x-3)+2 \Leftrightarrow y=-x+5$.

2.

Scanned with OKEN Scanner

a) $\int_{-1}^{1}(2x+1)dx = 2\int_{-1}^{1} x dx + \int_{-1}^{1} 1 dx = \left(x^2+x\right)\Big|_{-1}^{1} = 2-0=2$.

b) $g(x)=f(x)-2x-1=x^2+2x+1-2x-1=x^2$. Volumul corpului este $\mathcal{V}=\pi\int_0^1 g^2(x)dx =$

$\pi\int_0^1 x^4 dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$.

c) Funcția f este continuă. Atunci f admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Atunci $F'(x)=f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că funcția F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE
Matematică *M_științele naturii*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Numerele 2, $x+2$ și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice dacă și numai dacă $2(x+2)=2+10 \Leftrightarrow x+2=6 \Leftrightarrow x=4$.
2. Discriminantul este $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-10)=44$. Valoarea minimă a funcției f este egală cu $-\frac{44}{4\cdot 1}=-11$.
3. Impunem condiția de existență a logaritmului $x^2-2x>0$, adică $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$. Avem $\log_2(x^2-2x)=3 \Leftrightarrow x^2-2x=2^3 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2)=0$. Obținem soluțiile $x_1=-2$ și $x_2=4$, care verifică și condiția de existență.
4. Sunt 45 de numere pare de două cifre, adică avem 45 de cazuri favorabile. Există 90 de numere de două cifre, adică avem 90 de cazuri posibile. Atunci probabilitatea căutată este $P=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$.
5. Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt opuși, adică $\vec{u}=-\vec{v} \Leftrightarrow (a-2)\vec{i}-2\vec{j}=-3\vec{i}-2\vec{j} \Leftrightarrow a-2=-3 \Leftrightarrow a=-1$.
6. Din teorema cosinusului, $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{16+25-36}{40}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

Scanned with OKEN Scanner

a) $\det B=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0+0+0-1-0-0=-1$.

b) Avem $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, iar

$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Deci $AB=BA$.

c) Avem $B+xA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & x & 0\\ x & 0 & x\\ 0 & x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & x & 1\\ x & 1 & x\\ 1 & x & 0\end{pmatrix}$. Atunci

$\det(B+xA)=\begin{vmatrix}0 & x & 1\\ x & 1 & x\\ 1 & x & 0\end{vmatrix}=0+x^2+x^2-1-0-0=2x^2-1$.

Prin urmare, $\det(B+xA)=1\Leftrightarrow 2x^2-1=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$.

2.

a) $4\star 5=4\cdot 5-4(4+5-5)=20-16=4$.

b) $x\star y=xy-4(x+y-5)=xy-4x-4y+20=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

c) Avem $x\star 4=(x-4)(4-4)+4=4$ și $4\star x=(4-4)(x-4)+4=4$ pentru orice număr real x. Legea de compoziție fiind asociativă, putem scrie:

$1\star 2\star 3\star\ldots\star 2014=\left[(1\star 2\star 3)\star 4\right]\star(5\star 6\star\ldots\star 2014)=4\star(5\star 6\star\ldots\star 2014)=4$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2+3}=1$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}$. Avem

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)'=\frac{(x^2-3)'(x^2+3)-(x^2-3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{2x(x^2+3)-2x(x^2-3)}{(x^2+3)^2}=\frac{12x}{(x^2+3)^2}.$$

c) Fie $x\in\mathbb{R}$. Avem $f''(x)=\left(\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}\right)'=\dfrac{12(x^2+3)^2-12x\cdot 2\cdot 2x(x^2+3)}{(x^2+3)^4}=\dfrac{36(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$. Cum $f''(x)>0$ pentru orice $x\in(-1,1)$, rezultă că funcția f este convexă pe intervalul $(-1,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

2.

a) $\int_1^e f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^e = \frac{f^2(e)-f^2(1)}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$.

b) $\int_1^e x^3 f(x)dx = \int_1^e x^3 \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x dx = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^4}{16}\Big|_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}$.

c) $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)|dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e x' \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e = 1$.

Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$.
2. Avem de rezolvat ecuația $f(x) = g(x)$, adică $2x-3 = x+1 \Leftrightarrow x = 4$.
3. Avem că $x^2+5>0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $\sqrt{x^2+5} = 3 \Leftrightarrow x^2+5 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$. Obținem de aici că $x = -2$ sau $x = 2$, care verifică ecuația.
4. $10\% \cdot 120 = \frac{10}{100} \cdot 120 = 12$, adică scumpirea este de 12 lei. Prețul imprimantei după o scumpire cu 10 % este de $120+12 = 132$ lei.
5. Avem $AB = |5-2| = 3$, $BC = |2-6| = 4$ și $AC = \sqrt{(6-2)^2+(5-2)^2} = \sqrt{25} = 5$. Atunci perimetrul triunghiului ABC este $P = 3+4+5 = 12$.
6. Știm că $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 A = 1 \Leftrightarrow \cos^2 A = \frac{1}{4}$. Cum unghiul A este ascuțit, rezultă $\cos A = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 1\cdot 2 = -2$.

b) Avem $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b & 2+b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pe de altă parte,

$AB+C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b+2 \\ b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+1 & b+2 \\ b & b \end{pmatrix}$.

Atunci $A+B = AB+C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+b & 2+b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+1 & b+2 \\ b & b \end{pmatrix}$. Această egalitate are loc pentru $b = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Fie $b \in \mathbb{R}$. Atunci

$B+2C=\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b+2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B+2C)=\begin{vmatrix} b+2 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=b+2$. Pe de altă parte, det B-det A $=\begin{vmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=b+2$. Prin urmare, $\det(B+2C)=\det B-\det A$ pentru orice număr real b.

2.

a) $f(1)=1^3-4\cdot 1^2+1+2=1-4+1+2=0$.

b) Avem $f=X^3-4X^2+X+2=X^3-X^2-3X^2+3X-2X+2=$
$=X^2(X-1)-3X(X-1)-2(X-1)=(X-1)(X^2-3X-2)$. Câtul împărțirii polinomului f prin $X-1$ este $q=X^2-3X-2$, iar restul este $r=0$.

c) Scriem relațiile lui Viète: $x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$ și $x_1x_2x_3=-2$. Atunci

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=4\cdot\frac{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=4\cdot\frac{1}{-2}=-2.$$

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-\ln x)=1-\ln 1=1$.

b) Fie $x\in(0,+\infty)$. Avem $f'(x)=(x^2-\ln x)'=2x-\frac{1}{x}$.

c) Fie $x\in(0,+\infty)$. Avem $f''(x)=\left(2x-\frac{1}{x}\right)'=2+\frac{1}{x^2}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, ceea ce înseamnă că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2.

a) $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

b) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$. Atunci

$$\mathcal{A}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

c) Cum funcția f este continuă, rezultă că f admite primitive pe $(-1,+\infty)$. Fie F o primitivă a funcției f. Atunci $F'(x)=f(x)=\frac{x^2}{x+1}>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$. De aici deducem că funcția F este crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE (REZERVĂ)
Matematică *M_tehnologic*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\left(1+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}=3$.
2. Avem de rezolvat ecuația $f(x)=0$, adică $x-1=0\Leftrightarrow x=1$. Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x=1$ și $y=0$.
3. $3^{x+1}=3^2\Leftrightarrow x+1=2\Leftrightarrow x=1$.
4. Numerele naturale de o singură cifră, care sunt divizori ai lui 8, sunt $1, 2, 4, 8$, adică avem 4 cazuri favorabile. Există 10 numere naturale cu o singură cifră, adică avem 10 cazuri posibile. Probabilitatea cerută este $P=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.
5. Avem $AB=|1-3|=2$ și $BC=|3-1|=2$. Cum $AB=BC=2$, rezultă că triunghiul ABC este isoscel.
6. Dacă $m(\sphericalangle C)=30^\circ$, atunci $AB=\frac{BC}{2}=\frac{10}{2}=5$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.

a) $\det B=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 8 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-8\cdot 1=-5$.

b) Avem $\det A=\begin{vmatrix}a & 1\\ 8 & 3\end{vmatrix}=3a-8$. Atunci $\det A=0\Leftrightarrow 3a-8=0\Leftrightarrow 3a=8\Leftrightarrow a=\frac{8}{3}\notin\mathbb{Z}$. Prin urmare, $\det A\neq 0$ pentru orice număr întreg a.

c) Conform subpunctului anterior, dacă $a\in\mathbb{Z}$, atunci $\det A\neq 0$, ceea ce înseamnă că matricea A este inversabilă. Transpusa matricei A este $A^t=\begin{pmatrix}a & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, iar matricea adjunctă este $A^*=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & a\end{pmatrix}$. Atunci $A^{-1}=\frac{1}{3a-8}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & a\end{pmatrix}$. Pentru ca matricea A^{-1} să aibă toate elementele numere întregi, trebuie ca fracția $\frac{1}{3a-8}$ să fie număr întreg, adică $3a-8=-1$ sau $3a-8=1$. Dacă $3a-8=-1$, rezultă că $a=\frac{7}{3}$, care nu convine fiindcă $a\notin\mathbb{Z}$. Dacă $3a-8=1$, rezultă că $a=3$. În concluzie, inversa matricei A are toate elementele numere întregi în cazul în care $a=3$.

2.

a) $1\star 5=1\cdot 5-5\cdot 1-5\cdot 5+30=5-5-25+30=5$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $x \star y = xy - 5x - 5y + 30 = x(y-5) - 5(y-5) + 5 = (x-5)(y-5) + 5$ pentru orice numere reale x şi y.

c) $x \star x = x \Leftrightarrow (x-5)^2 + 5 = x \Leftrightarrow (x-5)^2 - (x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-6) = 0$. Obţinem de aici soluţiile $x_1 = 5$ şi $x_2 = 6$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.

a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem $f'(x) = (x^2 - x)' = (x^2)' - x' = 2x - 1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

c) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x_0, situat pe graficul funcţiei f, este $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Avem $f(1) = 1 - 1 = 0$ şi $f'(1) = 2 - 1 = 1$. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcţiei f, va fi $y = 1 \cdot (x-1) + 0 \Leftrightarrow y = x - 1$.

2.

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$.

b) Funcţia F este derivabilă, deoarece se poate scrie ca şi sumă de funcţii derivabile (funcţia de gradul doi şi funcţia logaritmică). Avem:

$F'(x) = \left(x^2 + \ln x + 2\right)' = (x^2)' + (\ln x)' + 2' = 2x + \dfrac{1}{x} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

Aşadar, funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

c) Avem că $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. Atunci aria este

$$A = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx = 2\int_1^2 x dx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \left(x^2 + \ln x\right)\Big|_1^2 = 3 + \ln 2.$$

Cum $2 < e$, rezultă că $\ln 2 < \ln e = 1$. Prin urmare, $A = 3 + \ln 2 < 3 + 1 = 4$.

Scanned with OKEN Scanner

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA SPECIALĂ
M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Raţia progresiei este $r = a_4 - a_3 = 8 - 6 = 2$.

2. Coeficienţii funcţiei de gradul al doilea sunt $a = 1$, $b = 0$ şi $c = -9$. Atunci discriminantul este $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$. Valoarea minimă a funcţiei f este $-\dfrac{\Delta}{4a} = -9$.

3. Avem că $x^2 + 3 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Impunem condiţia $x + 1 \geq 0$, adică $x \in [-1, +\infty)$. Ridicăm la pătrat ecuaţia dată şi obţinem $x^2 + 3 = (x + 1)^2$, adică $2x + 1 = 3$, de unde deducem că $x = 1$. Evident că $1 \in [-1, +\infty)$, ceea ce înseamnă că $x = 1$ este soluţia ecuaţiei date.

4. Numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este egal cu
$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21.$$

5. Ecuaţia dreptei AB este $\dfrac{y-1}{3-1} = \dfrac{x-2}{0-2}$, adică $y = -x + 3$.

6. Aplicând teorema sinusurilor, avem că $\dfrac{AB}{\sin C} = 2R$. Ţinând cont de datele problemei, deducem că $R = \dfrac{8}{2 \cdot \dfrac{1}{2}} = 8$.

SUBIECTUL II

1. (a) Avem că $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.

   (b) Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem că $B(x) + I_2 = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
   Atunci $\det(B(x) + I_2) = \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7(x + 1) - 6 = 7x + 1$. Ecuaţia $\det(B(x) + I_2) = 8$ devine $7x + 1 = 8$ şi obţinem soluţia $x = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

(c) Avem $A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+6 & 14 \\ 3x+12 & 30 \end{pmatrix}$, iar $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+6 & 2x+8 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}$. Atunci egalitatea de matrice $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$ devine

$$\begin{pmatrix} x+6 & 14 \\ 3x+12 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+6 & 2x+8 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}.$$

Această egalitate are loc dacă și numai dacă $2x+8 = 14$ și $3x+12 = 21$, adică pentru $x = 3$.

2. (a) Avem că $(-7)\star 7 = (-7)\cdot 7 - 7\cdot(-7) - 7\cdot 7 + 56 = -49+49-49+56 = 7$.

(b) Avem $x\star y = xy-7x-7y+49+7 = x(y-7)-7(y-7)+7 = (x-7)(y-7)+7$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) Conform punctului **b)**, avem că $x \star y = (x-7)(y-7)+7$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. De aici rezultă imediat că $x \star 7 = 7$ și $7 \star y = 7$, pentru orice x și y numere reale.

Vom arăta acum că legea de compoziție dată este asociativă. Pentru aceasta, fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z &= [(x-7)(y-7)+7] \star z = [(x-7)(y-7)+7-7](z-7)+7 \\ &= (x-7)(y-7)(z-7)+7, \text{ pentru orice } x, y, z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Analog, $x \star (y \star z) = (x-7)(y-7)(z-7)+7$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$. Obținem astfel că $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că operația „$\star$" este asociativă. De aceea, putem scrie: $1\star 2\star 3\star \ldots \star 2015 = [(1\star 2\star \ldots \star 6)\star 7]\star(8\star 9\star \ldots \star 2015) = 7\star(8\star 9\star \ldots \star 2015) = 7$.

SUBIECTUL III

1. (a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă deoarece este obținută prin operații cu funcții derivabile. Avem:

$$f'(x) = (e^x - \ln x + x)' = e^x - \frac{1}{x} + 1.$$

De aici se deduce că $f'(1) = e$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = e$.

(b) Avem că $f(1) = e - \ln 1 + 1 = e+1$ și $f'(1) = e$. Atunci ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$ este:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y - e - 1 = e(x-1) \iff y = ex + 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

(c) Funcția f este de două ori derivabilă și $f''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x} + 1\right)' = e^x + \frac{1}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. Avem că $e^x > 0$ și $\frac{1}{x^2} > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. De aici va rezulta că $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, ceea ce înseamnă că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

2. (a) Avem $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \int_0^1 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

(b) $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx =$

$= \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = -\frac{1}{2} + \ln 2.$

(c) Avem că $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Volumul corpului de rotație este:

$$V = \pi \int_0^1 g^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx == -\frac{\pi}{x+1}\Big|_0^1 = \pi\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\pi}{2}.$$

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IUNIE-IULIE
M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I

1. $z^2 - 2i = (1+i)^2 - 2i = 1 + 2i + i^2 - 2i = 1 - 1 = 0.$

2. Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem că $(g \circ f)(x) = x - 3 + 2015 = x + 2012$. Atunci $(g \circ f)(3) = 3 + 2012 = 2015$.

3. Folosind injectivitatea funcției exponențiale, deducem că $x^2 - 5x = 3 - 3x$, adică $x^2 - 2x - 3 = 0$. Rezolvând această ecuație, obținem soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = 3$.

4. Numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ este egal cu:

$$C_5^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Cum dreapta d este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x + 7$, va rezulta că panta dreptei d va fi $m_d = 2$. Scriem ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0, 4)$ și are panta egală cu 2:

$$d : y - 4 = 2(x - 0) \iff d : y - 4 = 2x \iff y = 2x + 4.$$

6. Avem că $A_{\triangle MNP} = \dfrac{MN \cdot MP \cdot \sin(\sphericalangle M)}{2} = \dfrac{12 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9.$

SUBIECTUL II

1. (a) Avem că $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$

   (b) Avem $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$. Atunci ecuația $\det(A(a)) = 0$ devine $1 - a^2 = 0$. Această ecuație are soluțiile $a_1 = -1$ și $a_2 = 1$.

   (c) $A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & -b-a \\ -a-b & ab+1 \end{pmatrix}$ și

   $A(a+b) + abI_2 = \begin{pmatrix} 1 & -a-b \\ -a-b & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & -b-a \\ -a-b & ab+1 \end{pmatrix},$

   pentru orice numere reale a și b. Prin urmare, $A(a)A(b) = A(a+b) + abI_2$, pentru orice numere reale a și b

2. (a) Avem $f(0) = 0^3 - m \cdot 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2.$

   (b) Efectuăm împărțirea polinomului f la polinomul g:

$$\begin{array}{rrrr|l} X^3 & & -mX & +2 & X^2 + X - 2 \\ \cline{5-5} -X^3 & -X^2 & +2X & & X - 1 \\ \cline{1-3} & -X^2 & +(2-m)X & +2 & \\ & X^2 & +X & -2 & \\ \cline{2-3} & & (3-m)X & & \end{array}$$

   Restul împărțirii polinomului f la polinomul g este $(3-m)X$. Acest rest este egal cu 0 dacă și numai dacă $m = 3$.

   (c) Din relațiile lui Viète, avem că $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Cum x_i $(i = \overline{1, 3})$ sunt rădăcinile polinomului f, deducem că $x_i^3 - mx_i + 2 = 0$, pentru $i = \overline{1, 3}$. Adunând aceste relații, obținem că:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - m(x_1 + x_2 + x_3) + 6 = 0,$$

   de unde va rezulta că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = m \cdot 0 - 6 = -6.$

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. (a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă deoarece este obținută prin operații cu funcții derivabile. Avem:

$$f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1.$$

De aici se deduce că $f'(0) = 0$. Prin urmare, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$.

(b) Pentru $x \in (-\infty, 0]$ are loc $e^x \leq 1$, adică $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \leq 0$, ceea ce înseamnă că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

(c) Tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Din acest tabel deducem că punctul $x_0 = 0$ este punct de minim pentru funcția f. Prin urmare, $f(x) \geq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică $e^x \geq x+1$, pentru orice număr real x.

2. (a) Avem $\displaystyle\int_0^1 (f(x) + 2x - 5)\,dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 5 + 2x - 5)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x)\Big|_0^1 = \ln f(1) - \ln f(0) = \ln 5 - \ln 5 = 0.$

(c) Avem că $f(x) = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4 \geq 4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $\dfrac{1}{f(x)} \leq \dfrac{1}{4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Integrând, obținem:

$$\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \int_{2014}^{2015} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IUNIE-IULIE
SUBIECT DE REZERVĂ
M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Avem $(2-3i)(2+3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4+9 = 13$.

2. Avem că $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Atunci $f(f(3)) = f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$.

3. Are loc $x^2 + 17 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Folosind injectivitatea funcţiei logaritmice, din $\log_3(x^2+17) = \log_3 81$ obţinem că $x^2 + 17 = 81$, adică $x^2 = 64$. Soluţiile ecuaţiei vor fi $x_1 = -8$ şi $x_2 = 8$.

4. Există 90 de numere naturale de două cifre, ceea ce înseamnă că avem 90 de cazuri posibile. Numerele de două cifre divizibile cu 5 sunt: 10, 15, 20, ..., 95. Prin urmare, avem 18 cazuri favorabile.

   Probabilitatea va fi $P = \dfrac{\text{nr. de cazuri favorabile}}{\text{nr. de cazuri posibile}} = \dfrac{18}{90} = \dfrac{1}{5}$.

5. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \dfrac{2-a}{2}$, iar panta dreptei BC este $m_{BC} = \dfrac{1-2}{2-3} = 1$. Punctele A, B şi C sunt coliniare dacă şi numai dacă $m_{AB} = m_{BC}$, adică $\dfrac{2-a}{2} = 1$. Obţinem astfel că $a = 0$.

6. $E\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II

1. (a) $A(1) + A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot A(0)$.

   (b) Avem $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ 2a & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4a^2$. Ecuaţia $\det(A(a)) = 0$ devine $4 - 4a^2 = 0$, adică $a^2 = 1$. Soluţiile ecuaţiei sunt $a_1 = -1$ şi $a_2 = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

(c) Considerăm că $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Ecuația $A(2) \cdot X = A(8)$ devine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}.$$

Avem de rezolvat sistemul de ecuații $\begin{cases} a + 4c = 1 \\ b + 4d = 16 \\ 4a + 4c = 16 \\ 4b + 4d = 4 \end{cases}$, care ne conduce la rezolvarea a două sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} a + 4c = 1 \\ 4a + 4c = 16 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} b + 4d = 16 \\ 4b + 4d = 4 \end{cases}.$$

Rezolvând aceste sisteme de ecuații (de exemplu, prin metoda eliminării), obținem $a = 5$, $b = -4$, $c = -1$ și $d = 5$. Prin urmare, ecuația matriceală din enunț are soluția

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. (a) $(-3) \circ 3 = 2 \cdot (-3) \cdot 3 - 6 \cdot (-3) - 6 \cdot 3 + 21 = -18 + 18 - 18 + 21 = 3$.

(b) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Avem:

$$x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 18 + 3 = 2x(y-3) - 6(y-3) + 3 = 2(x-3)(y-3) + 3.$$

(c) Din subpunctul **b)** deducem că $x \circ 3 = 3 \circ y = 3$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$. Tot cu ajutorul subpunctului anterior se poate demonstra ușor că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă. Atunci putem scrie că:

$$1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2015} = \left[\left(1 \circ \sqrt{2} \circ \ldots \circ \sqrt{8}\right) \circ \sqrt{9}\right] \circ \left(\sqrt{10} \circ \sqrt{11} \circ \ldots \circ \sqrt{2015}\right)$$
$$= 3 \circ \left(\sqrt{10} \circ \sqrt{11} \circ \ldots \circ \sqrt{2015}\right) = 3.$$

SUBIECTUL III

1. (a) Funcția f este derivabilă și $f'(x) = \left(3e^x + x^2\right)' = 3e^x + 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 3e^0 + 2 \cdot 0 = 3$.

(b) Avem că $f(0) = 3$ și $f'(0) = 3$. Atunci ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$ va fi:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - 3 = 3x \iff y = 3x + 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

(c) Funcția f este de două ori derivabilă și $f''(x) = 3e^x + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Cum $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. (a) Avem $\displaystyle\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{9-1}{2} = 4.$

(b) Ca mai sus, $\displaystyle\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) e^x\,dx = \int_1^2 xe^x\,dx$. Folosind metoda integrării prin părți, avem că

$$\int_1^2 xe^x\,dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

(c) Avem că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$. Atunci aria suprafeței din enunțul problemei este:

$$A = \int_1^a f(x)\,dx = \int_1^a \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Big|_1^a = \frac{a^2-1}{2} + \ln a.$$

Știm că $\dfrac{a^2-1}{2} + \ln a = 4 + \ln a$, adică $a^2 = 9$. Cum $a > 1$, va rezulta că $a = 3$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA AUGUST
M_șt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Al doilea termen al progresiei este $a_2 = a_1 + r = 1 + 2 = 3$.

2. Punctul $A(m, 0)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ dacă și numai dacă $f(m) = 0$, adică $m + 1 = 0$. Obținem că $m = -1$.

3. Avem că $x^2 + 4 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Din injectivitatea funcției logaritmice vom obține că $x^2 + 4 = 8$, adică $x^2 = 4$. Prin urmare, soluțiile căutate sunt $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Mulțimea M are 8 elemente, ceea ce înseamnă că avem 8 cazuri posibile. Doar două numere din mulțimea M sunt divizibile cu 3, ceea ce conduce la 2 cazuri favorabile. Prin urmare, probabilitatea este $P = \frac{\text{nr. de cazuri favorabile}}{\text{nr. de cazuri posibile}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

5. Vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\frac{a+1}{2} = \frac{4}{2}$, adică $a = 1$.

6. Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, adică $\frac{1}{4} + \cos^2 x = 1$, iar de aici $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Folosind formula $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, deducem că $\sin 2x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II

1. (a) Avem că $A(2014) = \begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2015) = \begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}$ și $A(2016) = \begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci:

$$A(2014) + A(2016) = \begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot A(2015).$$

(b) $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 3a + 3 = 3 - a$. Atunci ecuația dată în enunț devine $3 - a = 0$, de unde se obține soluția $a = 3$.

(c) Avem că $A(2) + xA(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{pmatrix}$. Atunci $\det(A(2) + xA(3)) = \begin{vmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{vmatrix} = x + 1$. Ecuația $\det(A(2) + xA(3)) = 0$ devine $x + 1 = 0$, de unde se obține soluția $x = -1$.

2. (a) Avem $(-1) \star 1 = -(-1) \cdot 1 - (-1) - 1 - 2 = 1 + 1 - 1 - 2 = -1$.

(b) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Avem $x \star y = -xy - x - y - 1 - 1 = -x(y+1) - (y+1) - 1 = -(x+1)(y+1) - 1$.

(c) Conform subpunctului anterior, $(x+2) \star (2x-3) = -(x+3)(2x-2) - 1$. Atunci ecuația dată în enunț devine $x^2 + 2x = 0$, adică $x(x+2) = 0$. Se obțin soluțiile $x_1 = -2$ și $x_2 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. (a) Funcția f este derivabilă (fiind funcție polinomială) și $f'(x) = (x^4 - 8x^2 + 16)' =$
$= 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) - x^4}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-8x^2+16}{x^2+1} = -8$.

(c) Tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox dacă și numai dacă $f'(x) = 0$, adică $4x(x-2)(x+2) = 0$. Această ecuație are soluțiile $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ și $x_3 = 2$. Coordonatele punctelor care au proprietatea din enunț sunt $(-2, 0)$, $(0, 16)$ și $(2, 0)$.

2. (a) $\displaystyle\int_1^2 xf(x)\,dx = \int_1^2 x\frac{x+2}{x}\,dx = \int_1^2 (x+2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2 = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

(b) Funcția F este derivabilă și $F'(x) = (x + 2\ln x + 2015)' = 1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x+2}{x} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. Așadar, funcția F este o primitivă pentru funcția f.

(c) Avem că $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{2}{x}\ln x$. Evident, $g(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$. Atunci aria cerută este:

$$A = \int_1^e g(x)\,dx = 2\int_1^e (\ln x)'\ln x\,dx = \ln^2 x\Big|_1^e = \ln^2 e - \ln^2 1 = 1.$$

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA AUGUST
SUBIECT DE REZERVĂ
M_șt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Avem că $z_1 \cdot z_2 = (3+i)(3-i) = 3^2 - (i)^2 = 9 + 1 = 10 \in \mathbb{R}$.

2. Punctul $A(1, 1)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$ dacă și numai dacă $f(1) = 1$, adică $1 + a = 1$. Deducem că $a = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Ridicând la cub ambii membri ai ecuației $\sqrt[3]{x^3+2x-4}=x$, obținem că $x^3+2x-4=x^3$, adică $2x-4=0$. Soluția va fi $x=2$.

4. Mulțimea A are 80 de elemente, ceea ce înseamnă că sunt 80 de cazuri posibile. În mulțimea A se găsesc 11 numere divizibile cu 7, ceea ce conduce la 11 cazuri favorabile.

   Probabilitatea va fi $P=\dfrac{\text{nr. de cazuri favorabile}}{\text{nr. de cazuri posibile}}=\dfrac{11}{80}$.

5. Panta dreptei OA este $m_{OA}=\dfrac{2-0}{1-0}=2$ și panta dreptei OB este $m_{OB}=\dfrac{a-0}{2-0}=\dfrac{a}{2}$. Punctele O, A și B sunt coliniare dacă și numai dacă $m_{OA}=m_{OB}$, adică $2=\dfrac{a}{2}$. Obținem $a=4$.

6. Avem $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II

1. (a) Avem că $A(0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$. Atunci $\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=2\cdot2-0\cdot0=4$.

   (b) $A(1)+A(3)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$ și $aA(2)=\begin{pmatrix}2a&2a\\2a&2a\end{pmatrix}$.
   Atunci ecuația $A(1)+A(3)=aA(2)$ ne conduce la $2a=4$, adică $a=2$.

   (c) Fie $x, y\in\mathbb{R}$. Avem $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2&x\\x&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&y\\y&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+xy&2x+2y\\2x+2y&4+xy\end{pmatrix}$
   și $2A(x+y)+xyI_2=2\begin{pmatrix}2&x+y\\x+y&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}xy&0\\0&xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+xy&2x+2y\\2x+2y&4+xy\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\star y=3xy+6x+6y+10$.

   (a) $2\star(-2)=3\cdot2\cdot(-2)+6\cdot3+6\cdot(-2)+10=-12+12-12+10=-2$.

   (b) Fie $x, y\in\mathbb{R}$. Avem:

   $$x\star y=3xy+6x+6y+12-2=3(x+2)(y+2)-2.$$

   (c) Folosind subpunctul anterior, putem să arătăm că legea de compoziție este asociativă. Avem că $x\star x=3(x+2)^2-2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $(x\star x)\star x=3^2(x+2)^3-2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Ecuația $x\star x\star x=x$ devine $9(x+2)^3-(x+2)=0$, adică $(x+2)[9(x+2)^2-1]=0$, ceea ce este echivalent cu $(x+2)(3x+7)(3x+5)=0$. Obținem soluțiile $x_1=-\dfrac{7}{3}$, $x_2=-2$ și $x_3=-\dfrac{5}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^x$.

   (a) Funcția f este derivabilă și $f'(x)=\left((x+1)e^x\right)'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

   (b) Avem $f(0)=1$ și $f'(0)=2$. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$ este:

   $$y-f(0)=f'(0)(x-0)\iff y-1=2x\iff y=2x+1.$$

   (c) Funcția f este de două ori derivabilă și $f''(x)=(x+3)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Exident că $x+3\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$. De aici se deduce imediat că $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$. Prin urmare, funcția f este convexă pe intervalul $[-3,+\infty)$.

2. (a) Avem $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+1)f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x^2+1)\frac{x^3+3x}{x^2+1}\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3+3x)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}=$
   $=0$.

   (b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^3+3x}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\ln 2.$

   (c) Aria suprafeței din enunț este:

   $$A=\int_0^m\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\ln(x^2+1)\Big|_0^m=\ln(m^2+1).$$

   Trebuie să aibă loc egalitatea $\ln(m^2+1)=\ln 2$, adică $m^2=1$. Cum $m>0$, va rezulta că $m=1$.

Soluții

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA SPECIALĂ
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. $\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{10}=\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}=5.$

2. $f(-2)=(-2)^2-4=4-4=0$ şi $f(2)=2^2-4=4-4=0$. Atunci $f(-2)+f(2)=0$.

3. Impunem condiţia de existenţă $2x-1\geq 0$, adică $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Ridicând la pătrat ambii membri ai ecuaţiei $\sqrt{2x-1}=3$, obţinem $2x-1=9$. Soluţia acestei ecuaţii este $x=5$, care verifică ecuaţia.

4. Mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ are 10 elemente, ceea ce înseamnă că sunt 10 cazuri posibile. În mulţimea A găsim 2 multipli de 5, ceea ce conduce la 2 cazuri favorabile. Atunci probabilitatea cerută este:

$$P=\frac{\text{nr. de cazuri favorabile}}{\text{nr. de cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

5. Avem că $OM=|y_M-y_O|=4$ şi $ON=|x_N-x_O|=4$. Prin urmare, $OM=ON$. De aici se deduce că triunghiul MON este isoscel.

6. $A_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{10\cdot 12}{2}=60.$

SUBIECTUL II

1. (a) $\det(A)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=-9+10=1.$

(b) $A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2.$

(c) Avem că $A-aI_2=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}-a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{pmatrix}$. Atunci:

$$\det(A-aI_2)=\begin{vmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{vmatrix}=-9+a^2+10=a^2+1\geq 1,$$

pentru orice număr real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+X+5$.

(a) Avem $f(-5)=(-5)^3+5\cdot(-5)^2+(-5)+5=-125+125-5+5=0.$

Scanned with OKEN Scanner

(b) Efectuăm împărțirea polinomului f la polinomul g:

$$\begin{array}{rrrr|l} X^3 & +5X^2 & +X & +5 & X^2+6X+5 \\ \cline{5-5} -X^3 & -6X^2 & -5X & & X-1 \\ \cline{1-3} & -X^2 & -4X & +5 & \\ & X^2 & +6X & +5 & \\ \cline{2-4} & & 2X & +10 & \end{array}$$

Câtul este $q = X - 1$, iar restul este $r = 2X + 10$.

(c) Folosind relațiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = -5$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$ și $x_1x_2x_3 = -5$, deducem că:

$$\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{23}{5} = \frac{(x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{x_1x_2x_3} = \frac{(-5)^2 - 2\cdot 1}{-5} =$$

SUBIECTUL III

1. (a) Funcția f este derivabilă și $f'(x) = (x^4 - 2x^2 + 1)' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Avem $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ și $f'(1) = 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$ este:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y = 0.$$

(c) Tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Din tabel rezultă că $0 \le f(x) \le 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

2. (a) $\displaystyle\int_1^3 (f(x) - \sqrt{x})\,dx = \int_1^3 (x^2 + \sqrt{x} - \sqrt{x})\,dx = \int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$.

(b) Funcția F este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2015\right)' = \frac{3x^2}{3} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right) = x^2 + \sqrt{x} = f(x),$$

pentru orice

Prin urmare, F este o primitivă a funcției f pe intervalul $(0, +\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

(c) Avem că $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(x^2 + \sqrt{x} - \sqrt{x}\right) e^x = x^2 e^x$. Vom folosi metoda integrării prin părți.

$$A = \int_1^2 x^2 e^x \, dx = x^2 e^x \Big|_1^2 - 2\int_1^2 x e^x$$
$$= 4e^2 - e - 2xe^x \Big|_1^2 + 2e^x \Big|_1^2$$
$$= 4e^2 - e - 4e^2 + 2e + 2e^2 - 2e = 2e^2 - e = e(2e - 1).$$

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IULIE
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{20}{7} = \frac{7}{10} \cdot \frac{20}{7} = 2.$

2. Punctul $A(a, 0)$ aparține graficului funcției unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ dacă și numai dacă $f(a) = 0$, adică $a - 2 = 0$. Obținem $a = 2$.

3. Impunem condiția $x + 3 \geq 0$, adică $x \in [-3, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat, ecuația $\sqrt{x+3} = 4$ devine $x + 3 = 16$. Atunci $x = 13$, care verifică ecuația.

4. Mulțimea M are 9 elemente, ceea ce înseamnă că sunt 9 cazuri posibile. Cum în mulțimea M sunt 3 multipli de 15, deducem că avem 3 cazuri favorabile. Atunci:
$$P = \frac{\text{nr. de cazuri favorabile}}{\text{nr. de cazuri posibile}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

5. Fie $M(x_M, y_M)$ mijlocul segmentului AB. Atunci $x_M = \frac{4+4}{2} = 4$ și $y_M = \frac{2+6}{2} = 4$. Prin urmare, $M(4, 4)$.

6. Din formula fundamentală a trigonometriei, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, deducem că:
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}.$$
Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, va rezulta $\sin x = \frac{12}{13}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL II

1. (a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

(b) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 5C.$

(c) Avem $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$, iar $BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. Atunci:

$$AB+BA+4I_2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 25 \\ 25 & 25 \end{pmatrix} = 25C.$$

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

(a) $5 \circ (-4) = 5 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) + 12 = -20 + 20 - 16 + 12 = -4.$

(b) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Avem:

$$x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 = x(y+4) + 4(y+4) - 4 = (x+4)(y+4) - 4.$$

(c) Avem $x \circ x = (x+4)^2 - 4$. Ecuația $x \circ x = x$ devine $(x+4)^2 - 4 = x$, adică $(x+4)(x+3) = 0$. Obținem $x_1 = -4$ și $x_2 = -3$.

SUBIECTUL III

1. (a) Funcția f este derivabilă și $f'(x) = (2x^3 + 3x^2 + 5)' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{f(x) - 2x^3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + 6x}{3x^2 + 5} = \dfrac{6}{3} = 2.$

(c) Ecuația $f'(x) = 0$ este echivalentă cu $x(x+1) = 0$. Obținem soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = 0$. Tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Din tabelul de variație deducem că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-1, 0]$ și crescătoare pe intervalel $(-\infty, -1]$ și $[0, +\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. (a) $\int_1^2 \left(f(x)-3x^2\right)\,dx = \int_1^2 \left(4x^3+3x^2-3x^2\right)\,dx = \int_1^2 4x^3\,dx = x^4\Big|_1^2 = 16-1=15.$

(b) Avem că $F(x) = \int (4x^3+3x^2)\,dx = x^4+x^3+c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Din condiția $F(1)=2015$ devine $2+c=2015$, de unde $c=2013$. Prin urmare, primitiva căutată este $F(x)=x^4+x^3+2013$.

(c) Avem $\int_1^n \frac{f(x)}{x^2}\,dx = \int_1^n \frac{4x^3+3x^2}{x^2}\,dx = \int_1^n (4x+3)\,dx = 2n^2+3n-5$. Ecuația pe care trebuie să o rezolvăm este $2n^2+3n-14=0$. Cum $n>1$ trebuie să fie un număr natural, deducem că $n=2$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA IULIE
SUBIECT DE REZERVĂ
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. Prin raționalizare, obținem că $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$. Atunci $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3} = \sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$.

2. Calculăm $f(0) = 2\cdot 0^2+0+2015 = 2015$. Se obține punctul $A(0, 2015)$.

3. Impunem condiția de existență $x+2 \geq 0$, adică $x \in [-2, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat, ecuația $\sqrt{x+2}=2$ devine $x+2=4$. Obținem soluția $x=2$, care verifică ecuația.

4. Să aplicăm regula de trei simplă. Notăm cu x prețul inițial al produsului. Avem:

$$\begin{aligned} 100\%-10\%=90\% &\ldots\ldots 99 \text{ lei} \\ 100\% &\ldots\ldots x \text{ lei} \end{aligned}$$

Atunci $x = \frac{99\cdot 100}{90} = 110$. Prețul inițial al produsului a fost de 110 lei.

Scanned with OKEN Scanner

5. Lungimea segmentului MN este $MN = \sqrt{(4-2)^2 + (1-1)^2} = 2$.

6. Vom porni de la formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Atunci

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, va rezulta că $\sin x = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL II

1. (a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$.

(b) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$. Atunci $x = 3$.

(c) Avem $A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci:

$$\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

2. (a) $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 - 2 + 1 = -2$.

(b) Calculăm $f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = -1 - 2 + 2 + 1 = 0$. Atunci polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$.

(c) Scriem relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2$ și $x_1x_2x_3 = -1$. Atunci relația

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \iff \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} =$$

$a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$, adică $\frac{2}{-1} = a \cdot (-2) \iff a = 1$.

SUBIECTUL III

1. (a) Funcţia f este derivabilă și $f'(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

(b) Ecuația asimptotei oblice este forma $y = mx+n$, unde $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \dfrac{1}{x} - x\right) = -\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Așadar, dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(c) Funcția f este de două ori derivabilă și $f''(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)' = -\dfrac{2}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$. Avem că $f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, ceea ce înseamnă că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

2. (a) $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - 2)\,dx = \int_0^1 (x^2 + 2 - 2)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

(b) Avem $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int (x^2 + 2)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Condiția $F(3) = 5$ se rescrie $15 + c = 5$, de unde obținem că $c = -10$. Prin urmare, primitiva cerută este $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x - 10$.

(c) Avem $g(x) = e^x f(x) = (x^2 + 2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Folosind metoda integrării prin părți, aria suprafeței va fi:

$$A = \int_0^1 (x^2 + 2)e^x\,dx = (x^2 + 2)e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx$$
$$= 3e - 2 - \left(2xe^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x\,dx\right)$$
$$= 3e - 2 - 2e + 2e - 2 = 3e - 4.$$

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA AUGUST
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

1. $\dfrac{1}{2} : 0,5 - 1 = 0,5 : 0,5 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Avem $f(-1)+f(0)+f(1) = (-1)^2+(-1)+0^2+0+1^2+1 = 1-1+1+1 = 2$.

3. Impunem condiția de existență $3x+1 \geq 0$, adică $x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Prin ridicare la pătrat, ecuația $\sqrt{3x+1} = 5$ devine $3x+1 = 25$. Obținem $x = 8$, care verifică ecuația.

4. Avem de calculat $150 + \frac{30}{100} \cdot 150 = 150 + 45 = 195$. Prețul după scumpire este de 195 lei.

5. Distanța de la punctul A la punctul B este $AB = \sqrt{(3-1)^2+(5-5)^2} = 2$.

6. Cum $m(\sphericalangle B) = 45°$, va rezulta că triunghiul ABC este isoscel. Prin urmare, $AB = 5$.

SUBIECTUL II

1. (a) $\det(M) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1) - 2\cdot(-1) = 2+2 = 4$.

   (b) Avem că $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și $3M = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. Prin urmare,

$$M \cdot M + 3M + 4I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) $M \cdot M \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, iar $aM + bI_2 = \begin{pmatrix} -2a+b & 2a \\ -a & -a+b \end{pmatrix}$. Relația $M\cdot M\cdot M = aM+bI_2$ devine $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+b & 2a \\ -a & -a+b \end{pmatrix}$. Din $2a = 10$ se obține $a = 5$. Relația $-a+b = 7$ devine $-5+b = 7$, iar de aici deducem că $b = 12$.

2. (a) $f(1) = 1^3 - 5\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - 1 = 1 - 5 + 5 - 1 = 0$.

   (b) Fie $a \in \mathbb{R}$. Atunci $f(a) + f(-a) + 2 = a^3 - 5a^2 + 5a - 1 - a^3 - 5a^2 - 5a - 1 + 2 = -10a^2 \leq 0$, pentru orice număr real a.

   (c) Scriem mai întâi relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 5$ și $x_1x_2x_3 = 1$. Atunci

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) = 5^2 - 2\cdot 5 = 15 = 15x_1x_2x_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL III

1. (a) Funcția f este derivabilă și $f'(x) = (2x^3 - 6x + 1)' = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Avem $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 1 = -3$ și $f'(1) = 0$. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$ este:

   $$y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y + 3 = 0 \iff y = -3.$$

   (c) Cum $f'(x) = 6(x-1)(x+1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, va rezulta că $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$. Prin urmare, funcția f este crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$. De aceea putem scrie că $f(2012) \leq f(2013)$ și $f(2014) \leq f(2015)$. Adunând cele două inegalități, deducem că $f(2012) + f(2014) \leq f(2013) + f(2015)$.

2. (a) $\displaystyle\int_0^1 (f(x) + 4)\,dx = \int_0^1 (x^2 - 4 + 4)\,dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

   (b) Avem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)+5} = \dfrac{1}{x^2+1}$. Atunci aria suprafeței va fi:

   $$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

   (c) Avem $\displaystyle\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}\,dx = \int_1^a \frac{x^2-4+4}{x}\,dx = \int_1^a x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^a = \frac{a^2-1}{2}$. Atunci $\displaystyle\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}\,dx = 12$ devine $a^2 - 1 = 24$, adică $a^2 = 25$. Cum $a > 1$, deducem că $a = 5$.

BACALAUREAT 2015
SESIUNEA AUGUST
SUBIECT DE REZERVĂ
M_tehn

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I

Scanned with OKEN Scanner

1. Avem $m_g = \sqrt{16 \cdot 9} = 4 \cdot 3 = 12$.

2. Avem că $f(2) = 2 + m$. Atunci $f(2) = 0$ devine $2 + m = 0$, de unde se obține că $m = -2$.

3. Din injectivitatea funcției exponențiale, obținem că $2x + 1 = 5$. Soluția este $x = 2$.

4. Mulțimea A are 9 elemente, ceea ce înseamnă că sunt 9 cazuri posibile. În mulțimea A se găsesc 4 multipli de 2, de unde se deduce că sunt 4 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută va fi $P = \frac{4}{9}$.

5. Să notăm cu $M(x_M, y_M)$ mijlocul segmentului AB. Atunci $x_M = \frac{-1+5}{2} = 2$ și
$y_M = \frac{3+3}{2} = 3$. Prin urmare, $M(2, 3)$.

6. Vom porni de la formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Atunci
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, va rezulta că $\sin x = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $C(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

   (a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$.

   (b) Avem că $C(-1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. Atunci $A + C(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, de unde deducem că $\det(A + C(-1)) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -16$. Pe de altă parte, $\det(B) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16$. Așadar, $\det(A + C(-1)) = \det B$.

   (c) Avem $C(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 & 3x+1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$. Pe de altă parte,

Scanned with OKEN Scanner

$A\cdot C(x)=\begin{pmatrix} x+6 & 10 \\ 2x+2 & 5 \end{pmatrix}$. Atunci $C(x)\cdot A - A\cdot C(x)=\begin{pmatrix} -4 & 3x-9 \\ 6-2x & 4 \end{pmatrix}$.

Relaţia $C(x)\cdot A - A\cdot C(x)=B$ devine $\begin{pmatrix} -4 & 3x-9 \\ 6-2x & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

De aici se deduce imediat că $x=3$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2-6X+3$.

(a) $f(1)=1^3+2\cdot 1^2-6\cdot 1+3=1+2-6+3=0$.

(b) Efectuăm împărţirea polinomului f la polinomul X^2+3X-3:

X^3	$+2X^2$	$-6X$	$+3$	X^2+3X-3
$-X^3$	$-3X^2$	$+3X$		$X-1$
	$-X^2$	$-3X$	$+3$	
	X^2	$+3X$	-3	
			0	

Aşadar, câtul împărţirii este $q=X-1$, iar restul este $r=0$.

(c) Să scriem relaţiile lui Viète: $x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_2x_3=-6$ şi $x_1x_2x_3=-3$. Atunci $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=x_1+x_2+x_3+\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=-2+\frac{-6}{-3}=0$.

SUBIECTUL III

1. (a) Funcţia f este derivabilă şi $f'(x)=(x^3-3x+1)'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+1-x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x}=-3$.

(c) Soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$ sunt $x_1=-1$ şi $x_2=1$. Ţinând cont de semnul funcţiei de gradul al doilea, avem că $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]$, adică funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[-1,1]$. Prin urmare, $f(1)\le f(x)\le f(-1)$, pentru orice $x\in[-1,1]$, adică $-1\le f(x)\le 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră.funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{1}{x}$.

(a) $\int_2^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^3\left(2x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=2\int_2^3 x\,dx=x^2\Big|_2^3=9-4=5$.

Scanned with OKEN Scanner

(b) Funcția F este derivabilă pe intervalul $(0, +\infty)$ și $F'(x) = (x^2 + \ln x + 2015)' = 2x + \dfrac{1}{x} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. Prin urmare, funcția F este o primitivă a funcției f.

(c) Avem $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 2x = \dfrac{1}{x}$. Atunci volumul corpului va fi:

$$V = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

TALON DE COMANDA

Către Editura GIL
Zalau, tel/fax 0260-616414, e-mail: comenzi@gil.ro

vă solicităm următoarele lucrări:

Titlul	BUCATI	Preţ
Bacalaureat 2016 matematică programa *M_mate-info*;		30 lei
Bacalaureat 2016 matematică programa *M_st-nat + M_tehnologic*;		30 lei
Bacalaureat 2015 matematică programa *M_mate-info*;		30 lei
Bacalaureat 2015 matematică programa *M_st-nat + M_tehnologic*;		30 lei
Bacalaureat 2014 matematică programa *M_mate-info*;		30 lei
Bacalaureat 2014 matematică programa *M_st-nat + M_tehnologic*;		30 lei
Bacalaureat 2013 matematică programa *M_mate-info*;		30 lei
Bacalaureat 2013 matematică programa *M_st-nat + M_tehnologic*		30 lei
Bacalaureat 2012 matematică programa MT1;		30 lei
Bacalaureat 2012 matematică programa MT2;		30 lei
Bacalaureat 2009 matematică MT1;100 variante- enunţuri+soluţii		30 lei
Bacalaureat 2009 matematică MT2;100 variante- enunţuri+soluţii		30 lei

Comanda se va livra pe numele: .....

CNP.....tel (fix sau mobil).....

mail.....

la adresa:.....

.....

Multumim!
www.gil.ro
Gândeşte inteligent şi liber !

Scanned with OKEN Scanner

GIL
www.gil.ro

2016
BACALAUREAT

Lucrarea constituie un ghid de pregătire pentru examen. Informația este structurată astfel încât elevul să poată realiza o pregătire rapidă și eficientă. BREVIARUL TEORETIC amplu, prin care noțiunile studiate sunt prezentate sistematic însoțite de exerciții și explicații, este urmat de exerciții și probleme structurate pe conținuturi de învățare. Aceasta abordare permite exersarea tuturor temelor programei de Bacalaureat 2016. Lucrarea cuprinde de asemenea TESTE tip BAC 2016 rezolvate precum și subiectele date la examem în anii anteriori.

SUCCES !

Editura GIL vă recomandă:

MANUALE ȘI AUXILIARE PENTRU LICEU

- ✓ Matematică - manual pentru clasa a XI-a (M1)
  Costel Chites, Daniel Petriceanu, Andrei Vernescu
- ✓ Matematică - manual pentru clasa a XII-a (M2)
  Dorel Duca, Ioan Purdea, Ovidiu Pop,
  Cristian Buican, Ovidiu Cojocaru, Cornel Sandu
- ✓ Informatică BD+SGBD+WEB-manual pentru clasa a XII-a
  Daniela Marcu, Ovidiu Marcu, Carmen Popa,
  Cristina Zotic, Giorgie Daniel Vlad

www.gil.ro

Gândește inteligent și liber !

Pentru comenzi vă puteți adresa Editurii GIL la:
Tel.: 0260-616314; Fax: 0260-616414; Mobil: 0733-677992
CP. 44, OP. 1, cod 450200, Zalău, Sălaj
E-mail: comenzi@gil.ro

I.S.B.N. 978-973-9417-99-0

PRET

Alexandria
20,90
LIBRĂRII

Scanned with OKEN Scanner